

결합부가 있는 복합 구조물의 동적 해석

이 재 운*, 오고 강 호**, 이 수 일**, 이 장 무***

(A Dynamic Analysis of Complex Structures with Joints)

(Jae Woon Lee, Kang Ho Ko, Soo Il Lee and Jang Moo Lee)

ABSTRACT

본 논문에서는 여러가지 형태의 결합부에 적용할 수 있는 일반적인 모델링 기법에 대하여 기술하였다. 기존의 해석방법은 특정한 결합부에만 적용이 가능하고 유한요소해석과 실험이 상호 보완적인 관계를 가진 형태의 해석방법이므로 실험이 불가능한 경우에 대해서는 적용하기 어려운 경우도 있다. 본 논문에서는 별도의 실험을 수행하지 않고 결합부 영역만을 상세하게 유한요소 모델링을 하여서 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬(Flexibility Matrix)을 구하여 결합부의 특성을 구하는 일반적 모델링 기법을 제시하였다. 이 방법은 수치적으로 축약할 수 없는 모델-결합부가 접촉면(Contact Surface)을 가지고 있는 구조물-을 효과적으로 축약할 수 있는 장점이 있다. 또한 모델링되는 결합부의 경계조건의 영향을 배제할 수 있으며 결합부에 존재하는 비선형성도 적정범위내에서 선형화할 수 있다. 제시한 일반적 모델링 기법을 나사 결합부, 접착제 결합부(Glued Joints), 볼트 결합부에 적용하여 결합부의 특성을 구하였으며 실험을 통하여 제시한 해석방법의 타당성을 검증하였다.

지금까지 결합부를 가진 구조물에 대한 많은 연구가 수행되어 왔다.^[1,2,3] 그러나 대부분 정적인 문제를 해석하거나 유한요소 해석과 실험이 결합된 형태의 해석이 주종을 이루었다.^[4,5] 근래에 와서는 임의의 결합부에 대한 일반적인 해석방법이 관심의 초점이 되고 있다. 결합부는 나사나 볼트 또는 접착제에 의하여 결합되기 때문에 접촉면을 포함하게 된다. 이러한 접촉면은 유한요소 모델에서 접촉요소(Contact Elements)를 사용하거나 강결합된 것으로 가정하여 모델링된다. 그러나 접촉요소로 모델링된 해석 모델에서는 축약된 강성행렬과 질량행렬을 구할 수 없으므로 동적 해석을 할 수 없는 문제점이 있다.

본 논문에서는 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬의 역행렬은 Guyan의 정축약 이론에 의하여 축약된 강성행렬과 같음을 보였다. 그리고 강성 행렬은 접촉요소를 포함한 모델에서 유연성 행렬을 구한 뒤, 역행렬을 구하여 선택된 자유도로 축약된 행렬을 구하였으며 질량행렬은 강결합된 모델이나 접촉요소를 포함한 모델이 서로 같기 때문에 강결합된 모델에서 선택된 자유도로 정축약하여 구하였다.

1. 서론

결합부가 있는 구조물에서 결합부는 전체 구조물의 특성에 중요한 영향을 미치게 된다. 그러므로 기계구조물의 동적 특성을 정확하게 해석하기 위해서는 결합부의 특성을 정확하게 해석하는 것이 필수적이다. 정확도를 요구하지 않는 구조물에 대해서는 결합부를 강결합된 것으로 가정하거나 단순화된 모델을 사용하여 해석하지만 항공기나 로켓같은 고정밀도를 요구하는 복합 구조물은 정확한 결합부 특성이 필요하다.

