

고리와와 강체의 상호작용에 의한 유동장 및 음향장 수치해석

유기완\*, 이덕주\*\*

(Numerical simulation of flow and acoustic field interacting between a vortex ring and a rigid sphere)

(Ki-Wahn Ryu, Duck-Joo Lee)

1. 서론

Lighthill[1]이 4극음원(quadrupole)에 대한 공력소음식을 발표한 이후 Powell[2], Howe[3], Möhring[4]으로 이어지면서 자유유동장에서 저아음속 흐름에 대한 와도장의 분포에 의한 소음해석이 이루어졌다. 특히 Möhring은 벡터 Green 함수의 개념을 도입하였으며, 그의 이론의 특징은 와도장이 "compact"하다는 가정과 와도에 대한 선형적인 형태로 표현된다는 것이다. 고체 경계면이 있는 경우의 공력소음에 대한 이론적인 해석의 기원은 M. J. Lighthill의 공력음향학에 대한 식이 나온 후 이것을 토대로 N. Curle[5]에 의해서 이루어졌다. Ffowcs Williams와 Hawkins[6]은 보다 더 일반적인 경우로 임의로 움직이는 고체경계면의 효과까지 고려한 일반화된 파동방정식을 유도하였다. 간단한 고체경계면이 존재하는 경우에 대한 음향장 해석이 많은 연구자들에 의해서 발표되었으며 차원해석을 통해 볼 때 난류효과에 의한 4극자의 음압강도가 유체의 특성마하수의 8승에 비례하듯이 Curle의 형태로 나온 물체표면효과는 쌍극음원(dipole)의 형태로 표현되며 이 음압강도는 유체특성마하수의 6승에 비례함이 밝혀지게 되었다. 즉 속도가 작은 흐름에서는 쌍극음원향이 더 우세한 음원이 됨을 의미한다. 간단한 형상의 대표적인 예중에서 흥미있는 것으로 와류와 반무한 평판에 의한 해석이 많은 연구자들[7,8]에 의해서 시도되었고 결과적으로 볼 때 이경우와 같은-예를 들면 얇은 날개의 뒷전 흐름- 특정형태의 고체경계면인 경우엔 특성속도의 5승에 비례하게 됨이 알려졌다. Obermeier[9]는 벡터 Green 함수를 이용하여 구 또는 무한원통 주위에 임의의 와도장이 주어졌을 때 원거리에서 음압변동이 어떻게 될 것인가에 대해 MAE (Matched Asymptotic Expansion)방법을 이용해 해석적으로 표현하였다. 그의 식을 보면 와도장의 원주방향성분이 물체주위의 가상적인 단위균일흐름장이 있을 때 가상의 등유량함수를 자르고 지나는 시간변화로 표현된다. Kambe *et. al.* [10]은 원통 근처를 지나고 고리와에 의한 음향장 해석을 이

론과 실험을 통해서 해석하였다. 그의 해석에서 고리와가 원통근방을 지나갈 때 고리와의 위치 변화에 의해서 원통에 작용하는 전체 힘벡터의 방향이 변하게 되고 이로인해서 쌍극음원의 방향이 바뀐다는 것을 보여주었다.

