

# 중확산 거동의 분석을 위한 비정상 이송확산 방정식의 수치모의

田 庚 秀<sup>1)</sup>

## 1. 서론

연직방향 유속분포를 갖는 난류전단 흐름에서의 정상 오염원 확산에 대해서는 수치적 방법 또는 반해석적 방법(McNulty 등, 1984; Nokes 등, 1984)에 의한 여러 연구가 있었으나, 비정상 오염원 확산에 관한 연구는 매우 드물다. 난류전단 흐름내로 방류된 비정상 오염원이 연직방향으로 완전혼합되어 1차원 중확산 방정식에 의하여 해석 가능한 상태에 이르기 전의 초기과정은 2차원 이송확산 방정식에 의한 해석을 필요로 한다. 본 연구에서는 2차원 이송확산 방정식을 종방향 이송방정식 및 연직방향 확산방정식으로 분리하여, 각 방정식을 반시간간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리(fractional step) 유한차분기법을 개발하였다. 종방향 이송방정식에 대한 수치기법으로는 수치분산이나 수치진동이 거의 없는 Holly-Preissmann 기법(Holly 등, 1977; 전경수 등, 1994)을 사용하였으며, 연직방향 확산방정식에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 사용하였다. 정상 수평 선오염원의 확산문제에 적용하여 개발된 모형을 검증하였으며, 비정상 오염원의 중확산 거동을 분석하기 위하여 적용한 일부결과 및 향후 연구과제를 제시하였다.

## 2. 수학적 모형

### 2.1 지배방정식 및 초기, 경계조건

폭방향으로 균일한 1차원 난류전단 흐름에서의 비정상 오염원 확산에 관한 이송확산 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

여기서  $C(x, z, t)$ 는 농도,  $u(z)$ 는 유속,  $\epsilon_z(z)$ 는 연직방향 난류확산계수이며,  $x$ 와  $z$ 는 각각 흐름방향 및 연직방향 공간좌표를,  $t$ 는 시간좌표를 나타낸다. 흐름방향 난류확산항은 이송항에 비하여 매우 작으므로(Fischer 등, 1979) 식 (1)에서 무시되었다. 난류전단 흐름에 대한 유속분포는 다음과 같은 대수유속분포로서 나타낼 수 있다.

$$u(z) = U + \frac{u_*}{\kappa} \left[ 1 + \ln \left( \frac{z}{d} \right) \right] \quad (2)$$

여기서  $\kappa$ 는 von Karman 상수,  $d$ 는 수심,  $U$ 는 연직방향 평균유속이며  $u_*$ 는 마찰속도이다. 난류확산계수의 연직분포는 대수유속분포와 Reynolds analogy로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\epsilon(z) = \kappa u_* z \left( 1 - \frac{z}{d} \right) \quad (3)$$

바닥 및 수면에서의 경계조건은 no-flux 경계조건으로서 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial C}{\partial z} (x, 0, t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial z} (x, d, t) = 0 \quad (5)$$

흐름방향의 상류단 경계조건은 일정농도 또는 영의 농도경사로서 주어질 수 있으며, 또한 초기조건으로서  $x$ - $z$  평면상의 전 영역에서의 초기농도가 주어져야 한다.

### 2.2 수학적 모형의 무차원화

지배방정식 (1)을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$z' = \frac{z}{d} \quad (6)$$

$$x' = \frac{x}{d} \quad (7)$$

$$t' = \frac{td}{u_*} \quad (8)$$

$$u' = \frac{u}{u_*} \quad (9)$$

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{u_* d} \quad (10)$$

$$C' = \frac{C}{C_{ref}} \quad (11)$$

여기서  $C_{ref}$ 는 문제에 따라 적절히 정의되는 기준 농도값이다. 이상에 정의된 무차원 변수들을 사용하여 식 (1)을 다시 쓰면

$$\frac{\partial C'}{\partial t'} + u' \frac{\partial C'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z'} \left( \varepsilon_z' \frac{\partial C'}{\partial z'} \right) \quad (12)$$

