

## 형상변경에 의한 최적구조변경법

박석주\*,<sup>0</sup> 오창근\*\*

( The Optimum Structure Modification by Shape Changes )

( Sok-Chu Park, Chang-Geun Oh )

### 1. 서론

전자계산기를 이용한 구조물의 정적·동적 해석법이 눈부시게 발달하여 정적·동적 특성을 정도 높게 해석할 수 있게 되었으며, 더 나아가서는 설계 단계에서 구조물의 거동을 비교적 정확하게 예측하는 것이 가능하게 되었다. 유한요소법이 그 대표적인 해석법으로 응용되고 있다. 일반적으로 구조물이 복잡해지면, 해석 결과의 정도를 높이기 위해 요소 분할 수가 증가 되어진다. 결국 자유도가 매우 커지게 되고 컴퓨터의 계산시간과 기억용량이 문제시 된다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 구조물 전체를 여러 개의 단순한 부분구조물로 나누어 해석하는 부분구조합성법이 최근 실용적인 동적 해석 방법으로 이용되고 있다. 일부 구조의 변경시에는 다른 부분의 데이터를 이용할 수 있으므로 모델링의 효율성과 결합부의 특성을 고려할 수 있다는 장점이 있다.<sup>[1][2]</sup> 그러나 유한요소법이나 부분구조합성법을 이용하여 구조물에 대한 정도 높은 해석 결과를 얻더라도 이것만으로도 보다 좋은 특성의 구조물이 제작되는 것은 아니다. 즉, 해석결과만으로는 최적한 구조물을 제작하기 위한 설계변경문제와 구조적 특성에 문제가 있을 경우의 구조변경문제에 대한 명확한 해결책을 제시할 수 없는 것이다. 결국 해석결과를 토대로 설계자의 경험이나 직관 등에 의해 설계를 변경한 후 재해석하여 설계조건을 확인하는 시행착오적인 방법에 의존할 수 밖에 없을 것이다. 이러한 시행착오적인 방법은 엄청난 시간과 경비가 소요되고, 복잡한 구조물에 대해서는 적용하기가 곤란해진다. 이러한 단점을 보완할 수 있는 방법이 감도 해석법이다. 여기에서 감도란, 어떤 특정 부분의

형상이나 치수 등의 설계변수를 바꾸었을 때 해석 결과 값에 미치는 영향의 정도를 나타내는 것이다. 감도 해석법을 이용하면 어느 부분을 변경하는 것이 가장 효과적인지를 알 수 있다. 따라서 이러한 감도해석법을 이용하면 시행착오적인 방법에 비해 시간과 경비를 줄일 수 있고, 구조물의 효율적인 설계변경이나 구조변경이 가능할 것이다.<sup>[2][3]</sup> 감도해석법을 이용한 연구 사례는 많지 않지만 부재의 두께, 단면형상, 기둥 같은 부가부재 등을 이용해 구조변경 내지는 설계변경을 한 연구들이 있다.

본 연구에서는 진동특성을 개선하기 위한 방법으로 구조물이 가지는 공간적인 좌표를 설계변수로 하여 감도를 구하고, 이를 이용하여 구조물의 길이와 높이에 대한 형상을 변경하는 최적구조변경법에 대해 제시하고자 한다. 먼저 모우드합성법을 이용하여 임의의 치수의 L형 구조물의 진동특성을 해석하고, 진동특성을 변경하기 위해 감도해석법으로 변경할 부분의 감도를 구하여 변경할 부분의 변경량을 계산한다. 그리고 변경후 재해석을 통해 결과를 비교함으로써 제시한 방법의 타당성을 고찰하고자 한다.