2. 이론

2.1 유연성 행렬과 정축약

구조물에 외력 $\{F\}$ 가 가해졌을 때 변위 $\{u\}$ 는 다음 관계식으로 표현된다.

$$\{u\} = [a]\{F\} \quad (1)$$

여기서 $[a]$ 는 유연성 행렬로써 j 자유도에 단위하중이 가해졌을 때 i 자유도에서의 변형량을 의미하는 영향계수인 a_{ij} 로 구성된 행렬이다. 이 행렬은 선형계에서는 대칭행렬이 되고 강성행렬의 역행렬과 같다.^[6]

* 현대정공주식회사
** 서울대학교 대학원 기계설계학과
*** 서울대학교 기계설계학과

$$[K]=[a]^{-1} \quad (2)$$

결합부를 포함한 구조물을 해석할 때, 결합부의 형상을 상세하게 모델링하면 결합부 모델의 자유도가 매우 커지게 되어 결합부 모델을 전체구조의 해석에 적용하기가 매우 어렵게 된다. 따라서 상세하게 모델링된 결합부를 축약과정을 통하여 자유도가 줄어든 모델을 사용하는 것이 매우 효율적이다. 전체 자유도에서 선택되는 자유도를 $\{u_s\}$, 생략되는 자유도를 $\{u_o\}$ 로 구분하여 식(1)을 정리하면 식(3)이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{so} \\ a_{os} & a_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ F_o \end{Bmatrix} \quad (3)$$

그리고 식(2)는 식(4)와 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{so} \\ K_{os} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{so} \\ a_{os} & a_{oo} \end{bmatrix} = [I] \quad (4)$$

식(4)를 정리하면 다음과 같다.

$$[K_{ss}][a_{ss}] + [K_{so}][a_{os}] = [I] \quad (5)$$

$$[K_{os}][a_{ss}] + [K_{oo}][a_{os}] = [0] \quad (6)$$

식(6)에서

$$[a_{os}] = -[K_{oo}]^{-1}[K_{os}][a_{ss}] \quad (7)$$

이고 식(5)에 대입하면 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬의 역행렬을 구할 수 있다.

$$[a_{ss}]^{-1} = [K_{ss}] - [K_{so}][K_{oo}]^{-1}[K_{os}] \quad (8)$$

한편, Guyan의 정축약 이론에 의하여 축약된 강성행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^[7]

$$[K] = [K_{ss}] - [K_{so}][K_{oo}]^{-1}[K_{os}] \quad (9)$$

식(8)과 식(9)에 의하여 유연성 행렬의 역행렬은 Guyan의 정축약이론에 의한 축약된 강성행렬과 같음을 알 수 있다. 즉 Guyan의 정축약이론으로 축약할 수 없는 모델을 유연성 행렬의 역행렬로서 자유도를 축약할 수 있다는 것을 의미한다. 대부분의 결합부는 접촉면을 가지고 있으므로 접촉요소(contact element)로서 모델링 할 경우 정축약이론으로는 축약이 불가능하므로 유연성 행렬의 역행렬을 이용하면 매우 효과적임을 알 수 있다.

상세 유한요소 모델에서 유연성 행렬을 구할 때 모델의 일부 자유도가 구속되어 있지 않으면 힘을 가하

었을 때 강제 변위가 발생하기 때문에 유연성 행렬을 구할 수가 없게 된다. 즉 선택된 자유도의 일부를 구속하고, 구속하지 않은 자유도에 대한 유연성 행렬을 구성한 후, 반대로 하여 나머지 자유도에 대한 유연성 행렬을 구하여야 한다.

구속된 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_b\}$, 구속되지 않은 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_c\}$ 로 정의하면 선택된 자유도에 대한 변위 벡터 $\{u_s\}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{u_s\} = \begin{Bmatrix} u_b \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (10)$$

이때 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬과 강성행렬은

$$[a_{ss}] = \begin{bmatrix} a_{bb} & a_{bc} \\ a_{cb} & a_{cc} \end{bmatrix}, [K_{ss}] = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \quad (11)$$

으로 표현할 수 있으며 $[a_{cc}]$ 는 $\{u_b\}$ 를 구속했을 때의 $\{u_c\}$ 의 유연성 행렬이다. 이 유연성 행렬로부터 강성행렬을 다음 식으로 구할 수 있다.

