

진동 모우드의 상대적 중요도 평가에 관한 연구

0성길주*, 이재응**, 이종원**

(A Study on the Way of Assessing the Relative Importance of Vibrational Mode)

(Kil-Ju Sung, Jae-Eung Lee, Chong-Won Lee)

1. 서론

진동시스템에서 가진력 신호가 백색잡음(white noise)이거나 임펄스일 경우 그 응답함수는 각 모우드와 관련된 함수의 합으로 표현된다[1]. 따라서 응답함수에는 각 모우드의 영향이 나타나며 이 영향의 크기를 비교하면 모우드의 상대적 중요도를 평가할 수 있다. 이것은 모델의 차수를 결정하거나[2, 3], 실험적 모우드해석(experimental modal analysis)에서 추정한 모우드중에서 구조물 모우드(structural mode, true mode)와 계산상 모우드(computational mode)를 구별하는데 중요한 판단 기준이 될 수 있다[4].

Lee와 Fassois [5]는 가진력이 백색잡음일때 응답변위 신호의 평균제곱값(mean square value)으로서 정의되는 진동에너지에 각 모우드로부터의 기여도를 구하였으며 이값을 근거로 각 모우드의 상대적 중요도를 정의한 바 있다.

대부분의 진동실험에서는 속도측정기나 가속도계등을 사용하여 응답함수를 속도나 가속도 신호를 측정하게 된다. 따라서 이들 신호로부터 구한 전달함수는 변위에 대한 전달함수와는 다르다.

본 논문에서는 응답함수가 속도, 가속도 신호인 경우 그 전달함수로부터 각 모우드의 상대적 중요도를 평가할 수 있는 방법을 개발하고자 한다. 또한 실제 실험에서와 같이 샘플링된 신호로부터 추정한 이산시간 전달함수로부터 모우드의 상대적 중요도를 직접 평가할 수 있는 방법을 개발하고자 한다.

2. 진동에너지와 모우드의 상대적 중요도

본 절에서는 선형, 점성감쇠 진동시스템에 가진력이 백색잡음(white noise)일때 그 응답변위 신호에 나타나는 각 진동 모우드의 상대적 영향을 정량적으로 표현할 수 있는 방법을 소개하고자 한다. 본 논문에서는 응답

* : 중앙대학교 기계공학과 대학원
 ** : 중앙대학교 기계공학과

변위 신호의 에너지를 각 진동 모우드와 관련된 항으로 분해하고, 이를 백분율로 표현하므로써 진동 변위응답에 나타나는 각 모우드의 상대적 기여도를 정량적으로 나타내었다[5].

2.1 모우드 기여도

n 자유도의 선형, 점성 감쇠 진동시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 크기가 $n \times n$ 이고 실수이고 대칭인 질량, 감쇠, 강성행렬을 각각 나타내고, $\mathbf{f}(t)$ 는 가진력 벡터, $\mathbf{x}(t)$ 는 응답변위 벡터를 각각 나타낸다.

이 시스템이 별개의 진동모우드를 n 개 갖는다고 가정하면 n 쌍의 공액복소 고유치와 고유벡터(모우드벡터)는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$s_i, s_i^* = -\zeta_i \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta_i^2} \\ = -\zeta_i \omega_n \pm j\omega_d, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix}, \quad \phi_i^* = \begin{Bmatrix} \phi_{1i}^* \\ \phi_{2i}^* \\ \vdots \\ \phi_{ni}^* \end{Bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

여기서 ω_d , ω_n , ζ_i 는 각각 모우드 i 의 감쇠고유진동수, 고유진동수, 감쇠계수를 나타내며, j 는 단위허수를 나타낸다.

주어진 가진력 벡터에 대한 일반적인 응답변위 벡터는 다음과 같이 표현된다[1].