### 2. 감도해석법과 최적구조변경법

#### 2.1 감도해석법

감도란 구조물의 치수나 재료의 변경 등으로 인한 정적·동적 특성의 변화율을 말한다. 즉 반응값의 설계변수에 대한 미분치로 정의된다. 고유진동수와 고유진동형의 감도를 구하는 많은 방법들이 제안되어 있으나 여기에서는 Fox의 방법<sup>[4]</sup>을 이용하기로 하고, 다음과 같은 운동방정식을 고려한다.

$$(-\omega^2[M] + [K])(X) = (-\lambda[M] + [K])(X) = \{0\} \quad (1)$$

이 고유치 문제의 r차의 고유치  $\lambda_r$ 에 대한 고유진동

\* 한국해양대학교 조선공학과

\*\* 한국해양대학교 대학원

형벡터를  $\{\phi_r\}$ 이라고 두고, 설계변수  $\gamma$ 가  $\gamma_0$ 에서 미소량  $\Delta\gamma$ 만큼 변화해서

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \quad (2)$$

이 되면  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\lambda_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\{\phi_r\}$ 들도 따라서 변화하게 되는데, 설계변수에 대한 1차 미분항만을 고려하면, 이것들은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\begin{aligned} [K] &= [K_0] + \frac{\partial [K]}{\partial \gamma} \cdot \Delta\gamma = [K_0] + [K'] \Delta\gamma \\ [M] &= [M_0] + [M'] \Delta\gamma \\ \omega_r &= \omega_{0r} + \omega_r' \Delta\gamma \\ \lambda_r &= \lambda_{0r} + \lambda_r' \Delta\gamma \\ \{\phi_r\} &= \{\phi_{0r}\} + \{\phi_r'\} \Delta\gamma \end{aligned} \quad (3)$$

또,  $\lambda_r = \omega_r^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lambda_r' &= 2 \omega_r \omega_r' \\ \omega_r' &= \lambda_r' / 2 \omega_r \end{aligned} \quad (4)$$

이 되고, 따라서 고유진동수의 감도는 고유치의 감도에 의하여 구할 수 있게 된다.

중간 과정을 생략하고 고유치의 감도와 고유진동형의 감도를 나타내면 다음과 같다.

$$\lambda_r' = \{\phi_{0r}\}^T ([K'] - \lambda_{0r} [M']) \{\phi_{0r}\} \quad (5)$$

$$\{\phi_r'\} = [\phi_0] \{\xi\} \quad (6)$$

단 여기에서

$$\xi_s = \frac{\{\phi_{0s}\}^T (\lambda_{0s} [M'] - [K']) \{\phi_{0r}\}}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \quad ; s \neq r \quad (7)$$

$$\xi_{s=r} = \frac{-\{\phi_{0r}\}^T [M'] \{\phi_{0r}\}}{2} \quad (8)$$

이다. 식(7)과 식(8)를 식(6)에 대입하면 고유진동형의 감도를 구할 수 있게 된다. 이 고유진동형의 감도도  $[K']$ ,  $[M']$ ,  $\lambda_{0r}$ ,  $[\phi_0]$ 에 의하여 표시됨을 알 수 있다. 여기서 주의해야 할 점은, 식(6)이 성립하는 경우는  $[\phi_0]$ 가 정칙행렬이어야 한다는 점이다. 즉, 진 자유도에 대해 상호 독립인 고유진동형이 구해졌을 때에만 유효하다는 것을 말한다. 그러나, 실제의 경우 대자유도의 모든 고유치와 고유벡터를 구하는 일은 거의 없고, 따라서 식(6)이 성립하지 않게 된다. 그러나, 식(7)에서  $\lambda_{0s}$ 가  $\lambda_{0r}$ 에 비하여 훨씬 클 경우  $\xi_s$ 가 작게 되어 무시할 수 있게 되고, 따라서  $s$ 차 이상의 고유진동형은 구하지 않아도 되는 것을 알 수 있다.

$$\lambda_{0s} \gg \lambda_{0r}$$

$$\xi_s \approx 0 \quad (9)$$

즉, 모든 자유도의 고유진동형을 구하지 않고 주목하는 고유진동수부터 상당히 높은 고유진동수까지에 대한 고유진동형만을 구하여 쓰면 실용상 문제가 없다는 것을 의미한다. 또한 식(3)은 1차 미분항을 고려하였으므로 식(3)에서 얻어진 값들은 어차피 근사값이 될 수 밖에 없고, 비록 식(6)에서 많은 자유도를 채용하여도 큰 의미가 없는 것이다. 따라서 원하는 목표값을 얻기 위해서는 얻어진 변경량을 가지고 고유치 해석을 다시 하여 목표값에 도달했는지를 확인하는 반복과정을 거쳐서 최종의 설계량을 결정해야 할 것이다.