$$[K_{cc}] = [a_{cc}]^{-1} \quad (12)$$

여기에서 강성영향계수 K_{ij} 는 j 자유도에 단위변위가 발생될 때 i 자유도를 고정하기 위한 힘으로 정의된다. 따라서 $[K_{bc}]$ 는 c 자유도에 단위변위가 발생될 때 고정된 b 자유도에서 반력을 계산하여 구할 수 있다. $[K_{cc}]$ 와 $[K_{cb}]$ 는 구속된 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_c\}$, 구속되지 않은 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_b\}$ 로 정의하여 같은 방법으로 구할 수 있다.

3. 적용

3.1 나사 결합부(Screwed Joints)

Fig.1과 같이 직경이 서로 다른 2개의 로드(Rod)가 나사 결합되어 있는 구조물에 대하여 앞에서 제시한 일반적인 모델링 기법을 적용하여 길이방향의 고유진동수와 고유모드를 구하였다. 결합부가 축대칭이므로 Fig.2와 같이 결합부의 4분의 1만을 상세 모델링하여 적당한 경계조건을 주었으며 나사와 나사 사이에는 접촉요소(Contact Elements)를 사용하였다. Fig.3에 나타나 있는 것과 같이 선택된 자유도는 결합부의 두 끝점이며 Fig.4는 2번 자유도를 고정하고 1번 자유도에 축방향으로 하중을 가하였을 때의 변형된 모습이다. 그리고 Fig.5는 접촉면의 마찰계수에 따른 변형량을 나타내고 있는데 마찰계수가 0.25~0.425범위에서는 선형적으

로 변함을 알 수 있다. Table 1은 $\mu=0.3$ 일 때와 강결합일 때의 영향계수와 강성을 나타낸다.

Table 1 Flexibility and stiffness influence coefficients

	$\mu=0.3$	rigidly joined
flexibility(m/N)	3.9451×10^{-9}	2.6092×10^{-9}
stiffness(N/m)	2.5348×10^8	3.8326×10^8

이 때 선택된 두 자유도에 대한 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K]_{\mu=0.3} = \begin{bmatrix} 2.5348 \times 10^8 & -2.5348 \times 10^8 \\ -2.5348 \times 10^8 & 2.5348 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[K]_{rigid} = \begin{bmatrix} 3.8326 \times 10^8 & -3.8326 \times 10^8 \\ -3.8326 \times 10^8 & 3.8326 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

그리고 질량행렬은 강결합일 때의 모델에서 정축약을 이용하여 선택된 자유도를 축약시켜 구하였다. 이 결합부의 특성행렬을 이용하여 축방향의 고유진동수와 고유모드를 구하였다. Table 2에 $\mu=0.3$ 일 때와 강결합일 때의 고유진동수를 비교하여 나타내었다. Table 2에서와 같이 첫번째 모드에서 차이가 가장 크게 나타났는데 결합부 영역에서의 변형량이 큰 모드일수록 오차가 많이 발생함을 알 수 있다. 두번째 모드는 결합부 영역에서는 축방향으로의 변형량이 거의 없는 모드형태이므로 상대오차가 적게 발생하였다. 이와 같이 결합부의 특성이 전체 구조물의 특성에 많은 영향을 주므로 정확한 결합부 특성의 규명이 필요함을 알 수 있다.

Table 2 A comparison of natural frequencies(Hz)

mode	$\mu=0.3$	rigidly joined	difference
1	9796.9	11150.5	13.8%
2	26188.3	26526.4	1.3%
3	30492.6	32012.1	5.0%

Fig.6은 축의 길이방향의 변위를 축의 수직방향으로 나타낸 모드 형상이다.