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\phi_i \sum_{k=1}^n \left(\frac{\phi_{ki}}{a_i} \int_{-\infty}^t h_i(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \right) + \phi_i^* \sum_{k=1}^n \left(\frac{\phi_{ki}^*}{a_i^*} \int_{-\infty}^t h_i^*(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \right) \right] \quad (4)$$

여기서 $h_i(t)$ 와 $h_i^*(t)$ 는 각각

$$h_i(t) = e^{s_i t} = e^{-\zeta_i \omega_n t} (\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) \quad (5)$$

$$h_i^*(t) = e^{s_i^* t} = e^{-\zeta_i \omega_n t} (\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t) \quad (6)$$

이고, 상수 a_i 와 a_i^* 는 다음과 같이 표현된다.

$$a_i = 2s_i \cdot \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i + \Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i \quad (7)$$

$$a_i^* = 2s_i^* \cdot \Phi_i^{*T} \mathbf{M} \Phi_i^* + \Phi_i^{*T} \mathbf{C} \Phi_i^* \quad (8)$$

진동시스템에서 변위응답에 나타나는 각 모드드의 상대적 중요도는 각각의 전달함수마다(가진점과 응답측점의 위치에 따라) 독립적으로 정의될 수 있으므로 임의의 가진력 $f_i(t)$ 와 응답변위 $x_m(t)$ 과의 관계를 고려해 보자.

가진력 $f_i(t)$ 가 평균값이 0이고, 분산(variance)이 R_{f_i} 인 백색잡음(white noise)이라고 하면 변위응답 $x_m(t)$ 의 자기상관함수(auto correlation function)는 다음과 같이 표현된다[5].

$$\begin{aligned} R_{x_m}(\tau) &= E[x_m(t)x_m(t+\tau)] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\exp(-\zeta_k \omega_{n_k} \tau) (\eta_1^{(k)} \cos \omega_{d_k} \tau + \eta_2^{(k)} \sin \omega_{d_k} \tau) \right] \\ &\triangleq \sum_{k=1}^n D_k(\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $E[\cdot]$ 는 통계학적 기대함수(stastititcal expectation)이고 $\eta_1^{(k)}$ 와 $\eta_2^{(k)}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \eta_1^{(k)} &\triangleq R_{f_i} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \int_0^\infty h_i(t) h_k(t) dt \right. \\ &\quad + \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \int_0^\infty h_i(t) h_k^*(t) dt \\ &\quad + \frac{\Phi_{mi}^* \Phi_{li}^* \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i^* a_k} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k(t) dt \\ &\quad \left. + \frac{\Phi_{mi}^* \Phi_{li}^* \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i^* a_k^*} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k^*(t) dt \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta_2^{(k)} &\triangleq j R_{f_i} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \int_0^\infty h_i(t) h_k(t) dt \right. \\ &\quad - \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \int_0^\infty h_i(t) h_k^*(t) dt \\ &\quad + \frac{\Phi_{mi}^* \Phi_{li}^* \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i^* a_k} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k(t) dt \\ &\quad \left. - \frac{\Phi_{mi}^* \Phi_{li}^* \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i^* a_k^*} \int_0^\infty h_i^*(t) h_k^*(t) dt \right) \end{aligned} \quad (11)$$

식(9)로부터 볼 수 있듯이 응답변위의 자기상관함수는 n 개의 항 ($D_k(\tau)$, $k=1, \dots, n$)으로 분리해서 표현되었으며 각 항 ($D_k(\tau)$)은 τ 가 증가함에 따라 각 모드드와 관련된 함수 ($e^{-\zeta_k \omega_{n_k} \tau}$)로 감소함을 볼 수 있다. 따라서 각 항은 $R_{x_m}(\tau)$ 를 각 진동 모드드와 관련된 함수로 분리하여 표현한 것임을 알 수 있으며, 이를 $R_{x_m}(\tau)$ 에 대한 각 모드드의 기여라고 볼 수 있다.

진동 변위 신호 $x_m(t)$ 의 에너지는 평균제곱값(mean square value)으로 정의되며 자기상관함수에 $\tau=0$ 를 대입함으로써 구할 수 있다[6]. 식(9)로부터 진동신호의 에너지를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} R_{x_m}(0) &\triangleq \sum_{k=1}^n D_k(0) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[2R_{f_i} \sum_{l=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_3^{(i,k)} + \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_4^{(i,k)} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\operatorname{Re}(\cdot)$ 은 (\cdot) 의 실수값을 나타내며, $\eta_3^{(i,k)}$, $\eta_4^{(i,k)}$ 는 각각