3차원 와선(vortex filament)에 대한 거동해석은 Hama 등[11]에 의한 LIA(Local Induction Approximation)에 의해서 와선의 내부핵(core)이 대표길이에 비해 매우 작다는 가정하에 와선의 거동이 지역적인 곡률의 크기에 비례한다고 보고 근사적으로 해석하였으며 이로써 와선의 거동해석이 시작되어 Dhanak 등 [12]에 의해서 타원형 고리와에 대한 정성적인 해석이 이루어 졌다. 원형고리와의 특징은 원형고리와가 전개해 나갈 때 와도가 존재하는 와관의 중심이 한 평면상에 계속 존재한다는 것이다. 즉 2차원적인 표현이 가능하다. Dyson의 식으로 부터 원형고리와에 대한 문제는 해석적으로 처리할 수 있다 해도 외부의 간섭에 의해서 와선상의 곡률 변화에 의한 와선의 비틀림은 완전한 3차원 흐름을 이루게 되고 해석적인 표현이 불가능 하게 된다. 이러한 완전한 3차원 거동의 대표적인 예로써 타원형 고리와를 들 수 있다. 본 연구에서는 유체의 점성 또는 다른 실재기체에 존재하는 효과는 음향장에 미치는 효과가 무시할만하다고 보며, 모든 특성흐름 속도가 음속에 비해서 충분히 작고 특성길이가 발생음의 파장보다 충분히 작다는 가정을 토대로 쌍극음원의 관점에서 해석하기로 한다.

2. 본론

2.1 음향장 지배식

자유흐름상태에서 Lighthill의 음향방정식은 비제차 파동방정식꼴이 되며

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = T_j \tag{1}$$

이다. 여기서  $p$ 는 원거리에서의 압력교란이고  $a_0$ 는 주위의 음속,  $T_j$ 는 유동에서 주어지는 원천항으로써 Lighthill의 음

\* 한국과학기술원 항공우주공학과  
\*\* 한국과학기술원 항공우주공학과

력텐서가 된다. 정지된 물체에 대한 Curle의 식으로부터 밀도 교란은 아래와 같다.

$$\rho = \frac{1}{4\pi a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{F_i \left( y, t - \frac{r}{a_0} \right)}{r} dy - \frac{1}{4\pi a_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{P \left( y, t - \frac{r}{a_0} \right)}{r} dS(y) \quad (2)$$

여기서  $F_i$ 는  $-i_j p_{ij}$ 이고  $p_{ij}$ 는 압축응력 텐서이며  $I_j$ 는 단위수직벡터이다. 저음속유동의 경우엔 eddy와 물체의 특성길이가 소리의 파장에 비해서 compact 하다고 볼 수 있고 차원해석을 통해 볼 때 쌍극음원이 지배적이며 따라서 원거리에서의 음압은 Curle의 식 (2)에서 아래와 같이 이 하나의 쌍극음원 형태로 표현가능 하다.

$$P(x, t) = \frac{1}{4\pi a_0} \frac{x_i}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} F_i \left( t - \frac{r}{a_0} \right) \quad (3)$$

고리와와 물체의 상호작용시에 윗식은

$$P(x, t) = \frac{\rho_0}{4\pi a_0} \frac{x_i}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Pi_i \left( t - \frac{r}{a_0} \right) \quad (4)$$

$$\Pi_i(t) = \Gamma \int \Psi_i \cdot ds = \Gamma \int (\nabla \times \Psi_i) \cdot n dS(y) = \Gamma J_i(t) \quad (5)$$

여기서  $\rho_0 \Pi_i$ 는 유체의 임펄스이고  $\Psi_i$ 는 물체주위에 가상적으로 존재하는  $i$  방향의 단위균일 흐름에 의한 벡터퍼텐셜이다. 여기서  $\Gamma$ 는 와의 세기이고  $ds$ 는 폐경로  $\sigma$ 를 따른 선분이며  $dS$ 는 폐경로  $\sigma$ 로 이루어지는 면소이고  $n$ 은  $dS$ 에 수직인 벡터이다.  $J_i(t)$ 는 면  $S$ 를 지나는 체적 플럭스이다. 윗식을 image를 갖는 동축고리외에 적용하면  $J_i(t) = 2\pi\psi$ 이고  $\psi$ 는 원주에 단위자유흐름이 있을 때의 스칼라 유량함수이다.

