

압전소자를 이용한 기반가진을 받는 유연한 외팔보의 제어

- H_2 와 H_∞ 공간에서의 설계 -

오진형*, 허훈**

Control of Flexible Cantilever Beam under Base Excitation using Piezoelectric Film

- Design in H_2 and H_∞ Spaces -

Jinhyoung Oh*, Hoon Heo**

This paper describes the vibration control of a cantilever beam that is reformulated as the sensitivity minimization problem and solved in H_∞ controller that is studied widely nowadays. The result of suggested controller is compared with that special form of H_2 controller, i.e., LQG. Piezoelectric actuator is chosen and disturbance is applied in the form of base excitation to match real aeronautical problems. Simulations are given, whose results reveals the performance of suggested controller is better than LQG in many cases.

외팔보의 진동문제를 외란에 대한 감도최소화 문제로 공식화하여 현재 많이 개발되어있는 H_∞ 제어기법의 해를 이용하여 접근하고, 이의 성능을 비교하기 위하여 H_2 공간에서의 특수한 문제인 LQG를 다루었다. 작동기는 압전소자를 사용하였고, 실제 항공의 등의 문제와 일치될 피하기 위하여 기반가진 형태의 외란을 가하였다. 모의실험이 수행되었으며, 제시된 제어기가 많은 상황에서 좋은 성능을 가진다는 것이 밝혀졌다.

서론

압전소자(piezoelectric material)는 가해지는 전기적 에너지를 기계적 변형으로 바꾸어주는 성질 및 그 역(逆)의 성질을 가지고 있으며, 최근의 구조물의 경량화 추세와 능동제어의 경향으로, 진동제어에 있어서 많이 사용되는 연속작동기(distributed actuator)중 하나이다. 압전소자는 크게 세라믹(PZT : piezoelectric zirconate titanate)과 필름(PVDF 또는 PVF₂ : piezoelectric polymer polyvinylidene fluoride)으로 나누어지는데, 이들은 지능구조물(intelligent structures)로서의 사용이 가능하며, 가볍고 작동 및 부착이 쉬워 LSFS(large space flexible structures)등과 같이 작동기나 센서의 수가 많은 경우에도 구조물의 기계적/동력학적 성질을 변화시키지 않는 범위 내에서의 응용이 용이하다. 특히 이 논문에서 사용하는 압전필름은 구조물에 부착이 쉽고, 재단이 자유롭고 무게가 가벼우며, 가격이 저렴하다는 장점을 가지고 있다.

70년대 중반에 비로소 진동문제에 적용되기 시작하였던 압전소자는 이미 80년대부터 센서 및 작동기로서 기초적인 수동 및 능동제어에 사용되어 우수한 성능을 보여왔으며^[1], 이후 여러가지 경우에서의 정력학/동력학적인 해석이 제시되었다. Crawley등은 작동기가 접착(bonded)되어있는 경우와 복합재료와 같이 묻힌(embedded)경우등에서의 해를 훌륭하게 제시하였고^[2], Baz등은 IMSC (independent modal space control)를 통하여 압전작동기를 진동문제에 적용, 압전소자와 구조물사이의 결합층의 두께가 실제 진동에 있어서 어떤 영향을 미치는지에 대해 중점적으로 연구하였으며^[3], Kim등은 구조물과 압전 작동기 사이의 갈라짐(delamination)을 중심으로한 모델링^[4]을 다루었다. 이외에도 구조물에 원하는 모멘트를 기하학적으로 다르게 가할 수 있는 압전필름의 장점을 이용한 Chiang등의 연속작동기에 관한 연구^[5], 하나의 압전 작동기를 이용하되, 가제어성등을 고려한 최적화를 통하여 위치와 크기를 조정하는 연구^[6]등이 현재 활발하게 진행되고 있다.

그러나 위에서 조사된 것과 같은 상세한 연구결과들은 진동제어 보다는 압전 작동기 자체의 연구로서 의미가 있지만, 작동기의 지배방정식을 매우 복잡하게 만

* 고려대학교 제어계측공학과 대학원
** 고려대학교 제어계측공학과 교수

든다는 단점을 가지고 있다. 또한 진동제어의 측면에서 볼 때, 많은 논문들이 소자의 연구에 비하여 매우 간단한 제어를 쓰고 있고, 문제의 공식화를 명확하게 설정하지 않아 실제의 응용에 많은 문제점과 제한을 주고 있는 실정이다.