$$\begin{aligned} \eta_3^{(i,k)} &\triangleq \int_0^\infty h_i(t) h_k(t) dt \\ &= \frac{(\zeta_i \omega_{n_i} + \zeta_k \omega_{n_k}) + j(\omega_{d_i} + \omega_{d_k})}{\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2 + 2\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} + 2\omega_{n_i} \omega_{n_k} \sqrt{(1-\zeta_i^2)(1-\zeta_k^2)}} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \eta_4^{(i,k)} &\triangleq \int_0^\infty h_i(t) h_k^*(t) dt \\ &= \frac{(\zeta_i \omega_{n_i} + \zeta_k \omega_{n_k}) + j(\omega_{d_i} - \omega_{d_k})}{\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2 + 2\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} - 2\omega_{n_i} \omega_{n_k} \sqrt{(1-\zeta_i^2)(1-\zeta_k^2)}} \end{aligned} \quad (14)$$

로 표현된다. 따라서 진동 에너지는 n 개항으로 표시되었으며, 위에서 설명한 것과 같이 각 항 ($D_k(0)$)은 각 모드드로부터 전체 진동에너지에 기여하는 부분이 된다. 따라서 k 번째 모드드가 전체 진동 에너지에 기여하는 기여도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta_k \triangleq \frac{D_k(0)}{\sum_{j=1}^n D_j(0)} \times 100\% \quad (15)$$

2.2 에너지 기여도에 대한 물리적 의미

2.2.1 임펄스 응답 함수로의 설명

2.1절에서 고려한 가진점 l 과 응답측점 m 사이에서 정의된 전달함수의 임펄스응답함수는 다음과 같이 표현될 수 있다. [5]

$$\begin{aligned} g(t) &\triangleq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_k} h_k(t) + \frac{\Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_k^*} h_k^*(t) \right) \\ &\triangleq \sum_{k=1}^n g_k(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $h_k(t)$, $h_k^*(t)$ 는 식(5), (6)과 같으며 따라서 $g_k(t)$ 는 임펄스응답함수 $g(t)$ 에서 모드드 k 와 관련된 함수를 나타냄을 알 수 있다.

이 표현식을 이용하면 진동변위신호 에너지에 대한 k 번째 모드드의 기여는 다음과 같이 표현되며[5],

$$D_k(0) = R_{f_i} \int_0^\infty g(t) g_k(t) dt \quad (17)$$

백분율로 표현된 기여도는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_k = \frac{\int_0^\infty g(t) g_k(t) dt}{\int_0^\infty g^2(t) dt} \times 100\% \quad (18)$$

2.2.2 스펙트럼으로의 설명

진동변위 신호 $x_m(t)$ 의 자기상관함수 $R_{x_m}(\tau)$ 와 파워스펙트럼 $S_{x_m}(\omega)$ 는 푸리에 변환관계에 있으므로 진동신호의 에너지는 다음과 같이 표시할 수 있다. [6]

$$R_{x_m}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_m}(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} S_k(\omega) d\omega \quad (19)$$

여기서 $S_k(\omega)$ 는 특정주파수 ω 에서 k 번째 진동 모드드가 응답변위 신호의 에너지에 기여하는 것을 나타내며, 이를 k 번째 모드드의 스펙트럼 기여라고 한다. 그러면 $D_k(0)$ 와 $S_k(\omega)$ 의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$D_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(\omega) d\omega \quad (20)$$

따라서 k 번째 진동 모우드의 에너지 기여는 k 번째 모우드의 스펙트럼 기여의 적분치(면적)와 같음을 알 수 있다.

3. 속도 및 가속도 신호의 에너지

구조물 진동실험에서 많은 경우 속도 또는 가속도 센서를 이용하여 응답함수를 측정하므로 본 절에서는 속도 및 가속도 신호의 에너지와 각 모우드의 기여도를 유도하고자 한다.

진동변위 신호의 자기상관함수는 다음과 같이 정의된다 [6].

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (21)$$

이 식을 τ 에 대해 두번 미분하면 속도에 대한 자기상관함수를 얻을 수 있다 [7].