## 2.2 최적구조변경법

설명을 간단히 하기 위하여 감도행렬을  $[A]$ , 설계변경을 하고자 하는 장소의 설계변경량을  $\{\Delta\gamma\}$ , 변경하고자 하는 목표값과 현재값과의 차를  $\{\Delta\omega\}$ 라 하면, 이의 최적화 문제는

$$[A] \{\Delta\gamma\} = \{\Delta\omega\} \quad (10)$$

로 나타낼 수 있다. 이 식은 1차 방정식을 나타내고 있지만, 감도행렬  $[A]$ 가 일반적으로 정방행렬이 아니므로 최소자승해를 구하는 문제이다.

먼저 구하는 미지수 즉, 변경하고자 하는 변경량의 수가 방정식의 개수보다 작은 경우는 다음과 같은  $S$ 를 최소로 하는 최소자승해를 구하면 된다.

$$S = \|[A] \{\Delta\gamma\} - \{\Delta\omega\}\| \quad (11)$$

그러나, 일반적으로 구조변경의 문제는 위와는 달리 구하고자 하는 변경량의 개수가 방정식의 개수보다 많은 것이 특징이다. 예를 들면, 몇 개의 고유진동수를 특정 고유진동수로 변경시키고자 할 때, 변경할 수 있는 요소의 수는 수십 개에서 수백 개에 이르는 경우 등이다. 이 경우에는 무수히 많은 해를 가지게 되나 다음과 같은  $S$ 를 최소로 하는 제약을 가하면 해가 일의적으로 결정된다.

$$S = \{\Delta\gamma\}^T \{\Delta\gamma\} \quad (12)$$

이러한 경우를 의사최소자승법(pseudo least square method)의 문제라 부른다. 여기에서 행렬  $[A]$ 가 독립성을 가지고 있으면 이의 해는 다음과 같이 간단히 구해질 수 있다.

$$\{\Delta\gamma\} = [A]^T ([A][A]^T)^{-1} \{\Delta\omega\} \quad (13)$$

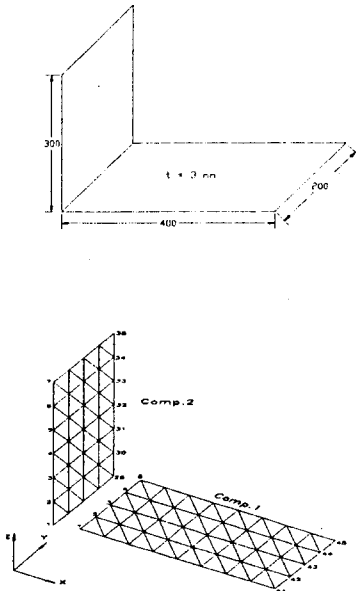
그러나, 위관 등과 같이 대칭구조물은 감도벡터가

같은 값을 가지는 경우가 생길 수 있다. 즉 감도의 대칭성이 존재하는 수가 있다. 바꾸어 말하면, 행렬  $([A][A]^T)$ 의 역행렬이 존재하지 않게 되어 이 문제를 푸는 것은 간단하지 않고 식(10)에 제약조건인 식(12)을 직접 부가하여 풀거나, 식(13)에서  $([A][A]^T)$ 의 일반 역행렬을 구하여 풀면 된다.<sup>[5]</sup>

### 3. L형 구조물의 진동해석 및 최적구조변경

#### 3.1 모우드 합성법에 의한 진동해석

본 연구에서 사용한 L형 구조물은 Fig.1과 같은 길이 400mm, 높이 300mm, 폭 200mm의 해석적인 모델이다. 이 모델은 실제 구조물의 일부로 간주해도 좋을 것이다. 모우드 합성법을 이용하기 위해 전체 구조물을 Fig.2와 같이 2개의 부분구조로 나누어 모델링하고 해석하였다. 모우드 합성법으로 해석한 이 모델의 진동 형태는 Fig.3과 Fig.4에서 나타난 것과 같이 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 즉, 수평판의 굽힘 진동형 진폭이 큰 진동형태와 수직판의 굽힘 진동형 진폭이 큰 진동형태로 나눌 수 있다.