## 2.2 유동장해석

Biot-Savart 식에 대한 Moore-Rosenhead 공식은

$$\frac{\partial X(\xi_0, t)}{\partial t} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\partial X(\xi, t)}{\partial \xi} \times \frac{X(\xi_0, t) - X(\xi, t)}{\{X(\xi_0, t) - X(\xi, t)\}^2 + \mu^2} d\xi \quad (6)$$

이다[12]. 여기서

$$\mu = c(t) \exp\left(-\frac{1}{2} - A\right)$$

$$A = \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^c r v^2 dr = 1$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r} f\left(\frac{r}{c(t)}\right)$$

$$f\left(\frac{r}{c(t)}\right) = \sqrt{r/c(t)}$$

$\xi$ 는 와선을 따르는 지역좌표변수이고  $\vec{X}(\xi, t)$ 는 와선상의 좌표가 된다. 와선 필라멘트의 거동은 초기의 코어반경인  $c_0$ 와 와선의 형상에 의하여 크게 지배받으며 타원형 고리외에 대한 Saffman의 제안식을 사용하면 다음과 같이 된다[12].

$$c_0 = 8(ab)^{1/2} \exp\left[-\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}} - 1 + a - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \frac{K(e)}{E(e)}\right] \quad (7)$$

여기서  $a$ 와  $b$ 는 초기에 주어지는 타원형의 장축과 단축의 반절이되는 값이고,  $K(e)$ 와  $E(e)$ 는 완전타원적분의 첫번째와 두번째 형태를 나타내고  $e$ 는 편심도이다. 와도중심은 비정상 운동해석시 중요한 기준으로 작용한다 Saffman이 제안한 와도중심은 다음과 같다.

$$\vec{X}_c(t) = \frac{\Gamma}{2} \int \frac{(\vec{X} \times \vec{t} \cdot \vec{I}) \vec{X}}{|\vec{I}|^2} ds, \quad \vec{X}_c = (x_c, y_c, z_c), \quad \vec{X} = (x, y, z) \quad (8)$$

이 와도중심의 시간에 따른 위치변화가 와도중심의 이동속도가 된다. 여기서 벡터  $I$ 는 와선의 임펄스이고  $I$ 는 와선 단면이 갖는 순환세기이며  $t$ 는 와선의 접선단위벡터이다.

와선을 곡선식으로 표현하는데는 여러가지 방법이 있겠으나 일반적으로 쉽게 생각할 수 있는게 3차 스플라인곡선(cubic spline curve)이다. 그러나 본 연구에서처럼 지역적인 곡률이 와류의 거동에 중요한 영향을 미치는 경우엔 스플라인 곡선은 문제가 있다고 본다. 일단 스플라인곡선으로 완전한 원을 이룰 수 없다는 것이 기본적인 문제이며 무엇보다도 중요한 것은 접선방향 벡터가 비직관적인 값을 가질 성향이 있다는 것이다. 또한 와선을 정의하는 점들의 갯수가 증가하는 경우엔 커다란 tri-diagonal 행렬을 풀어야 되며 특히 폐곡선 인 경우엔 주기적인 경계조건을 주어야되므로 시간과 정확성면에서 다소 문제가 있다고 본다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 보완하기위해 Parabolically blending 함수를 이용하였다[13]. 유동장의 변화에 의한 강체구의 작용력 계산은 경계치 적분방법을 통해서 수행하기로 한다.

## 3. 결과 및 토의

본 연구에서 처럼 와선을 수학적인 곡선식으로 표현했을 때엔 여러가지 장점을 가지며 특히 곡률의 커다란 변화가 있을 때 해상도를 증가시키기위한 점의 삽입이 매우 용이할 뿐만 아니라 음향장 해석시의 체적적분을 선적분으로 바꿀 때 그 계산이 용이하다는 것이다. 본 연구에서 다루고자 하는 모델의 개략도는 그림 1에 나타내었다. 세기가  $4\pi$ 인 고리외가 강체구에 부딪힐 때엔 정확도와 해상도의 증