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \{R_x(\tau)\} = -E[\dot{x}(t_1 - \tau)\dot{x}(t_1)] \triangleq -R_{\dot{x}}(\tau) \quad (22)$$

가속도에 대한 자기상관함수도 다음과 같이 구할 수 있다 [7].

$$\frac{d^4}{d\tau^4} \{R_x(\tau)\} \triangleq R_{\ddot{x}}(\tau) \quad (23)$$

속도와 가속도 응답신호의 에너지와 각 모우드 기여는 $R_x(\tau)$ 를 τ 에 대해 각각 두번, 네번 미분하고 $\tau = 0$ 을 대입하므로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{\dot{x}}(0) &= \sum_{k=1}^n D'_k(0) \\ &= 2R_{f_0} \sum_{k=1}^n \left[(\omega_{d_k}^2 - \zeta_k^2 \omega_{n_k}^2) \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_{3^{(i,k)}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_{4^{(i,k)}} \right] + (2\zeta_k \omega_{n_k} \omega_{d_k}) \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_{3^{(i,k)}} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_{4^{(i,k)}} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\ddot{x}}(0) &= \sum_{k=1}^n D''_k(0) \\ &= 2R_{f_0} \sum_{k=1}^n \left[(\zeta_k^4 \omega_{n_k}^4 - 6\zeta_k^2 \omega_{n_k}^2 \omega_{d_k}^2 + \omega_{d_k}^4) \right. \\ &\quad \times \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_{3^{(i,k)}} + \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_{4^{(i,k)}} \right) \\ &\quad \left. + (4\zeta_k \omega_{n_k} \omega_{d_k}^3 - 4\zeta_k^3 \omega_{n_k}^3 \omega_{d_k}) \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} \left(\frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_i a_k} \eta_{3^{(i,k)}} - \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_i a_k^*} \eta_{4^{(i,k)}} \right) \right] \quad (25) \end{aligned}$$

여기서 $\eta_{3^{(i,k)}}$, $\eta_{4^{(i,k)}}$ 는 각각 식 (13), (14)와 같으며 $D'_k(0)$, $D''_k(0)$ 는 속도, 가속도 신호의 에너지에 대한 모우드 k 의 기여를 각각 나타낸다.

비례감쇠시스템의 경우에는 모우드형상벡터가 실수이고 $a_i = j2\omega_{d_i}$ 이므로 변위, 속도, 가속도 에너지에 대한 모우드 k 의 기여는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} D_k(0) &= 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk} (\zeta_i \omega_{n_i} + \zeta_k \omega_{n_k})}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} (\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\zeta_i^2 + \zeta_k^2) \omega_{n_i}^2 \omega_{n_k}^2]} \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_k(0) &= 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk} [\omega_{n_i} \omega_{n_k} (\zeta_i \omega_{n_i} + \zeta_k \omega_{n_k})]}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} (\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\zeta_i^2 + \zeta_k^2) \omega_{n_i}^2 \omega_{n_k}^2]} \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D''_k(0) &= 2R_{f_0} \sum_{i=1}^n \Phi_{mi} \Phi_{li} \Phi_{mk} \Phi_{lk} \times \\ &\quad \frac{\omega_{n_i}^4 (\zeta_i \omega_{n_i} - \zeta_k \omega_{n_k}) - 4\zeta_k^2 \omega_{n_i} \omega_{n_k}^3 (\zeta_i \omega_{n_i} + \zeta_k \omega_{n_k}) + 2\zeta_k \omega_{n_i}^2 \omega_{n_k}^3}{(\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_k}^2)^2 + 4[\zeta_i \zeta_k \omega_{n_i} \omega_{n_k} (\omega_{n_i}^2 + \omega_{n_k}^2) + (\zeta_i^2 + \zeta_k^2) \omega_{n_i}^2 \omega_{n_k}^2]} \quad (28) \end{aligned}$$

4. 이산시간 전달함수로부터의 유도

4.1 응답신호가 변위인 경우

본 절에서는 이산시간 전달함수로부터 모우드의 상대적 중요도를 결정할 수 있는 방법을 유도하고자한다.

