

## 1. 序 論

지난 20여년간 河川, 河口, 貯水池, 海岸 . 그리고 海洋에서의 여러 문제들을 해결하기 위하여 數值模型이 개발, 활용되어 왔다. 대부분 수치모형들은 해석작업이 비교적 간편한 장점 때문에 유한차분법을 많이 사용하고 있으며, 부분적으로 천수방정식이 유한요소법에 적용된 수치모형도 연구되어져 왔다. 어떤 공학적 문제의 이론적 해석을 위하여는 정확한 수학적모형을 만드는 것도 중요하지만 그 식의 정확한 해를 얻기 위한 적합한 수치 계산기법도 많은 비중을 차지한다.

有限體積模型의 기본개념은 전체 흐름영역을 유한개의 체적(Control Volume)으로 나누어 Flux의 流出入을 수치모형하는 것으로 物理的概念을 모형에 반영할 수 있는 장점을 갖고 있다. Patankar와 Spalding(1980)등에 의하여 이 방법이 주로 연구되었는데 적합한 해를 구하기 위하여 Power-Law Scheme, Hybrid Scheme, Exponential Scheme, Upwind Scheme등의 적용을 비교 검토하여 장단점을 제시하였다. 그리고 Patankar와 Baliga(1979a, 1979b)등에 의하여 유한요소법에 이 개념을 적용한 연구가 수행되어 졌다.

본 연구에서는 2차원 보존형 천수방정식을 유한체적들에 적분함으로써 차분화된 수치모형을 구하였다. Flux의 값들이 Exponential Scheme으로 표현되어져 交互座標(Staggered Mesh)상에서 계산이 수행되도록 하였다. 모형의 檢證을 위하여 矩形斷面 실험수로에서 定流, 等流의 흐름을 모의 발생하였으며 그 값을 Chezy의 유속공식으로 계산한 값과 비교하였다.

## 2. 本 論

### 2.1 유한체적에서의 Exponential scheme

1차원 정류에서 移送과 擴散의 식은 다음과 같다.

$$-\frac{\partial J_x}{\partial x} = \frac{\partial (u\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

여기서  $J_x$ 는 Total Flux이고  $\Gamma$ 는 확산계수이며 윗식의 해는 아래와 같다.

$$\phi = C_1 + C_2 e^{-\frac{u}{\Gamma} x} \quad (2)$$

$0 \leq x \leq L$ 의 범위에서  $x=0$  일때  $\phi_0$ 와  $x=L$  일때  $\phi_L$ 의 경계조건을 (2)식에 넣어  $C_1$ 과  $C_2$ 를 구한 후 그 값들을 다시 대입하면  $\phi$ 의 Exponential Scheme은 다음과 같다.

$$\phi = \phi_0 + \frac{\exp(-\frac{Px}{L}) - 1}{\exp(P) - 1} (\phi_L - \phi_0) \quad (3)$$

여기서 P는 Peclet number라 하며 이송과 확산의 비로 다음과 같다.

$$P = \frac{uL}{\Gamma} \quad (4)$$

(1)식으로 부터  $J_x$ 는 다음과 같다.

$$J_x = u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5)$$

(5)식에 (3)식을 대입하면 아래와 같이 Total Flux의 일반식을 얻을 수 있다.

$$J_x = u(\phi_0 + \frac{\phi_0 - \phi_L}{\exp(P) - 1}) \quad (6)$$

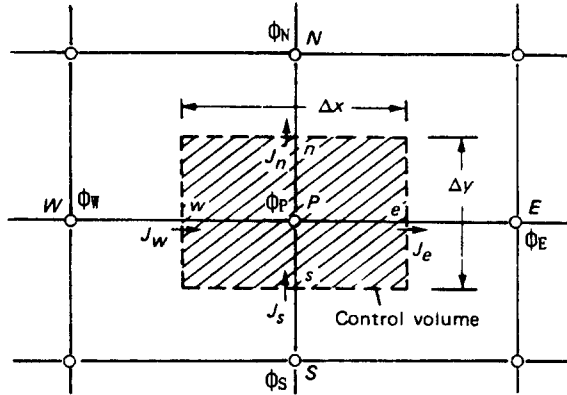


Fig 1. Control Volume for the two-dimensional situation.

(6)식을 Control Volume에 적용시키면 각 위치(e, w, n, s)에서의 Total Flux J의 값은 다음과 같이되어진다.

$$J_e = u_e(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1}) \quad (7.a)$$

$$J_w = u_w(\phi_w + \frac{\phi_w - \phi_P}{\exp(P_w) - 1}) \quad (7.b)$$

$$J_n = V_n(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_N}{\exp(P_n) - 1}) \quad (7.c)$$

$$J_s = V_s(\phi_S + \frac{\phi_S - \phi_P}{\exp(P_s) - 1}) \quad (7.d)$$

여기서 위의 각 식에 대한 Peclet Number의 값은 아래와 같이 정의된다.