식 (2) 및 (3)으로부터 무차원화된 유속 및 난류확산계수 분포식은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u' = \sqrt{\frac{8}{f}} + \frac{1}{k} (1 + \ln z') \quad (13)$$

$$\varepsilon_z' = kz'(1 - z') \quad (14)$$

여기서  $f$ 는 다음과 같이 정의되는 마찰계수이다.

$$f = 8 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2 \quad (15)$$

연직방향 경계조건식 (4) 및 (5)는 각각 다음과 같이 무차원화된다.

$$\frac{\partial C'}{\partial z'} (x', 0, t') = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial z'} (x', 1, t') = 0 \quad (17)$$

흐름방향에 대한 경계조건 및 초기조건 또한 위에서 정의한 무차원 변수들에 의하여 무차원화할 수 있다.

### 3. 계산모형

지배방정식 (12)는 (이하에서는 편의상 무차원 변수를 나타내는 기호 '은 생략하기로 한다.)  $z$  방향에 대해서는 포물선형의(parabolic),  $x$  방향에 대해서는 쌍곡선형의(hyperbolic) 편미분방정식이 된다. 이들 두가지 형태의 방정식은 각각이 갖는 물리적, 수학적 성질이 다르고 따라서 그에 따른 적합한 수치해법 또한 상이하다. 특히 쌍곡선형 방정식은 그 수치해법으로서 일반적인 Eulerian 기법들을 사용할 경우, 수치분산이나 수치진동 현상을 수반하게 되므로(Noye, 1987) 정확성 있는 수치기법의 적용이 요구된다. 이러한 점을 감안하여 본 연구에서는 지배방정식을 종방향 이송 및 연직방향 확산에 관한 방정식인 다음식 (18a)와 (18b)로 각각 분리하고, 이들 각각을 반시간간격에 대하여 번갈아 계산하는 단계분리 유한차분기법을 사용하였다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 2u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq t \leq (n + \frac{1}{2})\Delta t \quad (18a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\varepsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (n + \frac{1}{2})\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (18b)$$

Fig. 1은 이러한 계산과정을 나타내는 모식도이다. 시간준위  $n$ 에서의 기지 농도값들로부터 시간준위  $(n+1)$ 에서의 농도값들을 계산하는데 있어서, 처음 반시간간격에 대해서는  $x$  방향 이송만이 일어나는 것으로 가정하고 식 (18a)를 풀어  $\Delta t/2$  시간 후의, 즉 시간준위  $(n+1/2)$ 에서의 농도값을 계산한다. 이를 기지값으로 하고 다음 반시간간격에 대해서는  $z$  방향 확산만이 일어나는 것으로 하여 식 (18b)로부터 계산된 결과가 시간준위  $(n+1)$ 에서의 농도값이 된다. 단, 이들 과정에서 종방향 이송 및 연직방향 확산의 강도를 각각 실제의 두배로 함으로써, 결국 전체 시간간격에 대해서는 실제와 같은 이송 및 확산이 일어나도록 하는 결과가 된다. 수학적으로는 식 (18a)와 (18b)의 합이 결국 지배방정식 (12)와 일치하게 됨을 알 수 있다.

본 연구에서는 종방향 이송방정식 (18a)에 대해서는 특성곡선을 고려한, 즉 정보전달의 방향성이라는 쌍곡선형 편미분방정식의 특성을 고려한 Eulerian-Lagrangian 방법의 일종인 two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법(Holly 등, 1977; 전경수 등, 1994)을 사용하였으며, 연직방향 확산방정식 (18b)에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용하였다. 각 방법에 대한 설명은 다음과 같다.

### 3.1 종방향 이송방정식에 대한 수치기법

종방향 이송방정식 (18a)는 특성곡선(dx/dt=u)을 따라서 농도가 일정하다는 의미를 갖는다. 따라서 시간준위 (n+1/2)에서 공간좌표  $x = i\Delta x$ ,  $z = j\Delta z$ 인 점에서의 농도값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{i,j}^{n+1/2} = C_{\xi,j}^n \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, I; \text{ and } j = 0, 1, \dots, J \quad (19)$$