따라서 본 논문에서는 많은 가정을 통하여 가능한 작동기의 모델을 간단히 하고, 진동문제를 감도 최소화 문제로 공식화 하여 최근 많은 이론적 해들이 제시되고 있는 H_∞ 제어를 통하여 강인한 제어를 설계하였다. H_∞ 제어기는 문제의 공식화에 따라 많은 응용이 가능하며, 외란과 모델 불확실성이 많은 문제에서 강인한 특성을 특성을 가지므로 진동제어에 적합하다 할 수 있다.

H_2/H_∞ 공간에서의 제어기의 유도

1980년 초반에 제시되기 시작한 H_∞ 제어문제는 다입력/다출력 제어에서의 페루프 주파수 응답의 피크(peak)를 최소화 하는 제어 방법으로, 백색잡음에 대한 RMS 값을 최소화 하는 LQG(linear quadratic Gaussian) 제어기와 비교가 된다. 두 제어기는 각각 식 (1)과 같은 전달함수의 두 노름(norm) : H_2 노름과 H_∞ 노름을 성능지수로 취한다.

$$\|P\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [P(j\omega)^* P(j\omega)] d\omega \right)^{1/2} \quad (1)$$

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} [P(j\omega)]$$

즉, 제어를 사용하여 계의 전달함수의 노름을 최소화 하는 최적제어의 설계가 H_2 와 H_∞ 제어의 목적이 된다. 이를 위하여 일반적인 다입력/다출력 계를 그림 1과 같이 표현하여, 계를 크게 플랜트 모델인 $P(s)$ 와 추정기를 포함한 제어기의 모델인 $K(s)$ 로 나누어 해석한다. 여기서 u_1 은 외부에서 들어오는 신호로서, 잡음 및 기준신호가 포함되고 u_2 와 y_2 는 각각 되먹임 제어신호와 센서에서의 출력이다. 그리고 y_2 는 오차신호와 같이 설계시에 최소화 할 대상이라고 볼 수 있다. 이와 같은 형태를 선형부분변환(LFT : linear fractional transformation)이라 하며, H_2 와 H_∞

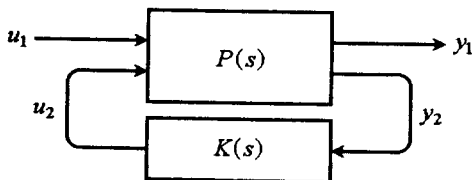


그림 1 선형부분변환으로 표현된 계의 블록선도

제어기의 문제는 다음의 두 조건

- i) $LFT(P, K)$ 가 내부적으로 모든 변수가 안정하며,
- ii) $\|LFT(P, K)\|_\sigma$ 가 최소화되는 제어기

을 만족하는 제어기를 찾는 문제로 정의될 수 있다. 여기서 물론 σ 가 2인 경우와 무한대의 경우의 문제가 각각 H_2 와 H_∞ 제어문제가 된다.

H_2 와 H_∞ 제어기의 문제는 1980년대 후반에 와서 그의 해가 여러 방법을 통하여 본격적으로 제시되기 시작하였는데, 본 논문에서는 Doyle등이 연구한 상태공간에서의 해석법^[7]중 가장 일반적이고 진동문제에서 쉽게 응용하여 사용할 수 있는 출력 되먹임 문제(OF : output feedback)을 사용한다.

먼저 그림 1과 같은 계에서 플랜트 $P(s)$ 는 다음의 형태로 실현이 된다.

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고, 해를 위하여 계는 다음과 같은 가정을 만족한다고 한다.

가정 1. 일반화된 플랜트에 대한 가정

1. (A, B_1) 은 안정화가 가능하며(stabilizable), (C_1, A) 는 검출이 가능하다(detectable).
2. (A, B_2) 은 안정화가 가능하며, (C_2, A) 는 검출이 가능하다.

3.

$$D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$$

4.