$$P_e = \frac{u_e \Delta x}{\Gamma} \quad (8.a)$$

$$P_w = \frac{u_w \Delta x}{\Gamma} \quad (8.b)$$

$$P_n = \frac{V_n \Delta y}{\Gamma} \quad (8.c)$$

$$P_s = \frac{V_s \Delta y}{\Gamma} \quad (8.d)$$

## 2.2 淺水方程式의 有限體積模型

### 2.2-1 連續方程式

퇴적이나 세굴이 없는 즉 수로바닥이 시간에 따라 일정하다고 가정할 때 수심 평균된 2차원 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

여기서 Flux  $q_x=uD$ ,  $q_y=vD$ 이다. (9)식을 Control Volume에 대하여 積分하면 아래와 같다.

$$\int_S^N \int_W^E \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx dy + \int_S^N \int_W^E \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \int_S^N \int_W^E \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

(10)식을  $\zeta$  에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\zeta_c^{n+1} = \zeta_c^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{xE} - q_{xW}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{yN} - q_{yS}) \quad (11)$$

### 2.2-2 운동량 방정식

Flux를 사용한 2차원 수심평균된 천수방정식의 U momentum equation은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial (uq_x)}{\partial x} - \frac{\partial (vq_x)}{\partial x} &= f_v D - gD \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\tau_{wx} - \tau_{bx}}{\rho} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $q_x=uD$ 이고  $u, v$ 는 수심평균치를 취한  $x, y$ 방향의 유속이다.  $f$ 는 Coriolis항  $D$ 는 평균수심이고  $\zeta$ 는 수심의 변동량이다.  $g$ 는 중력가속도,  $\tau_{wx}, \tau_{bx}$ 는 바람과 수로 바닥으로 부터의 마찰응력이고  $\rho$ 는 유체 밀도이다.  $\bar{\varepsilon}$ 은 渦粘性係數이다. (12)식을  $x, y$ 방향에 대한 Total Flux (Convection, Diffusion)의 식으로 변형하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (13)$$

여기서  $\phi$ 는  $q_x$ 이고  $\Gamma$ 는  $\varepsilon$ 이다.  $J_x$ 와  $J_y$ 는 아래와 같다.

$$J_x = u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (14.a)$$

$$J_y = v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (14. b)$$

(14)식을 Control Volume에 대하여 적용하면 다음과 같이된다.

$$\frac{(\phi_P^{n+1} - \phi_P^n) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + J_{xe} - J_{xw} + J_{yn} - J_{ys} = S \Delta x \Delta y \quad (15)$$

각 Total Flux에 Exponential Scheme을 사용하면 아래와 같다.

$$J_{xe} = u_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp P_e - 1} \right) \quad (16. a)$$

$$J_{xw} = u_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp P_w - 1} \right) \quad (16. b)$$

$$J_{yn} = v_n \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_N}{\exp P_n - 1} \right) \quad (16. c)$$

$$J_{ys} = v_s \left( \phi_S + \frac{\phi_S - \phi_P}{\exp P_s - 1} \right) \quad (16. d)$$

여기서 Control Volume의 각 지점에서 유속은 다음과 같다.

$$u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \quad (17. a)$$

$$u_w = \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \quad (17. b)$$

$$v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \quad (17. c)$$

$$v_s = \frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2} \quad (17. d)$$

또한 Peclet number는 다음과 같다.

$$P_e = \frac{1}{\varepsilon} u_e \Delta x \quad (18. a)$$

$$P_w = \frac{1}{\varepsilon} u_w \Delta x \quad (18. b)$$

$$P_n = \frac{1}{\varepsilon} v_n \Delta y \quad (18. c)$$

$$P_s = \frac{1}{\varepsilon} v_s \Delta y \quad (18. d)$$

(15)식을 유속 U의 수치모형식으로 하면 다음과 같다.

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{2}{D_{i+1,j}^{n+1} + D_{i,j}^{n+1}} \left[ u_{i,j} \frac{D_{i+1,j} + D_{i,j}}{2} + S \Delta t - (J_{xe} - J_{xw} + J_{yn} - J_{ys}) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \right] \quad (19)$$

여기서 S의 식은 다음과 같다.

$$S = f \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i+1,j-1} + v_{i,j-1}}{4} \left( \frac{D_{i+1,j} + D_{i,j}}{2} \right) - g \left( \frac{D_{i+1,j} + D_{i,j}}{2} \right) \left( \frac{\zeta_{i-1,j} - \zeta_{i,j}}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{wx} - \tau_{bx}) \quad (20)$$

Flux를 사용한 2차원 수심평균된 천수방정식의 V momentum Equation은 다음과 같다.