가진점 l 과 응답측정점 m 사이의 전달함수는 식 (16)을 라플라스 변환하므로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{A_k^*}{s-s_k^*} \right) \quad (29)$$

여기서 모우드 상수 A_k , A_k^* 는 각각

$$A_k = \frac{\Phi_{mk} \Phi_{lk}}{a_k}, \quad A_k^* = \frac{\Phi_{mk}^* \Phi_{lk}^*}{a_k^*} \quad (30)$$

을 나타낸다. 이 전달함수와 등가인 이산시간의 전달함수 $G(B)$ 의 표현식은 유일하지는 않으나 임펄스 불변원리를 사용하면 [8] 다음과 같은 관계로 표현된다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{A_k^*}{s-s_k^*} \right) \\ \Rightarrow G(B) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) \quad (31) \end{aligned}$$

여기서 λ_k , λ_k^* 는 이산시간계의 특성방정식의 고유치로서 다음과 같은 관계가 있고.

$$\lambda_k = e^{s_k T}, \quad \lambda_k^* = e^{s_k^* T} \quad (32)$$

T 는 샘플링 간격을 나타낸다.

이산시간 전달함수 $G(B)$ 는 Green함수를 [9] 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} G(B) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} (A_k \lambda_k^j + A_k^* \lambda_k^{*j}) \right] B^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \quad (33) \end{aligned}$$

따라서 샘플링된 변위 응답함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x[i] = G(B) \cdot f[i] = \sum_{j=0}^{\infty} G_j f[i-j] \quad (34)$$

이로부터 응답신호의 자기상관함수를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &\stackrel{\Delta}{=} E[x(t)x(t-\tau)] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G_i G_j E[f(t-i)f(t-\tau-j)] \\ &= R_{j_0} \sum_{j=0}^{\infty} G_{\tau+j} G_j \end{aligned} \quad (35)$$

윗식에 식 (33) 을 대입하면

$$\begin{aligned} \gamma_\tau &= R_{j_0} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{A_k A_i}{1-\lambda_k \lambda_i} + \frac{A_k^* A_i^*}{1-\lambda_k^* \lambda_i^*} \right) \lambda_k^\tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_k A_i^*}{1-\lambda_k \lambda_i^*} + \frac{A_k^* A_i}{1-\lambda_k^* \lambda_i} \right) \lambda_k^{*\tau} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

로 표현되어 2.1절에서 설명한 것과 같이 응답 신호의 자기상관함수가 각 모드와 관련된 항으로 분리되어 표현됨을 알 수 있다.

응답 신호의 에너지를 식 (36) 에 $\tau=0$ 를 대입하여 구하면 다음과 같다.

$$\gamma_0 = \sum_{k=1}^n (\gamma_0)_k = \sum_{k=1}^n \left[2R_{j_0} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \left(\frac{A_k A_i}{1-\lambda_k \lambda_i} + \frac{A_k A_i^*}{1-\lambda_k \lambda_i^*} \right) \right] \quad (37)$$

따라서 $(\gamma_0)_k$ 는 진동응답신호의 에너지에 k 번째 모드 기여를 나타냄을 알 수 있고 이것은 식 (12) 의 $D_k(0)$ 와 같은 의미를 나타내며, 식 (30) 과 식 (32) 를 식 (37) 에 대입하면 그 표현식이 같음을 알 수 있다.

따라서 샘플링된 가진 신호와 응답변위 신호를 측정하여 이산시간 전달함수를 구하면 이의 특성근 (λ_k, λ_k^*) 과 모드상수 (A_k, A_k^*) 로부터 모드의 상대적 중요도를 구할 수 있음을 보여주었다.

4.2 응답신호가 속도, 가속도인 경우

많은 경우 진동실험에서는 응답신호측정을 위하여 속도측정계나 가속도계를 사용하여 속도나 가속도를 측정하게 된다. 따라서 이들 신호로부터 추정된 전달함수는 가진력과 응답속도 또는 가속도와 관계를 나타내는 mobility 또는 inertance를 나타낸다 [10].

이들을 receptance (가진력과 변위의 관계를 나타내는 전달함수)와 비교하면 그 특성방정식은 변하지 않으나 분자항들은 변하게 되어 모드 상수도 다르게 되므로 본 절에서는 receptance, mobility, inertance의 모드 상수항간의 관계를 구하고자 한다.