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

H_2 최적 제어기의 유도

계가 가정 1을 만족하면, 다음의 두 Riccati 방정식의 해가 존재하며,

$$X_2 = \text{Ric} \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y_2 = \text{Ric} \begin{bmatrix} A^T & -C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

다음과 같이 $F_2 = -B_2^T X_2$, $L_2 = -Y_2 C_2^T$ 등의 상수 행렬을 정의한다면, $\|LFT(P, K)\|_2$ 를 최소화 하는 유일한 제어기는 다음과 같은 구조를 가진다.

$$K_{opt}(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 F_2 + L_{+2} C_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

이는 기본적인 관측기가 기초가 된 제어기의 형태로, 다음과 같이 관측기와 제어기의 독립이 가능하다. 이는 LQG에서 말하는 분리법칙(separation principle)을 나타내고 있다.

$$G_C(s) = \begin{bmatrix} A+B_2F_2 & I \\ C_1+D_{12}F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G_K(s) = \begin{bmatrix} A+L_2F_2 & B_1+L_2D_{21} \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

II. 준최적 제어기의 유도

H_∞ 제어기의 경우는 Youla 변수화에 의하여 전달함수의 무한대 노음이 주어진 γ 보다 작은 제어기를 찾는 문제로 바뀌어지며, 이의 해는 자유변수 $Q(s)$ 를 가지는 제어기의 집합으로 주어진다. 계의 구조를 H₂ 제어기의 경우와 같게 하기 위하여 $Q(s)$ 를 0으로 놓았을 경우, 이를 중앙 제어기(central controller)라고 하며, 다음과 같이 구하여진다.

계가 가정 1을 만족하면, 다음의 두 Riccati 방정식의 해가 존재하며,

$$X_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C_1^TC_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Y_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2 \\ -B_1B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

식 (6)의 해는 다음의 조건을 만족한다.

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (7)$$

여기서 ρ 는 eigenvalue의 최대값을 의미한다. 상수행렬을 다음과 같이 정의하면: $F_\infty = -B_2^TX_\infty$, $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$, $Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}$, 전달함수의 무한대 노음이 주어진 γ 보다 작은 준최적 제어기는 다음과 같은 구조를 가진다.

$$K_{sub}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\widehat{A}_\infty = A + \gamma^{-2}B_1B_1^TX_\infty + B_2F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

실험장치의 구조 및 모델링

외관보에서의 진동문제는 실제 항공의 등의 모델에 잘 부합되며, 해석적인 해가 비교적 간단할 뿐 아니라, 모달영역으로 변환할 때, 최소한의 센서와 작동기를 이용하여 전 모우드에 대한 가제어성(可制御性: controllability)과 가관측성(可觀測性: observability)을 확보할 수 있다는 장점이 있다. 이 논문에서 제어대상으로 택한 보의 구조는 그림 2와 같으며, 외부에서 들

어오는 외란을 기반가진(base excitation)의 형태로 받게 된다. 위치 측정을 위한 센서는 보의 끝(tip)에 부착되어, 추정기에 각 모달변수의 정보를 주게 되고, 제어기를 위한 압전 작동기는 보의 표면에 길이방향으로 균일하게 부착되어 있다.

작동기 및 보의 모델에 있어서의 가정을 정리하면 아래와 같다. 이러한 가정들은 식을 간단히 하는 반면에 실제 실험에 적용시, 모델의 불확실성을 만드는 원인이 된다.

가정 2. 압전 작동기에 대한 가정

1. 압전 작동기는 크기가 균일하며, 전극표면의 금(crack)이나 표면저항에 관계없이 모든 부분에서 전계가 균일하게 가해진다.
2. 압전 작동기와 보 사이의 결합층(bonding layer)은 충분히 작아 이에 의한 전단응력은 무시할 수 있다.
3. 압전 작동기와 구조물은 완벽하게 접촉되어 있고, 사이에서 기포등에 의한 갈라짐은 없다고 한다.
4. 압전 작동기의 동력학은 계의 두개의 고유진동수 보다 충분히 빠르다고 한다.

가정 3. 모델링에서의 계에 대한 가정

1. 보의 운동은 수직운동(transverse motion)만 존재하며, 축방향, 뒤틀림등은 무시할 만큼 작다.
2. 끝의 집중질량은 질점(質點)으로 작용하며 자체 부피나 기하학적 모형에 의한 회전관성항은 없다.
3. 집중질량 및 보에 작용하는 중력은 무시한다.
4. 계는 보존계이며 비보진력, 즉 감쇠항은 존재하지 않는다.

압전 작동기의 모델

먼저 압전소자의 성질과 복합재료 보의 원리로부터, 가해지는 전압에 따라 발생하는 보에 대한 모멘트 $M_b(x, t)$ 를 유도한다.