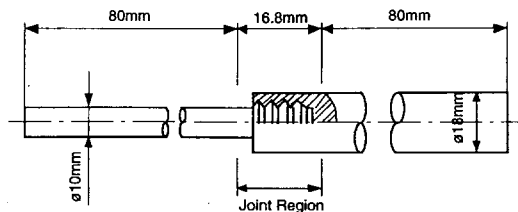
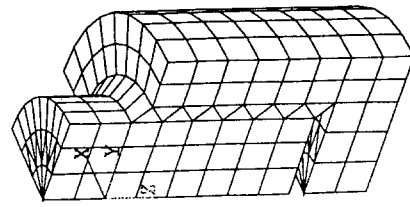
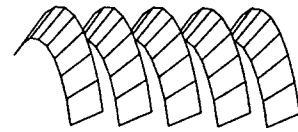


Fig.1 Dimensions of the structure with screwed joint



(a) a quarter model



(b) contact elements

Fig.2 Detailed FE model of screwed joint

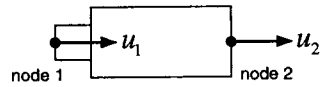


Fig.3 Retained DOFs of screwed joint

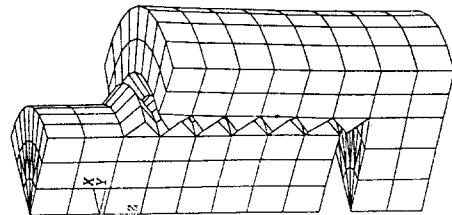


Fig.4 Deformed shape of joint due to axial force

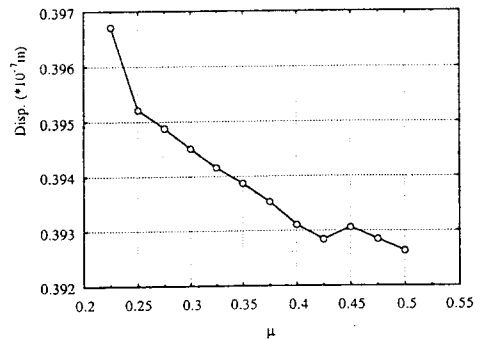


Fig.5 Effects of friction coefficient on displacements

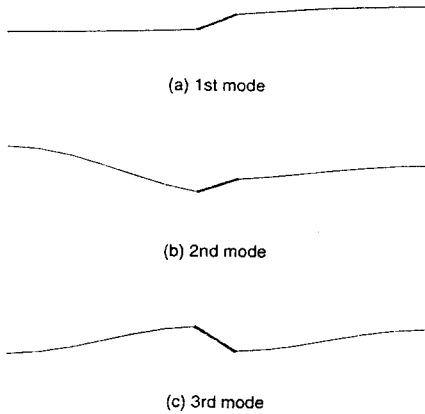


Fig.6 Mode shapes of structure

3.2 볼트 결합부(Bolted Joint)

Fig.7과 같이 두개의 plate가 볼트에 의해 체결된 모델에 대하여 일반적인 모델링 기법을 적용하여 굽힘 모드형상과 그에 따른 고유진동수를 구하였다. Fig.8과 같이 결합부가 대칭이므로 2분의 1만을 상세 모델링 하였으며 접촉면이 있는 부분-평판과 평판 사이, 볼트와 너트의 나사 부분, 볼트머리와 평판이 접하는 부분, 너트와 평판이 접하는 부분-은 결합요소를 사용하였다. 선택된 자유도는 Fig.9와 같이 결합부 양끝점의 4개로 정하였다. Fig.10은 노드 1의 모든 자유도를 구속시키고 노드 2에 하중을 가하였을 때의 변형된 모습이다. 이렇게해서 구한 영향계수를 Table 3에 나타내었다.