가를 위해서 와선상에 새로운 점들을 넣어주게 된다. 고리와의 반경은 1.0이고 초기  $x=-5$  에서 여러높이에 대해 달리 놓여지게 되며 ( $z=0.0, -0.1, -0.2, -0.3, -2.0, -2.1, -2.4, -2.8$ ) 자체 유도속도에 의해서 고리와의 강체구에 다가가는데 이 경우엔 와선이 구에 capturing 되지 않고 빠져나가게 된다. 전형적인 두 경우에 대한 고리와의 강체구의 상호작용 결과를 그림 2 에 나타내었다. 일반적으로 이 때 구를 지난 고리와의 약간의 변형을 동반하여 마치 타원형 고리와의 움직이는 것처럼 완전한 3차원 거동을 하게 된다. 이러한 점에서 볼 때 고리와의 이동경로는 초기진행방향과는 약간 다른방향의 각도로 진행하게 되고 이 결과를 그림 3 에 나타내었다. 그림 4의 (a)와 (b)에서는 특별한 경우에 대하여  $z=-1.0$ 이고 시간간격 0.0005 로 했을 때 강체구에 강하게 상호작용하는 경우이다. (a)의 경우엔 고리와의 강체구에 capturing 되어 심한 비틀림을 초래하였으나 초기 고리와의 자체유도속도의 두 배에 해당하는 속도를 갖는 균일흐름장을 첨가했을 때 capturing 되지않고 빠져나감을 알 수 있다. 와선상의 점들을 재분포 시키기는 이유는 인접하는 선분 끼리의 크기차이를 줄이므로써 전반적인 오차의 감소를 이루기 위해서이다. 본 연구에서는 초기 선분 요소의 1.5배가 된 경우엔 선분을 두 개로 나누어 주고 초기길이 보다 0.2배 이하인 경우엔 그 점을 제거시켜서 적당한 범위에 드는 길이를 갖는 선분들로 구성하게 된다. 고리와의 구 주위를 지날 때의 강체구에 작용하는 양력과 항력의 변화를 그림 5 와 그림 6 에 나타내었다. 강체구에 작용하는 힘은 고리와의 접근할 때와 멀어질 때 서로 대칭을 이루지 않으며 이는 와선의 변형에 의한 작용력의 변화에 기인한다. Kambe[14]는 동축선상에서 서로 중심을 둔 원형고리와의 강체구에 다가갈 때 생기는 음향효과를 해석하였다. 본 연구에서는 고리와의 반경이 1, 구의 반경은 0.6172 이고 고리와의 코어반경은 0.15로 하였고 식 (4) 와 식 (5) 로 부터 결과를 그리면 그림 7 과 같은 형태로 된다. 본 연구에서는 Dyson 식으로부터 해석적으로 처리한 Kambe와는 다른 방법으로 식 (6), (7), (8) 에서 직접 고리와의 운동을 해석하기로 한다. 이는 임으로 변형되는 고리와의 거동을 해석하기 위함이다. 구와 고리와의 동축선상에 중심을 두고( $Z=0$ ) 상호작용하는 경우를 그림 8 과 그림 9 에 나타내었다. 이 때 강체구의 반경은 0.7 이고 고리와의 반경은 1.0 이며 초기 위치는  $x=4$  이다. 그림 8 은 위 경우의 방향성을 나타낸 것으로 전형적인 쌍극음원의 형태를 갖는다. 이 때 고리와의 진행방향이 쌍극음원의 축과 일치함을 알 수 있다. 만일 고리와의 강체구의 아래를 지날 때의 음압신호는 어떠한가를 알아보기위해  $z=-2.1$  인 경우에 대한 결과를 그림 10 과 그림 11 에 나타내었다. 이 때 흥미있는 현상으로 강체구에 작용하는 힘의 합성벡터방향이 고리와의 움직일 때마다 변하기 때문에 이에 따라서 쌍극음원의 축도 회전하게 됨을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 와선 지배방정식의 계산을 위해 쌍극선 blending 함수를 이용하여 와선운동의 정확한 계산을 할 수 있었고 이 방법을 통하여 임으로 거동하는 와선이 강체구와 간섭하는 경우의 3차원 유동장에 대한 해석과 이에 의한 쌍극 음향장 해석을 수행하였다. 경계치 적분방법을 통해 강체구에 작용하는 힘을 계산할 수 있었고 이 방법은 물체의 형태에 구에 반지 않으므로 임의형상에 대해서도 유동장과 음향장 계산이 가능하다고 본다.