두께가 h_b 인 압전필름에 전압 $V(t)$ 가 가해지면, 압전 작동기는 길이방향으로 변형되어, 다음과 같은 응력이

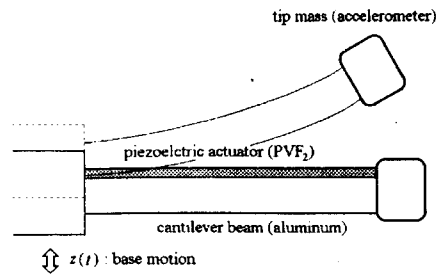


그림 2 보의 구조

나타나게 된다.

$$\sigma_x = -E_p \frac{d_{31}}{h_p} V(t) \quad (9)$$

여기서 $V(t)$ 는 앞에서 말한 바와 같이 x 의 함수가 아니다.

보의 너비인 b 는 y 에 따라 일정하므로 응력에 의한 중립축(neutral axis)에서의 모멘트 $M_b(x, t)$ 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} M_b(x, t) &= \int_A y \sigma_x dA = \int y \sigma_x (by) dy \\ &= \int_{-(h_1-D)}^{-(h_1+h_2-D)} \sigma_x (by) dy \end{aligned} \quad (10)$$

복합재료 보에서의 x 방향에 대한 힘의 평형식을 세워 중립축의 위치인 D 를 구하면, 식 (10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} M_b(t) &= -d_{31} b \frac{E_p E_b (h_p h_b + h_b^2)}{2(E_p h_p + E_b h_b)} V(t) \\ &= -c_p V(t) \end{aligned} \quad (11)$$

위 식에서와 같이 모멘트는 전압이 x 의 함수가 아니므로 보에 균일하게 가해짐을 알 수 있다.

외팔보의 지배방정식

기반가진을 $z(t)$ 라 하면, 보의 절대변위는 다음과 같이 정의되며,

$$w(x, t) = u(x, t) + z(t) \quad (12)$$

일반적인 Bernoulli-Euler보를 사용하면, 보의 지배방정식은 아래와 같은 편미분 방정식과 그에 따른 경계조건으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) \\ = -\rho A \frac{d^2}{dt^2} z(t) + c_p \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(t) \end{aligned} \quad (13)$$

for $0 < x < \ell$

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 \\ \text{for } x = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = c_p V(t) \\ EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) = m_t \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \end{aligned} \quad (15)$$

for $x = \ell$

이를 제어이론에 적용하기 위하여, 가중 잉여항 방법(method of weighted residuals : MWR)중, 가장 많이 사용되는 Galerkin의 방법을 사용하면, 아래와 같은 기본적인 상미분 방정식을 구할 수 있게 되고,

$$\begin{aligned} [M] \begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{pmatrix} + [K] \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} \\ = [W] \ddot{z}(t) + [F] V(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 각 상수행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ji} = \rho A \int_0^\ell \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_t \phi_i(\ell) \phi_j(\ell)$$

$$\begin{aligned} K_{ji} &= EI \int_0^\ell \frac{d^2}{dx^2} \phi_i(x) \frac{d^2}{dx^2} \phi_j(x) dx \\ P_i &= -\rho A \int_0^\ell \phi_i(x) dx \\ T_i &= c_p \frac{d}{dx} \phi_i(\ell) \end{aligned} \quad (17)$$

이제 계의 입력을 각각 제어입력인 $V(t)$ 와 외란인 z 로 하고, 센서에서 얻을 수 있는 절대변위 $u(\ell, t)$ 를 출력으로 정의하면, 위에서의 모달 방정식을 다시 상태 방정식으로 바꿀 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 \dot{z} + B_2 V(t) \\ y &= Cx + z \end{aligned}$$

위의 식에서 볼 수 있듯이, 이 계는 모든 상태변수에 있어서 제어 및 관측이 가능하고, 앞에서 H_∞ 제어기의 가정 1의 2와 4를 만족한다.

모의실험 및 결과

앞에서 구한 모델을 통하여 모의실험을 수행하였다. 계는 기반가진으로 백색잡음(white noise)을 받게 하였고, 제어를 위한 신호 y 은 $u(x, t)$ 와 $u(t)$ 의 합으로 하였다. 따라서 가정 1의 1과 3이 만족되고, H_2 와 H_∞ 제어를 사용할 수 있게 된다. 특히 H_2 의 경우는 최소화 대상이 LQG의 제어기 부분에 있어서의 성능지수와 같은 의미로 해석될 수 있다. 결과는 그림 4와 5와 같다.