#### 3.2 감도해석 및 최적구조변경

본 연구에서는 해석한 구조물의 고유진동수 중 굽힘 1차 진동형인 87.27Hz를 구조물의 길이와 높이에 대한 형상을 변경함으로써 80Hz로 바꾸는 구조변경을 제시하고자 한다. 먼저 수평판과 수직판의 끝단의 절점들을 변경할 위치로 선택하였다. 또한 이 절점들의 길이 방향의 좌표를 설계변수로 하였고 감도해석법을 통해 이들 절점들의 길이 방향 좌표에 대한 고유진동수 감도를 구하였다. 이렇게 구한 감도를 이용하면 각각의 절점에 대한 변경량을 구할 수 있는데, 본 연구에서는 수평판만 변경할 경우, 수직판만 변경할 경우, 그리고 양쪽 판 모두를 변경할 경우의 세 가지 경우로 나누어서 구조변경을 실시하였다. Table 1은 수평판만 변경한 경우와 수직판만 변경한 경우의 각 판들의 감도와 변경량을 나타내고 있다. 수평판의 감도가 수직판의 감도보다 크울 알 수 있다. 바꾸려 했던 고유진동수 87.27 Hz에 해당되는 고유진동형은 수평판의 진동진폭이 수직판과 비교해 볼 때 크게 나타난다. 이것은 진동형 진폭이 큰 수평판이 감도가 진동형 진폭이 작은 수직판의 감도보다 더 큰 것을 의미한다.

Table 2는 양쪽판 모두를 변경한 경우의 감도와 변경량을 보여주고 있다.

#### 3.3 구조변경후의 고찰

본 절에서는 앞절에 구해진 변경량을 이용하여 모우드합성법으로 재해석(re-analysis)을 수행한 결과를 고찰하고자 한다. Table 1과 Table 2에서 알 수 있듯이 재해석 결과, 변경된 고유진동수는 각각의 세 경우에 대해서 79.98Hz, 80.27Hz, 80.01Hz로 처음 목표했던 값에 거의 일치하고 있으며, 이는 3회 내지 4회의 반복 계산을 통해 얻을 수 있었다. Fig.5와 Fig.6은 구조변경전과 각각의 경우에 대한 구조변경후의 전달함수의 변이를 보여주고 있다. Fig.5는 1번 분계의 23번 절점을 가진했을 때 같은 집에서의 전달함수이고, Fig.6은 같은 가진상태에서 2번 분계 20번 절점에서의 전달함수이다. 구조변경전의 87.27Hz에서의 공진점이 모든 경우에 대해 80Hz로 옮겨진 것을 알 수 있다. Fig.7은 구조변경후의 각각의 경우에 대한 판들의 변경된 형상을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 완전한 대칭은 아니지만 비교적 대칭적인 형상을 이루고 있음을 알 수 있다. 이는 처음에 구한 감도의 오차가 반복계산을 통해 누적된 것으로 사료된다. 그리고 Fig.3과 Fig.4에는 구조변경전과 구조변경후의

고유진동수와 고유진동형의 변화를 같은 진동형의 그룹으로 나타내었다. 그룹 1은 수직판의 진동형 진폭이 큰 진동형의 집단이고, 그룹 2는 수평판의 진동형 진폭이 큰 진동형의 집단이다. 어떤 그룹이든 고유진동형에는 거의 변화가 없다. 이는 변경할 위치의 변경량이 비교적 잘 산출된 것을 의미한다. 이 결과를 보다 구체적으로 고찰하기 위해서 Table 3에 이들의 대비표를 나타내었다.

그룹 1의 경우에서, 수평판만 변경한 경우에는 고유진동수가 거의 변화가 없다. 이 그룹은 수직판의 진동형 진폭이 큰 집단이므로 수평판의 변화가 전체 고유진동수에 크게 영향을 주지 못했을 것이다. 수직판만 변경한 경우에는 고유진동수에 커다란 변화가 있음을 알 수 있다. 이것은 변화된 질량과 강성이 고유진동수에 크게 영향을 준 것을 의미한다. 양쪽판 모두를 변경한 경우에도 아주 작은 변화이지만 고유진동수에 변화가 있음을 알 수 있다. 이것은 수평판의 변경량은 크지만 수직판의 변경량이 작으므로 당연히 고유진동수에 적은 영향을 미쳤을 것이다.