#### 5. 참고문헌

1. M. J. Lighthill, "On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory," *Proc. Roy. Soc. (London)*, 211A, 1107, 564-587, 1952.
2. A., Powell, "Theory of Vortex Sound," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 36, No. 1, 177-195, 1964
3. M. S., Howe, "Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute." *J. Fluid Mech.* 71, 625-673, 1975
4. W., Möhring, "On vortex sound at low Mach number", *J. Fluid Mech.*, vol. 85, 685-691, 1978
5. N., Curle, "The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound", *Proc. Roy. Soc. (London)*, 231A, 505-514, 1955
6. J. E. Ffowcs Williams and D. C. Hawkings, "Sound generation by turbulence and surface in arbitrary motion", *Phil. Trans. Roy. Soc.* A264, 321-342, 1969
7. D. G. Crighton and F. G. Leppington, "Scattering of aerodynamic noise by a semiinfinite compliant plate", *J. Fluid Mech.* 43, 721-736, 1970
8. T. Kambe, T. Minota and Y. Ikushima, "Acoustic wave emitted by a vortex ring passing near the edge of a half plane", *J. Fluid Mech.* 155, 77-103, 1985
9. F. Obermeier, "The influence of solid bodies on low Mach number vortex sound", *J. Sound and Vib.* 72, 39-49, 1980
10. T. Minota and T. Kambe, "Acoustic waves emitted by a vortex ring passing near a circular cylinder", *J. Sound and Vib.* 119, 509-528, 1987
11. R. J. Arms, & F. R. Hama, "Localized -induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring." *Phys. Fluids* 8, 553-559, 1965
12. M. R., Dhanak & B., de Bernardinis, "The evolution of an elliptic vortex ring." *J. Fluid Mech.* 109, 189-216, 1981
13. Ryu, K.W. & Lee, D. J. "Numerical simulation of evolutions of a vortex ring and its interactions with a rigid sphere." *The 1st Int. Conf. on Flow Interaction*, Sep. 1994, Hong-Kong
14. H. Hasimoto and T. Kambe, Vortex Motion, North-Holland, 1988

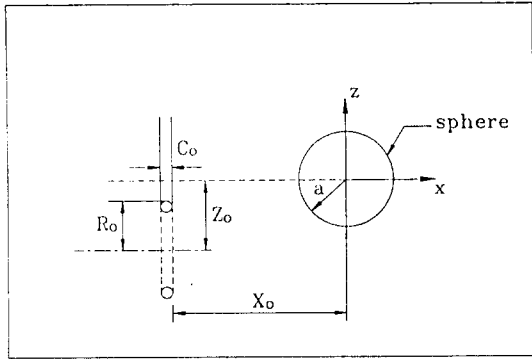
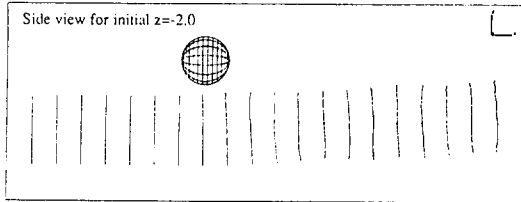
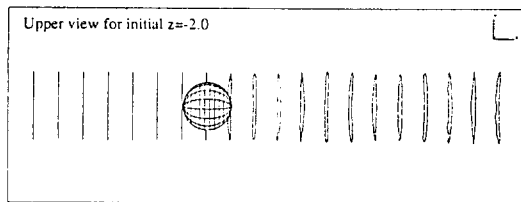
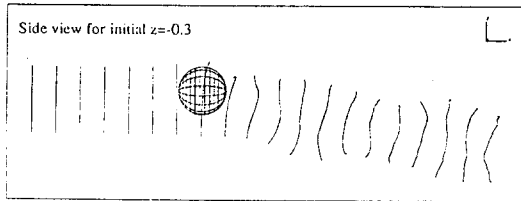
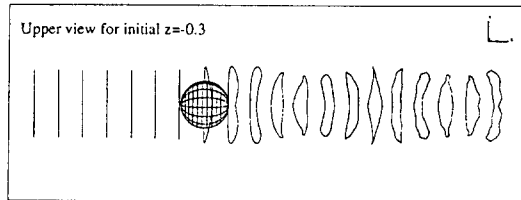