시스템의 receptance는 식 (16) 으로부터 다음과 같이 표현할 수 있고,

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{A_k^*}{s-s_k^*} \right) = \frac{\alpha_0 s^{2n-2} + \dots + \alpha_{2n-2}}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} \quad (38)$$

이와 등가인 이산시간 시스템의 receptance는 임펄스 불변 원리에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G(B) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) = \frac{\theta_0 + \dots + \theta_{2n-1} B^{2n-1}}{1+d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \quad (39)$$

이는 $\sum_{k=1}^n (A_k + A_k^*) = 0$ 인 관계가 있기 때문이다. [4]

i) 응답신호가 속도인 경우

가진력과 속도응답함수와의 관계를 나타내는 mobility는 다음과 같이 표현된다 [10].

$$\begin{aligned} G_v(s) &= sG(s) = \frac{\alpha_0 s^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n-2} s}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k'}{s-s_k} + \frac{A_k''}{s-s_k^*} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

선형 진동시스템에서 입력과 출력과의 관계는 convolution 적분에 의하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (41)$$

이를 t 에 대하여 미분하면 Leibnitz의 법칙 [11] 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \left[\frac{d}{dt} g(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau + g(0) f(t) \quad (42)$$

임펄스응답함수는 $t=0$ 에서 0이므로 식 (16) 으로부터 속도에 대한 임펄스응답함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} g(t) = \dot{g}(t) = \sum_{k=1}^n \left(s_k A_k e^{s_k t} + s_k^* A_k^* e^{s_k^* t} \right) \quad (43)$$

식 (42) 를 라플라스 변환하면 가진력과 속도응답과의 관계를 나타내는 전달함수인 mobility를 얻게되며 이는 다음과 같이 표현된다.

$$G_v(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k A_k}{s-s_k} + \frac{s_k^* A_k^*}{s-s_k^*} \right) \quad (44)$$

따라서 두 전달함수의 모드 상수 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$A_k' = s_k A_k, \quad A_k'' = s_k^* A_k^* \quad (45)$$

식 (44) 와 등가인 이산시간계의 mobility는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} G_v(B) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k A_k}{1-\lambda_k B} + \frac{s_k^* A_k^*}{1-\lambda_k^* B} \right) \\ &= \frac{\theta_0' + \dots + \theta_{2n-1}' B^{2n-1}}{1+d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \end{aligned} \quad (46)$$

한편 식 (44) 와 (46) 으로부터 다음의 관계를 구할 수 있다.

$$\theta_0' = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) \quad (47)$$

ii) 응답신호가 가속도인 경우

가속도응답신호의 경우 inertance는 다음과 같이 표현된다 [10].

$$\begin{aligned} G_a(s) &= s^2 G(s) \\ &= \frac{\alpha_0 s^{2n} + \dots + \alpha_{2n-2} s^2}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} \\ &= \alpha_0 + \frac{\alpha_0' s^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n-1}' s}{s^{2n} + \beta_1 s^{2n-1} + \dots + \beta_{2n}} \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_k''}{s-s_k} + \frac{A_k''' }{s-s_k^*} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

A_k 와 A_k'' 의 관계를 나타내기 위해 식 (42) 를 t 에 대하여 미분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x}(t) = \int_0^t \left[\frac{d}{dt} \dot{g}(t-\tau) \right] f(\tau) d\tau + \dot{g}(0) f(t) \quad (49)$$

식 (43) 으로부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{g}(0) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k^* A_k^*) \quad (50)$$

가속도응답에 대한 임펄스응답함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \left(s_k^2 A_k e^{s_k t} + s_k'^2 A_k' e^{s_k' t} \right) \quad (51)$$

따라서 식 (49) 를 라플라스 변환하면 가속도응답에 대한 전달함수인 inertance를 구할 수 있으며 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_a(s) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k' A_k') + \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k^2 A_k}{s - s_k} + \frac{s_k'^2 A_k'}{s - s_k'} \right) \quad (52)$$

따라서 식 (48) 과 (52) 를 비교하면 모우드 상수의 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$A_k'' = s_k^2 A_k, \quad A_k'' = s_k'^2 A_k' \quad (53)$$

식 (53) 과 등가인 이산시간계의 inertance는 임펄스 불변 원리에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_a(B) = \sum_{k=1}^n (s_k A_k + s_k' A_k') + \sum_{k=1}^n \left(\frac{s_k^2 A_k}{1 - \lambda_k B} + \frac{s_k'^2 A_k'}{1 - \lambda_k' B} \right) \\ = \frac{\theta_0'' + \dots + \theta_{2n}'' B^{2n}}{1 + d_1 B + \dots + d_{2n} B^{2n}} \quad (54)$$

이상과 같이 응답함수가 변위가 아닌 속도 또는 가속도 신호인 경우 각 전달함수의 모우드 상수간의 관계를 유도하였으며, 따라서 본 논문에서 제안하는 진동변위 신호 에너지에 대한 각 모우드의 기여도를 구할 수 있음을 보여 주었다.