여기서 I는 계산영역의 종방향 하류단을 나타내는 격자번호이고  $J = 1/\Delta z$ 이다.  $(\xi_j, n)$ 은 격자점  $(i, j, n+1/2)$ 을 지나는 특성곡선의 시간준위 n에서의 위치로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다(Fig. 1 참조).

$$\xi = i - \frac{u_j \Delta t}{\Delta x} \quad (20)$$

여기서  $u_j$ 는 연직좌표  $z = j\Delta z$ 에서의 유속이다. 일반적으로  $(\xi_j, n)$ 은 격자점상에 위치하지 않기 때문에  $C_{\xi,j}^n$ 의 값은  $(\xi_j, n)$ 에서 가장 가까운 위치에 있는 두 격자점,  $(I1_j, n)$  및  $(I2_j, n)$ 에서의 값들로부터 보간하여 구하게 되는데(Fig. 1 참조), 이를 위한 보간함수로서 본 연구에서는 다음식 (21)과 같은 3차의 다항식을 사용하였다.

$$C_{i,j}^{n+1/2} = C_{\xi,j}^n(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \quad (21)$$

$$r = I2 - \xi \quad (22)$$

여기서 r은 Courant 수( $u_j \Delta t / \Delta x$ )가 1 이하인 경우에는 Courant 수와 같으며, 1 이상인 경우에는 Courant 수에서 정수부분을 제외한 0과 1 사이의 값이 된다. 보간다항식 (21)의 계수값들은 격자점,  $(I1_j, n)$  및  $(I2_j, n)$ 에서의 농도 및 농도의 공간 1계 미분값( $C_x$ )들로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_0 = C_{I2,j}^n \quad (23a)$$

$$a_1 = -\Delta x C_x^n_{I2,j} \quad (23b)$$

$$a_2 = 3(C_{I1,j}^n - C_{I2,j}^n) + \Delta x (C_x^n_{I1,j} + 2C_x^n_{I2,j}) \quad (23c)$$

$$a_3 = 2(C_{I2,j}^n - C_{I1,j}^n) - \Delta x (C_x^n_{I1,j} + C_x^n_{I2,j}) \quad (23d)$$

결국 식 (21)의 적용을 위해서는 각 격자점에서의 C값뿐만 아니라  $C_x$ 값이 주어져야 하는데, 이는 식 (18a)를 x에 대하여 미분함으로써 얻어지는  $C_x$ 에 관한 이송방정식을 풀어서 구하게 된다. 종방향 유속 u는 z만의 함수이므로  $C_x$ 에 관한 이송방정식은 C에 관한 방정식 (18a)와 같은 형태를 갖는다. 따라서 시간준위 (n+1/2)에서의  $C_x$ 값은 C값에 대한 식 (19)와 마찬가지로 다음식 (24)로 나타낼 수 있다.

$$C_x^n_{i,j} = C_x^n_{\xi,j} \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, I; \text{ and } j = 0, 1, \dots, J \quad (24)$$

여기서  $C_x^n_{\xi,j}$ 의 값은 다음식 (25)를 이용하여

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial r} \quad (25)$$

식 (21)로부터 구하면 다음과 같다.

$$C_x^n_{i,j} = C_x^n_{\xi,j}(r) = -\frac{1}{\Delta x} (a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2) \quad (26)$$

따라서 C 및  $C_x$ 에 대한 上流端 경계조건이 주어지면, 이로부터 매 시간준위마다 반시간간격에 대하여 식 (21) 및 (26)에 의하여 C 및  $C_x$ 를 각각 계산하게 된다.

상술한 종방향 이송방정식에 관한 수치기법은 이전 시간준위에서의 특성곡선 통과점 양측의 격자점에서의 값을 사용하여 C 및  $C_x$ 를 근사하므로 무조건 안정하다(Holly 등, 1984; Toda 등, 1987).

### 3.2 연직방향 확산방정식에 대한 수치기법

연직방향 확산방정식 (18b)에 대한 수치기법으로는 포물선형 방정식에 대한 수치기법으로서

널리 사용되고 있는 Crank-Nicholson 기법을 사용하였으며 그에 따른 차분식은 다음과 같다.