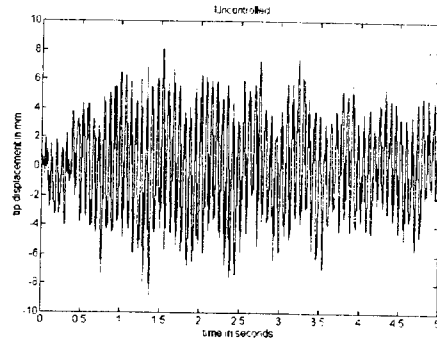


그림 3 모의실험 결과 : Uncontrolled

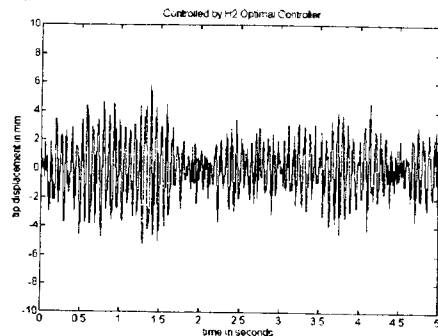


그림 4 모의실험 결과 : H_2 최적제어기

참고문헌

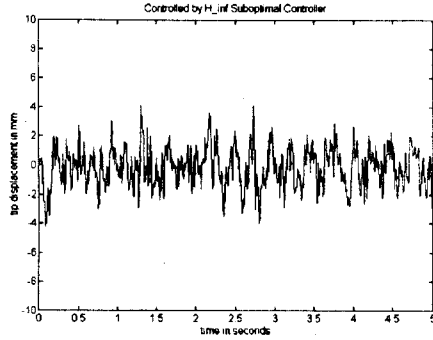


그림 5 모의실험 결과 : H_∞ 준최적 제어기

결과에서 보이는 것과 같이 시간 영역에서의 신호의 감쇠 효과는 거의 비슷한 것으로 나타난다. 이는 두개의 제어기가 모두 최적, 또는 준최적인에 기인하는 것이다. 그러나 H_2 의 경우 H_∞ 에 비하여 고주파 성분이 많이 나타남을 알 수 있다. 이는 서로의 최적화 대상이 식 (1)에서와 같이 다름에 기인하며, 주파수 영역에서 피크값을 줄인다는 H_∞ 제어기의 물리적인 의미와도 상통한다. 즉, H_2 제어기는 신호의 시간영역에서의 오차를 줄이므로, 출력에서 나타나는 고주파의 성분에 영향을 못 미치는 반면, H_∞ 제어기는 전 주파수 영역에 있어서 좋은 성능을 나타낸 것으로 평가된다.

결론

위와 같이 압전소자를 이용한 진동문제를 H_2 와 H_∞ 공간에서의 서로 다른 제어기를 통하여 성능을 비교하여 보았다. 본 논문에서는 기본적인 γ 를 선택하여 설계하였으나, 실제 실험에서는 각 상황에 따른 필터 $W(s)$ 를 설계할 수 있다. 이러한 작업은 제어기의 내부 상태변수를 증가시키는 단점이 있지만, 감도 최소화 문제를 특정 주파수 대역에서 중점을 둔다는 의미로서, 실제 실험에서는 성능 향상을 위하여 필요한 설계이다. 여러가지 필터에 따른 성능들이 현재 연구중에 있으며, 이는 H_∞ 공간에서의 진동문제를 좀더 체계적으로 접근할 수 있는 수단이 될 수 있다.

1. Bailey, T. and J. Hubbard Jr., "Distributed piezoelectric polymer active vibration control of a cantilever beam," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, pp. 605-611, 1985.

2. Crawley, E. and J. Luis, "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 10, pp. 1373-1385, 1986(5?).

3. Baz, A. and S. Poh, "Performance of an active control system with piezoelectric actuators," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, No. 2, pp. 327-343, 1988.

4. Kim, S. and Jones, J. "Effects of piezo-actuator delamination on the performance of active noise and vibration control systems,"

5. Chiang, W. and C. Lee, "Critical active damping control of a flexible slender plate using a distributed modal actuator and sensor," *American Control Conference*, pp. 700-705, 1989.

6. Devasia, S., T. Meressi, B. Paden and E. Bayo, "Piezoelectric actuator for vibration suppression : placement and sizing," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, pp. 859-864, 1993.

7. Doyle, J., K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.

8. Dailey, R., "Lecture notes for H_∞ and μ methods for robust control," *1990 American Control Conference*, pp. 700-705, 1990.

9. Maciejowski, J., *Multivariable feedback design*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.