그룹 2의 경우에서, 수평판만 변경한 경우에는 앞에서 언급한 그룹 1과 달리 커다란 변화가 있다. 이 그룹은 수평판의 진폭이 큰 집단이므로 수평판의 변화된 질량과 강성이 고유진동수에 크게 영향을 미침을 알 수 있다. 수직판만 변경한 경우에는 그룹 1과 달리 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 이것은 진동형 진폭이 작은 수직판만 변경한 것이므로 고유진동수에는 별 영향을 미치지 못했을 것이다. 양쪽 모두를 변경한 경우에는 고유진동수의 변화가 수평판만 변경한 경우보다는 작지만 여전히 크게 변화된 것을 알 수 있다. 변경량이 수평판만 변경한 경우보다 수평판의 변경량이 작으므로 당연한 결과라고 하겠다.

이상에서 살펴 보았듯이 고유진동수를 바꾸려면, 바꾸려고 하는 고유진동수의 상대적인 진동형 진폭이 큰 부분을 변경하는 것이 효과적이라는 결론을 얻을 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 L형 구조물의 형상변경에 의한 최적 구조변경법에 대해 고찰해 보았고, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 감도해석법을 이용해 변경할 위치들의 고유진동수 감도를 쉽게 구할 수 있다.

2. 최적구조변경법에 의해 변경량을 정량적으로 구할 수 있고, 고유진동수를 목표한 값으로 쉽게 바꿀 수 있다.
3. 원래의 고유진동형에 거의 영향을 주지 않고 구조변경을 할 수 있어서, 구조변경으로 인한 또 다른 진동문제를 야기시키지 않고 효과적으로 진동문제를 치유할 수 있을 것이다.
4. 본 연구를 위해 개발된 program은 차분법이 아닌 직접 미분법에 의해서 감도를 계산하므로 계산 절차나 시간 등이 크게 절약되었다.

본 연구에서는 구조물의 길이와 높이에 대한 형상을 변경하여 고유진동수를 바꾸는 구조변경만을 하였지만, 고유진동수를 변경하는 방법과 고유진동형을 변경하는 방법을 병행하게 되면 더욱 효과적인 구조변경이 가능할 것이다.

#### 참 고 문 헌

- [1] 大熊, 1986, "部分構造合成法による振動解析", 博士學位論文, 日本東京工業大學
- [2] 朴錫柱, 長松召男, 1990, "프레스 機械의 振動解析과 動特性的 最適化", 韓國船用機關學會誌, 第14卷, 第3號, p.34
- [3] 박석주, 왕지식, 1992, "감도해석법에 의한 구조물의 결합부 강성 산출에 관한 연구," 韓國船用機關學會誌, 第16卷, 第5號, p.60.
- [4] R.L.Fox, 1968, "Rates of Changes of Eigen Values and Eigen Vectors," AIAA J., Vol.6, No.12, p.2426
- [5] 柳井晴夫, 竹内 啓, 1983, "射影行列, 一般行列, 特異値 分解," 東京大學出版會, p.65