Table 3 Flexibility influence coefficient(m=0.3)

Load	u_3 (m)	u_4 (rad)
F_3 (N)	3.3832×10^{-7} m	1.0206×10^{-5} rad
F_4 (Nm)	1.0206×10^{-5} m	4.2796×10^{-4} rad

이 유연성 행렬로 강성행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0536 \times 10^7 & -2.5127 \times 10^5 \\ -2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이 되며 같은 방법으로 노드 2의 모든 자유도를 구속시키고 노드 1에 대한 유연성 행렬을 구하여 강성행렬을 구하면 다음과 같다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0537 \times 10^7 & 2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

구한 두 행렬과 힘평형관계를 이용하면 선택된 4개의

자유도에 대한 강성행렬을 구할 수 있다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0357 \times 10^7 & 2.5127 \times 10^5 & -1.0536 \times 10^5 & 2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 & -2.5127 \times 10^5 & 4.1645 \times 10^5 \\ -1.0536 \times 10^5 & -2.5127 \times 10^5 & 1.0536 \times 10^7 & -2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 4.1645 \times 10^5 & -2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

결합부의 질량행렬은 정축약하여 구하였고 결합부 이외의 구조물은 보 요소로 모델링하여 전체 구조물에 대한 고유해석을 수행하였다. 이 결과를 모드실험으로 구한 고유진동수와 결합부를 강결합으로 가정하였을 때의 고유진동수와 비교하여 Table 4에 나타내었다.

Table 4 A comparison of natural frequencies(Hz)

	experiment	proposed method	rigidly joined
1	98.3	98.5	110.8
2	280.6	282.0	283.3
3	524.0	523.5	583.7
4	895.0	894.3	907.5

유연성 행렬을 이용하여 구한 고유진동수와 모드실험으로 구한 고유진동수가 잘 일치함을 알 수 있다. 각 경우의 모드형상을 Fig.11에 나타내었다.

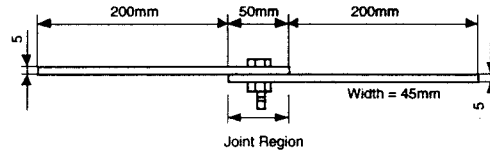
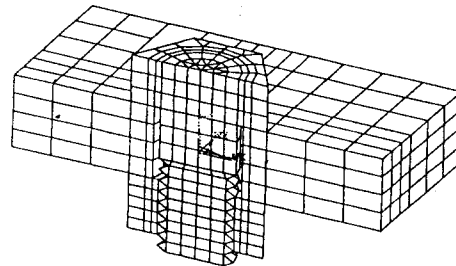
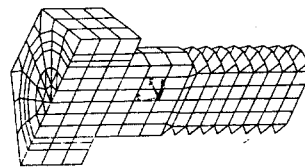