5. 모의 실험

그림 1과 같은 2자유도 비례감쇠시스템을 고려한다. 이 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 150 & -50 \\ -50 & 150 \end{bmatrix}$$

이 진동시스템의 모우드 변수와 각각의 전달함수에 대한 각 모우드의 중요도를 나타내는 에너지 기여도는 표 1과 같다.

그림 2에는 f_1 이 백색잡음일때 응답함수 x_1 의 스펙트럼을 각 모우드의 기여도와 함께 나타내었다.

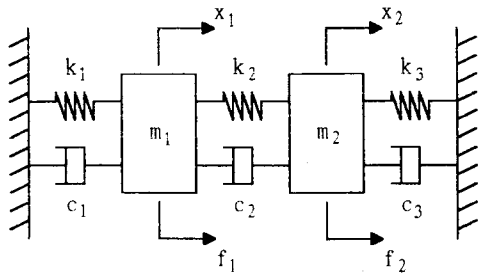


Figure 1. Two-degree-of-freedom structural system

Table 1. Modal parameter and dispersion analysis results

| | ω_n (Hz) | ζ_k | ϕ_k | Dispersion percentage matrices (%) |
|--------|-----------------|-----------|--|--|
| Mode 1 | 1.59155 | 0.1 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 70.46 & 82.13 \\ 82.13 & 70.46 \end{bmatrix}$ |
| Mode 2 | 2.25079 | 0.1061 | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 29.54 & 17.87 \\ 17.87 & 29.54 \end{bmatrix}$ |

이 시스템에서 변위 신호 대신 속도, 가속도 신호를 측정할 경우의 에너지 기여도는 표 2와 같다.

Table 2. Dispersion analysis results of vel. and acc. signal

| | Vel. dispersion percentage matrices (%) | Acc. dispersion percentage matrices (%) |
|--------|--|--|
| Mode 1 | $\begin{bmatrix} 58.00 & 63.31 \\ 63.31 & 58.00 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 44.96 & 39.95 \\ 39.95 & 44.96 \end{bmatrix}$ |
| Mode 2 | $\begin{bmatrix} 42.00 & 36.69 \\ 36.69 & 42.00 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 55.04 & 60.05 \\ 60.05 & 55.04 \end{bmatrix}$ |

표 1과 표 2의 결과로부터 변위신호, 속도신호, 가속도신호를 측정하였을때 각 신호 에너지에 대하여 각 모우드가 기여하는 비율이 틀려짐을 알수있다.

이 시스템의 전달함수와 등가인 일정하게 샘플링 (0.1 초) 된 이산시간 전달함수의 고유치와 모우드 상수 그리고 이들로부터 구한 각 진동 모우드의 기여도는 표 3과 같다.

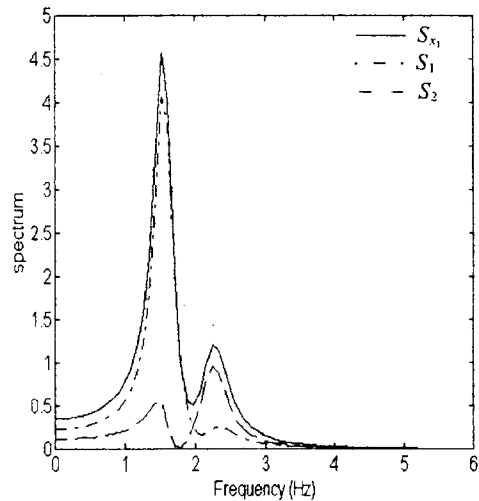


Figure 2. The decomposition of the spectrum into the modal components for receptance x_1/f_1

Table 3. Dispersion analysis results for discrete-time transfer function : sampling interval=0.1s

| | λ_k | A_k | Dispersion percentage matrices (%) |
|--------|----------------|-----------|--|
| Mode 1 | 0.9048+j2.7047 | j0.025125 | $\begin{bmatrix} 70.48 & 82.15 \\ 82.15 & 70.48 \end{bmatrix}$ |
| Mode 2 | 0.8607+j4.0810 | j0.017778 | $\begin{bmatrix} 29.47 & 17.85 \\ 17.85 & 29.47 \end{bmatrix}$ |

같은 샘플링 간격(0.1초)으로 측정된 가속도 신호로부터 구한 이산시간 inertance의 모드 상수와 가속도신호에 대한 각 진동모드의 기여도를 표 4에 나타내었으며, 그 결과로부터 구한 변위신호에 대한 각 모드의 기여도를 표 5에 나타냈다.