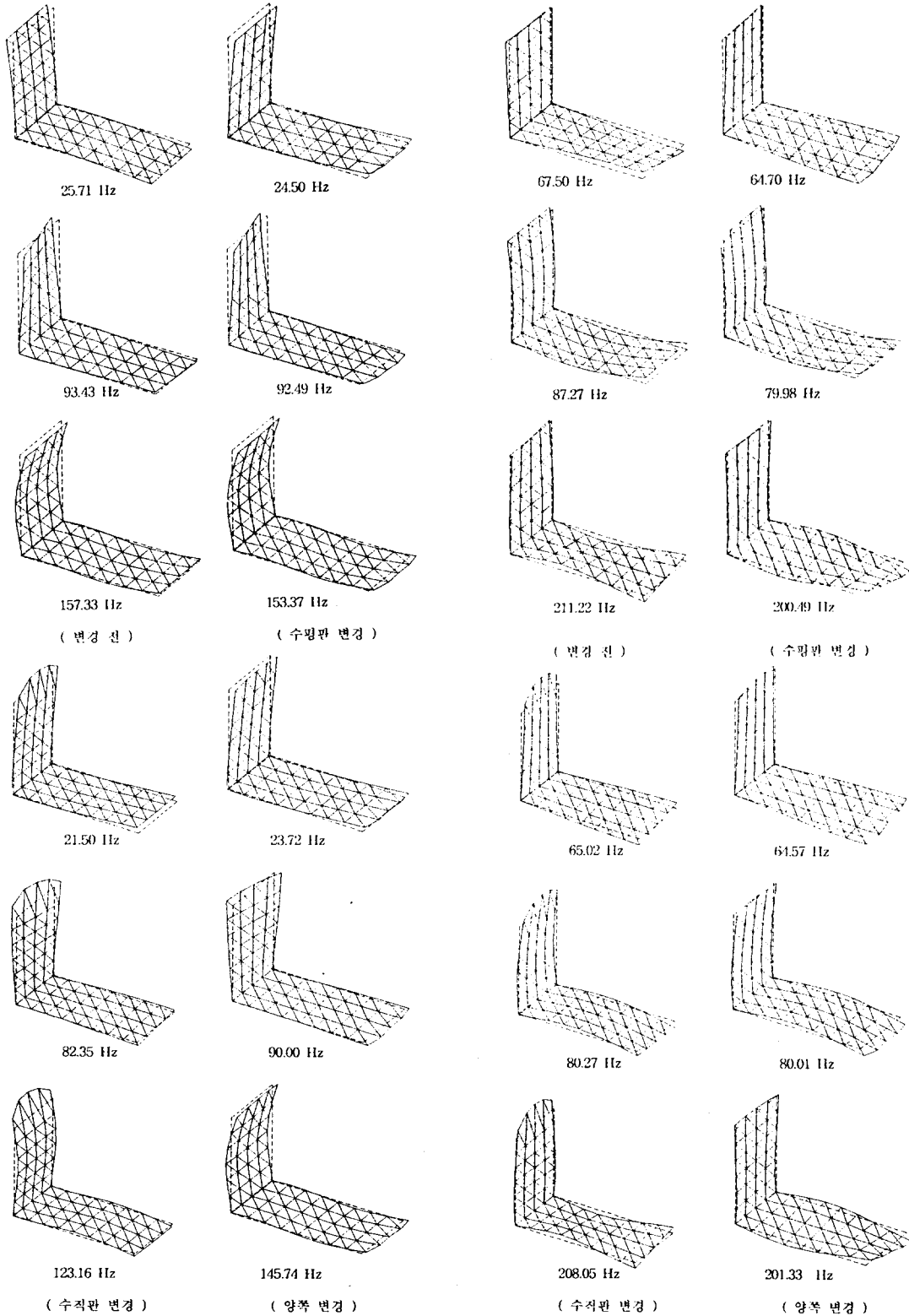


Fig. 3 Group 1 : Natural modes with larger amplitude in vertical plate

Fig. 4 Group 2 : Natural modes with larger amplitude in horizontal plate

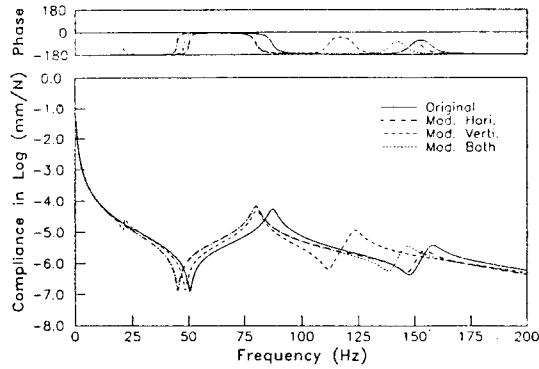


Fig. 5 Comparison of original and modified compliances(1/2)

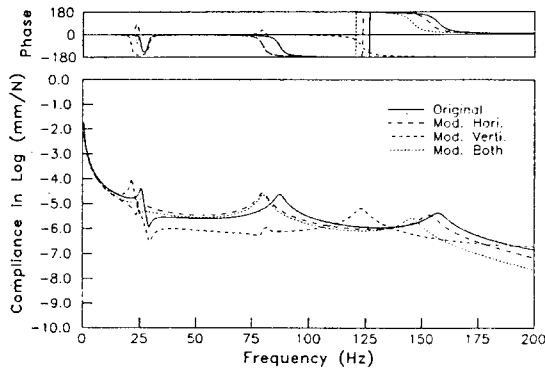


Fig. 6 Comparison of original and modified compliances(2/2)