Fig.7 Dimensions of the structure with bolted joint



(a) a half model



(b) bolt

Fig.8 Detailed FE model of the structure

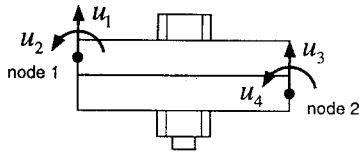


Fig.9 Retained DOFs of bolted joint

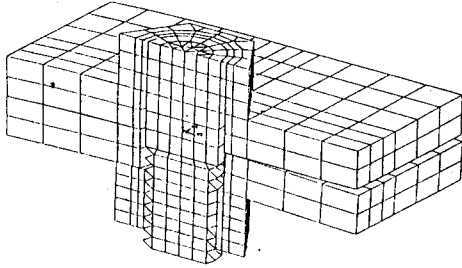


Fig.10 Deformed shape of joint due to loading

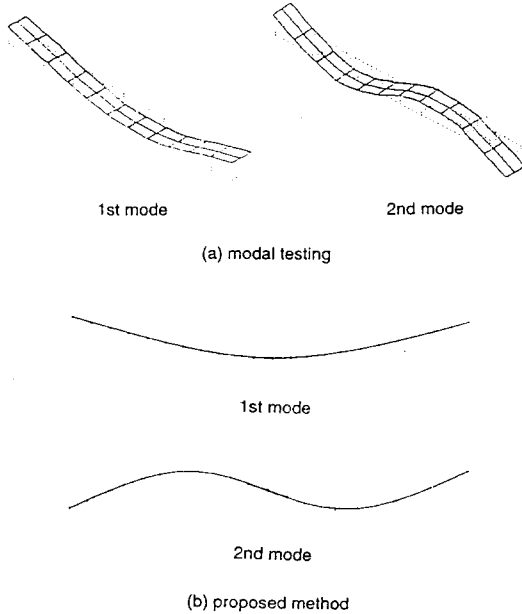


Fig.11 Mode shapes of the structure

3.3 접착제 결합부(Bonded Joints)

Fig.12와 같이 두개의 평판이 접착제에 의하여 결합되어 있는 구조물에 대하여 볼트 결합부와 같이 굽힘 모드와 고유진동수를 구하였다. 접착제는 고분자 화합물로 제조한 원형 봉 형상의 고체상태의 물질로 열을 가하여 녹인 후 접착부위에 바른후 냉각시키면 결합이 일어나게 된다. 접착제의 Young's Modulus는 인장시험을 통하여 측정하였고 물성치는 Table 5에 나타내었다.

Table 5 Material properties of glue

Young's Modulus(N/m ²)	mass density(kg/m ³)	poisson ratio
3.266x10 ⁷	1112.3	0.45

결합부는 Fig.13과 같이 상세 모델링하였으며 선택된 자유도는 Fig.14와 같이 결합부 양 끝점의 4개로 정하였다. 노드 1의 자유도를 모두 구속하고 노드 2에 힙 하중과 모멘트를 각각 가하여 구한 영향계수를 Table 6에 나타내었다.

Table 6 Flexibility influence coefficient

Load	u ₃ (m)	u ₄ (rad)
F ₃ (N)	6.3235x10 ⁻⁷ m	2.59646x10 ⁻⁵ rad
F ₄ (Nm)	2.59646x10 ⁻⁶ m	1.29372x10 ⁻³ rad

Fig.15은 노드 1을 구속하고 노드 2에 하중을 가하였을 때 결합부가 변형된 모습을 나타내고 있다. 표6의 유연성 행렬로 강성행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.98700 \times 10^6 & -1.80362 \times 10^5 \\ -1.80362 \times 10^5 & 4.39271 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이되며, 같은 방법으로 노드 1에 대한 유연성행렬을 구하여 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.98700 \times 10^6 & 1.80362 \times 10^5 \\ 1.80362 \times 10^5 & 4.39271 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

두 강성행렬을 이용하여 4개의 자유도에 대한 강성행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.9870 \times 10^6 & 8.9248 \times 10^4 & -8.9870 \times 10^6 & 1.8036 \times 10^5 \\ 8.9248 \times 10^4 & 1.6593 \times 10^3 & -8.9248 \times 10^4 & 1.0182 \times 10^3 \\ -8.9870 \times 10^6 & -8.9248 \times 10^4 & 8.9870 \times 10^6 & -1.8036 \times 10^5 \\ 1.8036 \times 10^5 & 1.0182 \times 10^3 & 1.8036 \times 10^5 & 4.3927 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이 되며 이 강성행렬과 정축약한 질량행렬을 이용하여 전체구조물에 대한 고유치해석을 수행하였다. Table 7에 나타나 있는 것과 같이 해석치와 실험치가 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 7 A comparison of natural frequencies(Hz)

	experiment	proposed method	rigidly joined
1	128.5	128.4	128.7
2	421.9	425.8	425.6
3	740.2	741.1	736.3
4	1323.0	1325.5	1303.4

Fig.16은 각 모드에 대한 모드형상을 나타내고 있다.