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{2(\Delta z)^2} [\varepsilon_{j+1/2}(C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}) - \varepsilon_{j-1/2}(C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}) + \varepsilon_{j+1/2}(C_{i,j+1}^{n+1/2} - C_{i,j}^{n+1/2}) - \varepsilon_{j-1/2}(C_{i,j}^{n+1/2} - C_{i,j-1}^{n+1/2})] \quad (27)$$

for  $j = 1, \dots, J-1$ ; and  $i = 1, \dots, I$

바닥 및 수면에서의 경계조건은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$C_{i,0}^{n+1} = C_{i,1}^{n+1} \quad \text{for } i = 1, \dots, I \quad (28)$$

$$C_{i,J-1}^{n+1} = C_{i,J}^{n+1} \quad \text{for } i = 1, \dots, I \quad (29)$$

상기식들에서 시간준위  $(n+1/2)$ 에서의 값들은 종방향 이송방정식에 대한 계산결과로서 주어지는 기지값이므로, 각 종방향 위치  $i$ 에 대하여 식 (27), (28) 및 (29)는  $(J+1)$ 개의 방정식으로 구성된, 시간준위  $(n+1)$ 에서의 농도값을 미지수로 하는 선형 시스템을 이룬다. 또한 이 선형 시스템에 대한 계수행렬은 삼중대각행렬을 이루어 Thomas algorithm(Carnahan 등, 1969)을 이용하여 해를 구할 수 있다.

종방향 이송방정식에 대한 수치기법이 각 격자점에서의  $C_x$ 값들을 필요로 하므로,  $C$ 뿐만 아니라  $C_x$ 에 관한 연직방향 확산이 또한 계산되어야 한다.  $C_x$ 에 관한 확산방정식 및 경계조건은 식 (27), (28) 및 (29)를  $x$ 에 대하여 미분함으로써 얻어지는데 이들은 상기식들에서  $C$ 를  $C_x$ 로 대체한 똑같은 형태가 된다. 따라서  $C_x$ 에 대한 계산과정도  $C$ 에 대한 경우와 동일하다.

$C$  및  $C_x$ 에 관한 연직방향 확산방정식의 수치모형으로 사용된 Crank-Nicholson 기법은 무조건 안정하고(Abbott 등, 1989) 앞절에서 언급한 바와 같이 종방향 이송방정식에 대한 수치기법으로서 사용된 Holly-Preissmann 기법 또한 무조건 안정하므로, 본 연구에서 사용된 단계분리 유한 차분 기법은 무조건 안정성을 갖는다.

#### 4. 모형의 검증

개발된 계산모형을 검증하기 위하여 공간적으로 균일한 흐름조건에서, 즉 유속과 난류확산계수가 일정한 경우에 중간수심 위치에 주어진 정상 수평 선오염원의 이송확산 문제에 모형을 적용하였다. 계산모형의 초기조건으로는 전 영역에 대하여  $C$  및  $C_x$ 값이 영으로 주어지며, 종방향 상류단에서의 경계조건은  $C_x$ 에 대해서는 영으로,  $C$ 에 대해서는 다음과 같이 주어진다.

$$C_{0,j}^n = c_0 = \frac{1}{\Delta z} \quad (j = \frac{0.5}{\Delta z}) \quad , \text{ for all } n \quad (30a)$$

$$= 0 \quad (j = \text{elsewhere}) \quad , \text{ for all } n \quad (30b)$$

여기서  $c_0$ 는 연직방향으로 완전히 혼합되었을 때의 농도값으로 정규화된 무차원 초기농도이다(전경수 등(1993) 참조). 일정유속 및 난류확산계수 값으로는 난류전단 흐름에 대한 무차원 평균유속 및 난류확산계수인  $\sqrt{8}f$  및  $\kappa/6$ 를 각각 사용하였다. 이 문제에 대해서는 영상오염원 방법에 의한 해석해가 존재하여, 무차원 농도값이 다음과 같은 무한급수로서 주어진다(전경수 등, 1993).

$$C = \frac{1}{\sqrt{4\pi\beta x}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(z+2m+0.5)^2}{4\beta x}\right) + \exp\left(-\frac{(z+2m-0.5)^2}{4\beta x}\right) \right] \quad (31)$$

$$\beta = \frac{\kappa}{6} \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (32)$$