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial (uq_y)}{\partial x} + \frac{\partial (vq_y)}{\partial y} = -f u D - g D \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\tau_{wy} - \tau_{by}}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial q_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \quad (21)$$

여기서  $q_y$ 는  $vD$ 이다. (21)식을 Total Flux ( $J_x, J_y$ )를 사용한 식으로 나타내면 u-Momentum Equation에서의 (13)식과 같아진다. 이 식을 Control Volume에 대하여 적용하고  $J_x$ 와  $J_y$ 에 Exponential Scheme을 사용하면 다음과 같은 유속  $v$ 에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{2}{(D_{i,j}^{n+1} + D_{i,j+1}^{n+1})} \left( v_{i,j} \left( \frac{D_{i,j} + D_{i,j+1}}{2} \right) + S \Delta t - (J_{xe} - J_{xw} + J_{yn} + J_{ys}) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \right) \quad (22)$$

여기서 S의 값은 다음과 같다.

$$S = -f \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}}{4} \left( \frac{D_{i,j+1} + D_{i,j}}{2} \right) - g \left( \frac{D_{i,j+1} + D_{i,j}}{2} \right) \left( \frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j}}{\Delta y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{wy} - \tau_{by}) \quad (23)$$

(22)식에서 Exponential Scheme으로 만들어진 Total Flux ( $J_{xe}, J_{xw}, J_{yn}, J_{ys}$ )의 식들과 Peclet Number의 식들은 U-Momentum Equation에서의 것들과 같은 식의 형태를 갖는다.

### 3. 模型의 適用 및 考察

유속과 수위계산에서 높은 振動을 줄이기 위하여 수치필터가 채택되었다. 예를 들어 유속의 경우 수치필터를 사용한 경우 다음과 같이된다.

$$U^{n+1} = aU^{n+1} + bU^n + cU^{n-1} \quad (24)$$

여기서 a, b, c는 高周波 數値振動을 줄이기 위하여 사용된 係數로 다음과 같다.

$$a + b + c = 1 \quad (25)$$

이 계수들은 (a, b, c) = (0.89, 0.1, 0.01)에서 (0.4, 0.4, 0.1)의 범위를 갖는다.

Butler는  $a=0.6$ ,  $b=0.3$ ,  $c=0.1$ 의 계수들을 선택하였는데 여기서도 같은 값들을 사용하였다.

작성된 수치모형을 검증하는 방법으로 Wijnbenga에 의하여 제안된 구형단면 수로에서의 수치실험을 행하였다. 水路의 폭은 240m 길이는 1000m 등류수심으로 5m 수로 傾斜는 1/1000로 하였으며 Chezy의 粗度係數는  $41.42 \text{ m}^{1/2}\text{s}^{-1}$ , 渦流粘性係數는 0으로 하였다. 境界條件으로 양벽면에 Slip Boundary Condition을 적용하였다.  $u=v=0$ 으로 하여 흐름의 初期條件으로 하였으며 time step 을 5sec 로 주었을 때 약 3000회의 반복계산에서 값이 수렴되었다. 이 값은 개수로에 대한 Chezy의 유속 공식으로 구한 값과 일치하는 결과를 가져왔다.

$$U=C(DS_0)^{1/2}=41.42 \times (5 \times 10^{-3})^{1/2}=2.9288 \text{ms}^{-1} \quad (26)$$

여기서 C는 chezy의 유속계수 D는 수심  $S_0$ 는 수로바닥 경사이다. 같은 2차원 천수 방정식을 Upwind Scheme을 사용한 유한차분모형에서는 약 5000회 반복계산에서 같은 값으로 계산에 수렴하였다. 이를 비교할 때 Exponential Scheme을 사용한 유한체적모형에의 적용이 가능하며 또한 Flux의 이동으로 계산되어 지는 관계로 값의 수렴이 유한차분모형보다 빠른 長點을 갖고 있음을 알 수 있었다.

#### 4. 結論

본 연구는 2차원 보존형 수심평균된 천수방정식을 유한체적들을 통과하는 Total Flux의 개념으로 취급할 수 있도록 식을 변환하였으며 Total Flux의 數值解를 구하기 위하여 Exponential Scheme을 사용하여 수치모형을 작성하였다.

Chezy의 유속계산식 값과 일치하는바 모형의 妥當性을 檢證하였으며 또한 빠른 계산수렴으로 전체 계산시간이 줄어드는 장점을 갖고 있는 것으로 나타났다.

수치필터의 사용이 안정된 수렴에 도움을 주었으며 그 값들은  $a=0.6$ ,  $b=0.3$ ,  $c=0.1$ 의 값들이 적합하였다.

#### 4. 參考文獻

1. A.G.L.Borthwick and R.W. Barber, "River and Reservoir Flow Modelling using the Transformed Shallow Water Equations", Int.j.numer.methods in fluids, vol. 14,1193-1217 (1992)
2. C.B Vreugdenhil and J.H.A. Wijnbenga, "Computation of Flow Patterns in River", J.Hydrul.Div., Proc. ASCE, 108, 1296-1310 (1982)
3. H.L. Butler, "Numerical Simulation of Tidal Hydrodynamics, Great Egg Harbour and Corson Inlets, New Jersey", Tech. Rep. H-78-11, U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory, Vicksburg, MS, (1978)
4. P.J. Roach, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishment, (1976)
5. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, (1980)