Table 4. Acc. signal dispersion analysis results for discrete-time transfer function : sampling interval=0.1s

| | A_k'' | Acc. dispersion percentage matrices (%) |
|--------|---------------|--|
| Mode 1 | -0.5+j2.4623 | $\begin{bmatrix} 44.79 & 40.22 \\ 40.22 & 44.79 \end{bmatrix}$ |
| Mode 2 | -0.75+j3.4756 | $\begin{bmatrix} 55.21 & 59.78 \\ 59.78 & 55.21 \end{bmatrix}$ |

Table 5. Dispersion analysis results evaluated from acc. signal results

| | A_k | dispersion percentage matrices (%) |
|--------|------------|--|
| Mode 1 | -j0.017778 | $\begin{bmatrix} 70.48 & 82.15 \\ 82.15 & 70.48 \end{bmatrix}$ |
| Mode 2 | -j0.025125 | $\begin{bmatrix} 29.47 & 17.85 \\ 17.85 & 29.47 \end{bmatrix}$ |

표 4와 표 5의 결과에서 가속도 신호의 이산시간 전달함수로부터 간단하게 진동(변위) 신호의 모드 에너지를 구할 수 있음을 보여주었다.

6. 결론

본 논문에서는 진동 변위응답함수에 나타나는 각 모드의 영향을 정량화하여 비교할 수 있는 하나의 방법을 개발하였다.

본 논문에서 개발한 방법은 응답 신호의 에너지를 각 모드와 관련된 항으로 나누고 이를 백분율로 표현하

여 각 모드의 응답 신호에 대한 기여도를 나타내었으며 이것을 각 모드의 상대적 중요도를 평가하는 기준으로 사용할 수 있었다. 또한 이산시간 전달함수로부터도 각 모드의 기여도를 구할수 있는 과정을 유도하였으며 마지막으로 응답 신호가 속도나 가속도일 경우에도 각 모드의 기여도를 평가하기 위하여 각 전달함수의 모드 상수항간의 관계를 유도하여 실제 실험 데이터에도 적용할 수 있게 하였다.

참고문헌

1. L.Meirovitch, 1967, "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan.
2. C.M.Liaw, M.Ouyang and C.T.Pan, 1990, "Reduced order parameter estimation for continuous system from sampled data", J. of Dynamic System Measurement and Control, Vol.112, pp. 305-308
3. M.Ouyang, C.M.Liaw and C.T.Pan, 1986, "On selecting low order discrete-time modes based on dominant energy modes", J. of Dynamic System Measurement and Control, Vol.108, pp. 154-156
4. J.E.Lee and S.D.Fassois, 1992, "Suboptimum maximum likelihood estimation of structural parameter from multiple-excitation vibration data", J. of Vibration and Acoustics, Vol.114, pp. 260-271
5. J.E.Lee and S.D.Fassois, 1993, "On the problem of stochastic experimental modal analysis based on multiple-excitation multiple-response data, part I : dispersion analysis of continuous-time structural system", J. of Sound and Vibration, Vol. 161, pp.33-56
6. J.S.Bendat and A.G.Piersol, 1991, "Random Data", John Wiley
7. D.E.Newland, 1993, "Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis", John Wiley.
8. J.E.Lee and S.D.Fassois, 1993, "On the problem of stochastic-experimental modal analysis based on multiple-excitation multiple-response data, part II : the modal analysis", J. of Sound and Vibration, Vol. 161, 57-87
9. S.M.Pandit and S.M.Wu, 1983, "Time Series and System Analysis with Applications", John Wiley.
10. D.J.Ewins, 1986, "Modal Testing : Theory and Practice", Research Studies Press.
11. F.B.Hildebrand, 1976, "Advanced Calculus for Applications" Prentice-Hall.