마찰계수  $f = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\Delta z = 0.01$ ,  $\Delta x = 1.0$ 으로 하여 수행된 계산결과를 해석해와 비교하였다. Fig. 2는  $x = 10$  및  $20$ 에서의 계산 농도분포와 해석해와의 비교를 예시하고 있다. 해석해를 위한 영상오염원의 수는  $40$ 개( $m = 0, \pm 1, \dots, \pm 20$ )로 취하였다. 종방향 위치  $x = 10, 20, \dots, 100$ 에서의 계산 농도분포에 대하여 RMS 오차를 계산한 결과, 모든 지점에서 약 1%의 오차를 나타내었다. 또한 연직방향으로 완전혼합된 후의 농도는 약 1.01로서, 실제 농도를 1% 정도 과대평가하는 것으로 나타났다. 완전혼합 농도에 대한 오차는 연직방향 격자간격  $\Delta z$ 를 작게함에 따라, 그에 비례하여 줄어드는 것을 알 수 있었다.

#### 5. 토의 및 향후 연구과제

초기위치  $x = 0$ 에 연직방향으로 균일한 오염원이 순간적으로 방류되었을 경우에 대한 계산

수행하였다. 오염원의 방류위치인  $x = 0$ 을 상류단 경계로 할 경우 C 및 Cx에 대한 상류단 경계 조건을 부여하기 곤란하므로, 상류단 경계지점을  $x = -5$ 로 취하여 C 및 Cx의 값을 항상 영으로 하는 경계조건을 부여하였다. C에 대한 초기조건은 다음과 같다.

$$C_{i,j}^0 = \frac{m_1}{\Delta x} \quad (i = 0) \quad , \text{ for all } j \quad (33a)$$

$$= 0 \quad (i = \text{elsewhere}) \quad , \text{ for all } j \quad (33b)$$

여기서  $m_1$ 은 단위면적당의 오염원 질량이다. Cx에 대한 초기조건으로는 전 영역에 대하여 영의 값을 부여하였다.

Fig. 3은 초기농도를 100으로 하여 계산된 결과를 연직방향으로 평균한 농도값의 종방향 분포를 나타내고 있다. 마찰계수  $f = 0.01$ 의 경우에 대한  $t = 100$  및 200에서의 종방향 농도분포를 비교해 보면, 시간이 지날수록 정규분포형에 접근함을 알 수 있다. 또한  $t = 200$ 에서  $f = 0.01$ 에 대한 농도분포곡선은  $f = 0.01$ 에 대한 곡선과 같은 형태를 갖되 평균유속이 두배이므로(식 (15) 참조) 두배만큼 멀리 이송되었음을 나타내고 있다. 따라서 오염물질이 연직방향으로 충분히 혼합되어 1차원 종확산 방정식에 의하여 해석 가능한 상태에 이르기까지, 즉 연직평균 농도의 종방향 분포형이 정규분포로 수렴하는데 소요되는 무차원 시간은  $f$ 에 관계없이 일정함을 알 수 있다. 또한 이러한 상태에 이르기까지의 유하거리는 마찰계수의 제곱근에 반비례함을 알 수 있다.

무차원 초기시간의 산정을 위해서는 계산결과의 정량적 분석이 더 필요할 것으로 사료되며, 이러한 초기과정에 대한 연직방향 평균농도를 1차원 종확산 방정식으로 모의할 경우의 적절한 종확산계수 산정문제도 향후의 긴요한 연구과제이다.