그림 1. 구와 고리와의 도식.



(a) 초기  $(x_0, y_0, z_0) = (-5, 0, -2)$



(a) 초기  $(x_0, y_0, z_0) = (-5, 0, -0.3)$ ,

그림 2. 고리와 강체구의 상호작용에 대한 전형적인 형태.

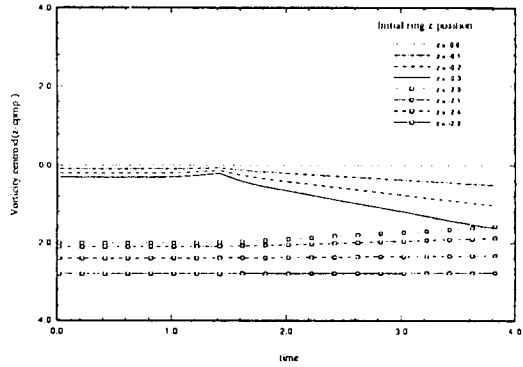
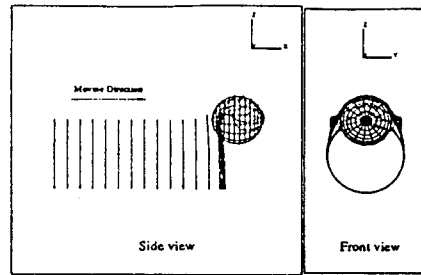
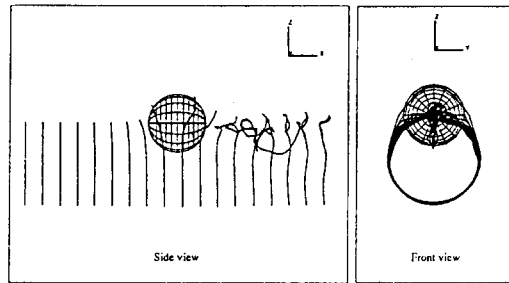


그림 3. 와도중심의 경로변화.