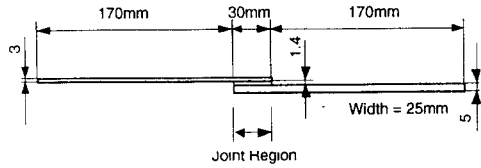


Fig.12 Dimensions of the structure

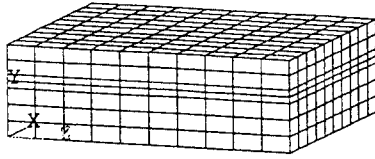


Fig.13 Detailed model of glued joint

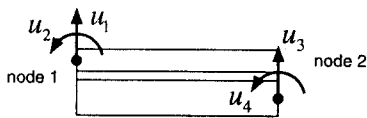


Fig.14 Retained DOFs of glued joint

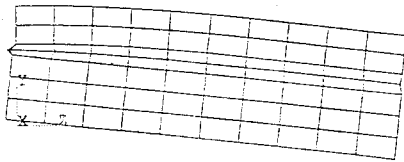


Fig.15 Deformed shape of joint due to loading

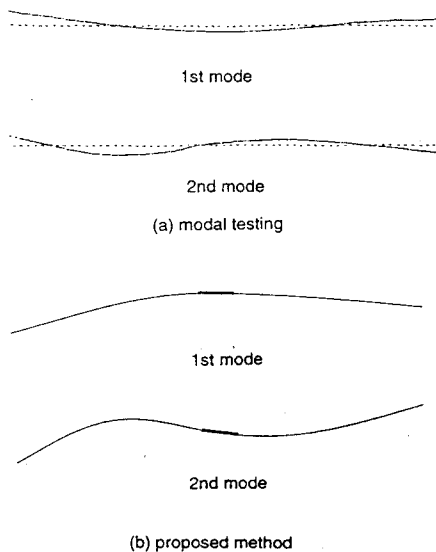


Fig.16 Mode shapes of the structure

4. 결론

본 연구에서는 다양한 종류의 결합부에 적용 가능한 일반적 모델링 기법에 대하여 연구하였으며 연구 결과는 다음과 같다.

- 1) 나사결합부, 볼트결합부 그리고 접착제 결합부등 여러 종류의 결합부의 해석에 적용할 수 있는 일반적 모델링 기법을 제시하였다.
- 2) 영향계수법에 의하여 결합부의 유연성 행렬을 구하여 강성행렬을 구하였으며, 이는 Guyan의 정축약이론에 의하여 축약된 행렬과 같음을 보였다.
- 3) 제시된 모델링기법에 의하여 모델링되는 결합부의 경계조건의 영향이 포함되지 않으며, 접촉 및 마찰의 영향을 고려할 수 있다.
- 4) 하중과 변위의 크기를 고려하여 결합부의 비선형성을 적절한 범위내에서 선형화할 수 있다.
- 5) 나사결합부, 볼트결합부 그리고 접착제 결합부에 제시된 해석기법을 적용하여 동특성 해석을 수행하였고, 결합부 해석 방법의 타당성을 검증하였다.

후기

이 연구는 국방과학연구소 장기 기초 연구 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- [1] Claus-Peter Fritzen, "Identification of Mass, Damping, and Stiffness Matrices of Mechanical Systems", Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol.108, No.1, pp9-16, 1986
- [2] J. Wang, P. Sas, "A Method for Identifying Parameter of Mechanical Joints", Journal of Applied Mechanics, Vol.57, No.6, pp337-342, 1990
- [3] Sathya N. Gangadharan, "Probabilistic System Identification of Two Flexible Joint Models", AIAA Journal, Vol.29, No.8, pp1319-1326, 1991
- [4] J. M. Lee, "A Study on the Dynamic Modeling of Structures with Bolted and Bearing Joints", Annals of the CIRP, Vol.37, No.1, 1988
- [5] M. D. Rao, M. J. Crocker, "Analytical and Experimental Study of the Vibration of Bolted Beams with a Lap Joint", Trans. of ASME, Vol.112, pp444-451, 1990
- [6] R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrix", AIAA J., Vol.3, No.2, p380, 1965
- [7] L. Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, the Macmillan Co., 1967