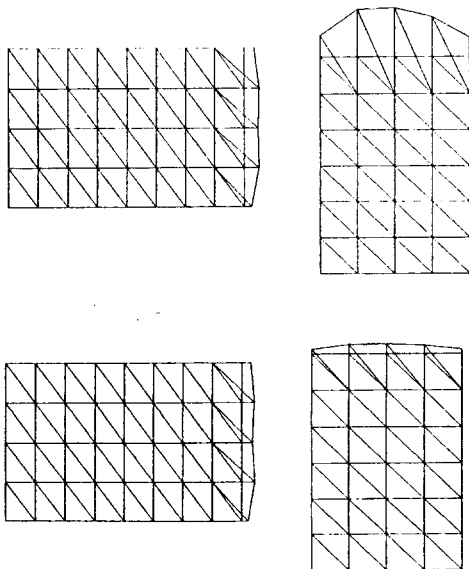


Fig. 7 The shape of plates after modification of horizontal, vertical and both plate

Table 1 The sensitivities and change quantities in the case of only horizontal and only vertical plate modification

No. comp.	N. P.	1st calculation		2nd calculation		Total changes(mm) (4th Iter.)
		sensitivity	$\Delta\gamma$ (mm)	sensitivity	$\Delta\gamma$ (mm)	
1	41	-0.2792E-01	13.61	-0.1268E-01	-0.81	12.66
	42	-0.5937E-01	28.94	-0.3928E-01	-2.50	25.05
	43	-0.6186E-01	30.16	-0.1040E-00	-6.62	23.41
	44	-0.6055E-01	29.51	-0.5236E-01	-3.35	25.15
	45	-0.2957E-01	14.41	-0.2474E-01	1.56	16.21
Natural Freq.		78.81(Hz)		79.78(Hz)		79.98(Hz)
2	7	-0.1638E-01	23.42	-0.2289E-01	3.64	28.96
	14	-0.3591E-01	51.32	-0.5161E-01	9.00	64.34
	21	-0.3764E-01	53.80	-0.6268E-01	9.96	66.61
	28	-0.3275E-01	46.81	-0.3628E-01	5.77	54.60
	35	-0.1653E-01	23.66	-0.1237E-01	1.97	26.51
Natural Freq.		81.71(Hz)		80.64(Hz)		80.27(Hz)

Table 2 The sensitivities and change quantities in the case of horizontal and vertical plate modification

No. comp.	N. P.	1st calculation		2nd calculation		Total changes(mm) (3th Iter.)
		sensitivity	$\Delta\gamma$ (mm)	sensitivity	$\Delta\gamma$ (mm)	
1	41	-0.2793E-01	11.94	-0.1374E-01	-1.12	10.77
	42	-0.5937E-01	25.38	-0.4017E-01	-3.27	21.76
	43	-0.6186E-01	26.45	-0.1025E-00	-8.33	17.86
	44	-0.6054E-01	25.89	-0.5014E-01	-4.08	21.25
	45	-0.2957E-01	12.64	-0.2462E-01	2.00	14.75
2	7	-0.1638E-01	7.00	-0.1256E-01	-1.02	5.94
	14	-0.3763E-01	15.35	-0.3147E-01	-2.56	12.68
	21	-0.3591E-01	16.09	-0.3239E-01	-2.63	13.35
	28	-0.3275E-01	14.00	-0.2951E-01	-2.40	11.50
	35	-0.1652E-01	3.07	-0.1444E-01	-1.17	5.84
Natural Freq.		78.48(Hz)		79.91(Hz)		80.01(Hz)

Table 3 The change of natural frequency by structural modification

Group	Order	Original (Hz)	Modi. Hori. Plate (Hz)	Modi. Verti. Plate (Hz)	Modi. Both Plate (Hz)
1	1	25.71	24.50	21.50	23.72
	2	93.43	92.49	82.35	90.00
	3	157.33	153.37	123.16	145.74
2	1	67.50	64.70	65.02	64.57
	2	87.27	79.98	80.27	80.01
	3	211.22	200.49	208.05	201.33