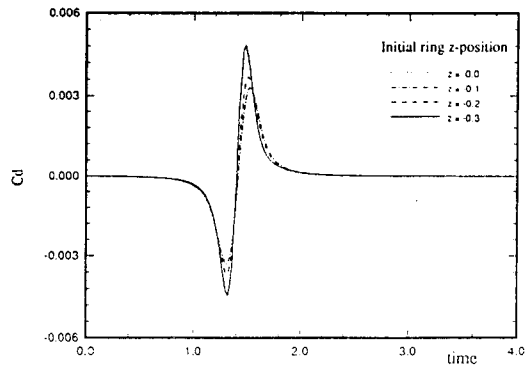


(a) 균일흐름이 없음

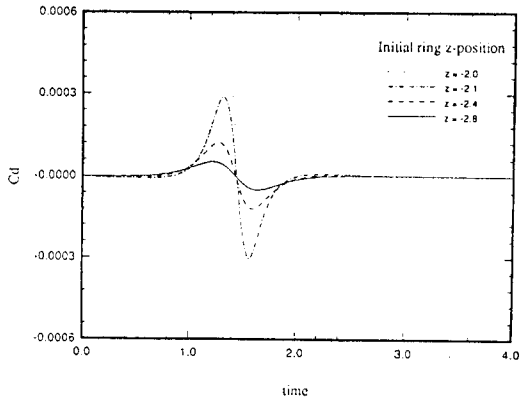


(b) 균일흐름이 고리와이동속도의 2배

그림 4. 고리와 강체구의 강한상호작용  $((x_0, y_0, z_0) = (-5, 0, -1))$



(a) 강체구를 감싸고 지나갈 때



(b). 강체의 옆을 지날 때

그림 5. 초기위치에 따른 강체에 작용하는 항력의 변화.

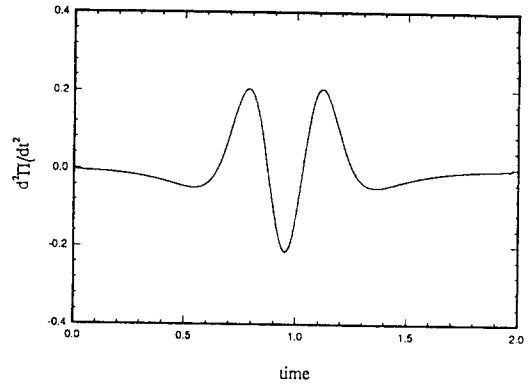
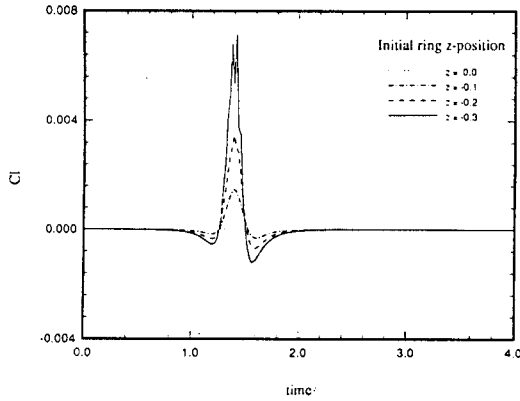


그림 7. 중심이 서로 동축상에 있을 때 임펄스의 시간변화



(a). 강체를 감싸고 지나갈 때

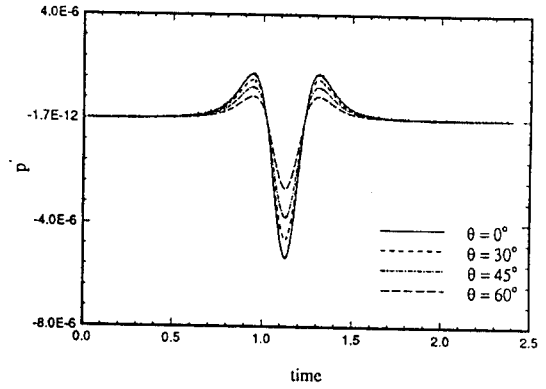
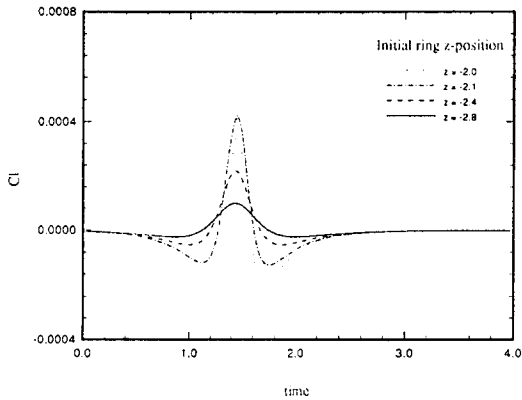


그림 8.  $z_0=0$ 인 경우 방위각에 따른 원거리 음압변화



(b). 강체의 옆을 지날 때

그림 6. 초기위치에 따른 강체에 작용하는 양력의 변화.

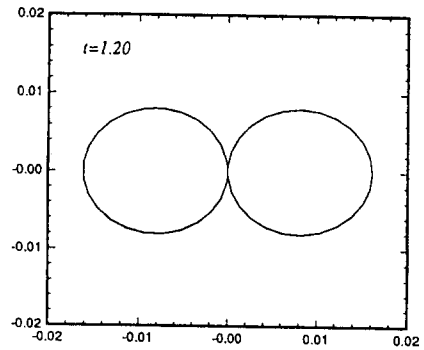


그림 9.  $z_0=0$ 인 경우 시간에 따른 방향성

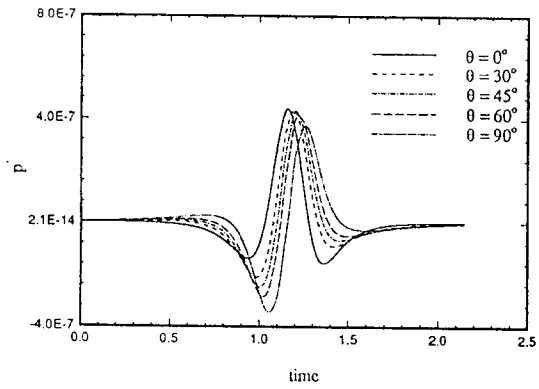


그림 10.  $z_0 = -2.1$ 인 경우 방위각에 따른 원거리 음압변화

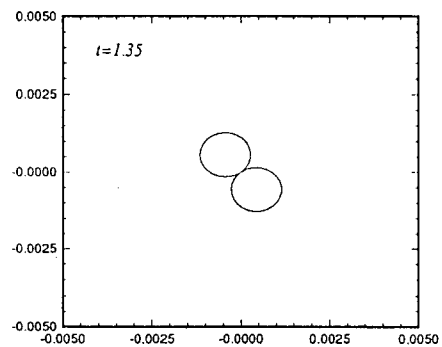
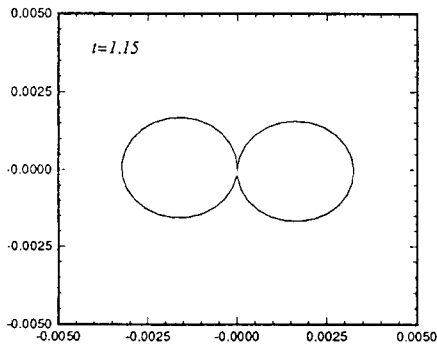
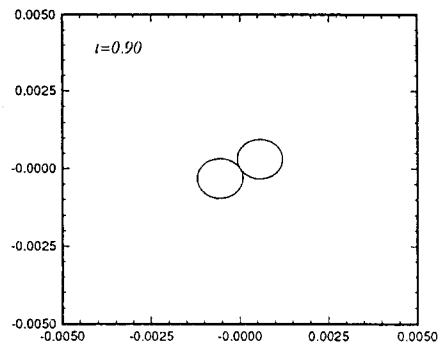
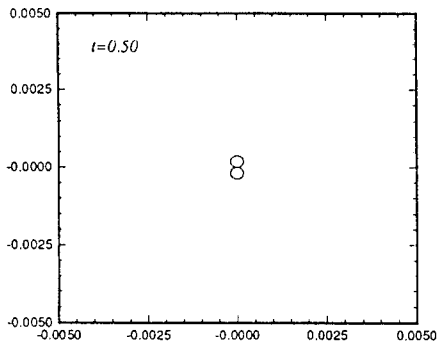


그림 11.  $z_0 = -2.1$ 인 경우시간에 따른 방향성의 변화