#### 참고문헌

1. 전경수, 이길성(1993). "亂流剪斷 흐름에서의 定常 水平 線汚染源의 擴散." 大韓土木學會論文集, 제 13권, 제 2호, pp. 191-199.
2. 전경수, 이길성(1994). "종확산 방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법." 大韓土木學會論文集, 제 14권, 제 1호, pp. 131-141.
3. Abbott, M.B. and Basco, D.R.(1989). Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers. Longman Scientific & Technical, London.
4. Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O.(1969). Applied Numerical Methods. John Wiley & Sons, New York, pp. 441-442.
5. Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J., and Brooks, N.H.(1979). Mixing in Inland and Coastal Waters. Academic Press, Orlando.
6. Holly, F.M. and Preissmann, A.(1977). "Accurate calculation of transport in two dimensions." J. Hyd. Div., ASCE, Vol. 103, No. 11, pp. 1259-1277.
7. Holly, F.M. and Usseglio-Polatera, J.M.(1984). "Pollutant dispersion in tidal flow." J. Hyd. Engrg., ASCE, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926.
8. McNulty, A.J. and Wood, I.R.(1984). "A new approach to predicting the dispersion of a continuous pollutant source." J. Hyd. Res., Vol. 22, pp. 147-159.
9. Nokes, R.I., McNulty, A.J., and Wood, I.R.(1984). "Turbulent dispersion from a steady two-dimensional horizontal source." J. Fluid Mech., Vol. 149, pp. 23-34.
10. Noye, J.(1987). "Numerical methods for solving the transport equation." Numerical Modelling: Applications to Marine Systems, ed. J. Noye, Elsevier, Amsterdam, pp. 195-229.
11. Toda, K. and Holly, F.M.(1987). "Hybrid numerical method for linear advection-diffusion." Microsoft for Engineers, Vol. 3, No. 4, pp. 199-205.

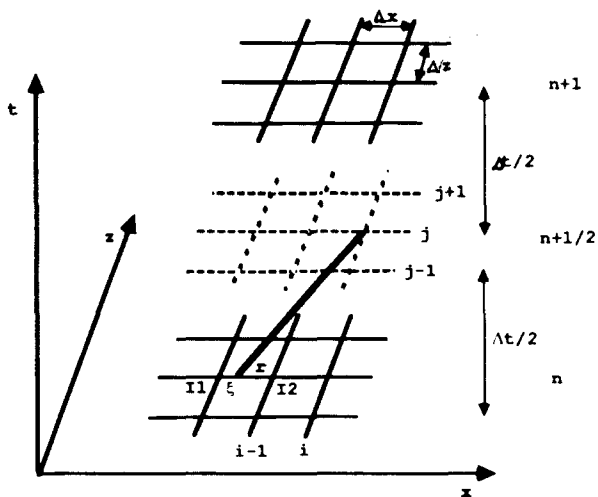
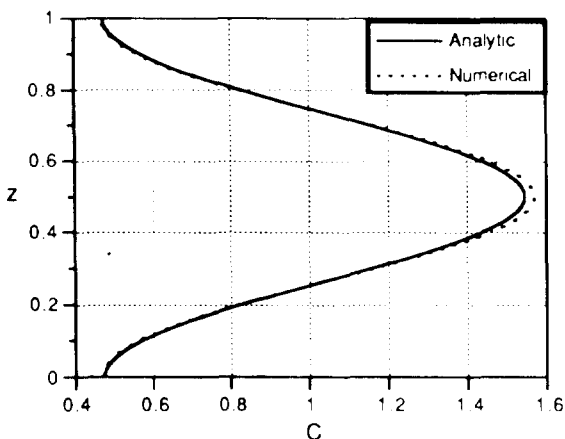
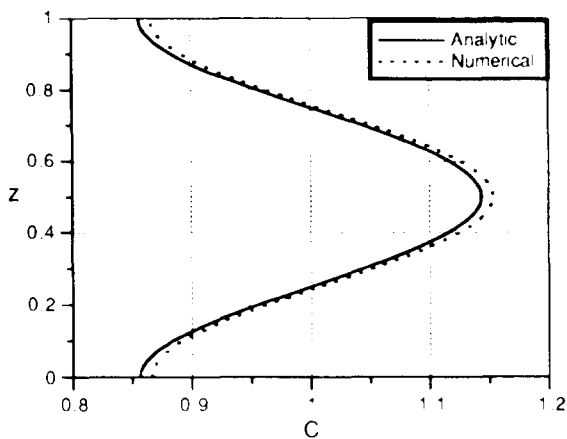


Fig. 1. Schematic Representation of the Numerical Method



(a)  $x' = 10$



(b)  $x' = 20$

Fig. 2. Vertical Concentration Distributions Computed for Steady Line Source

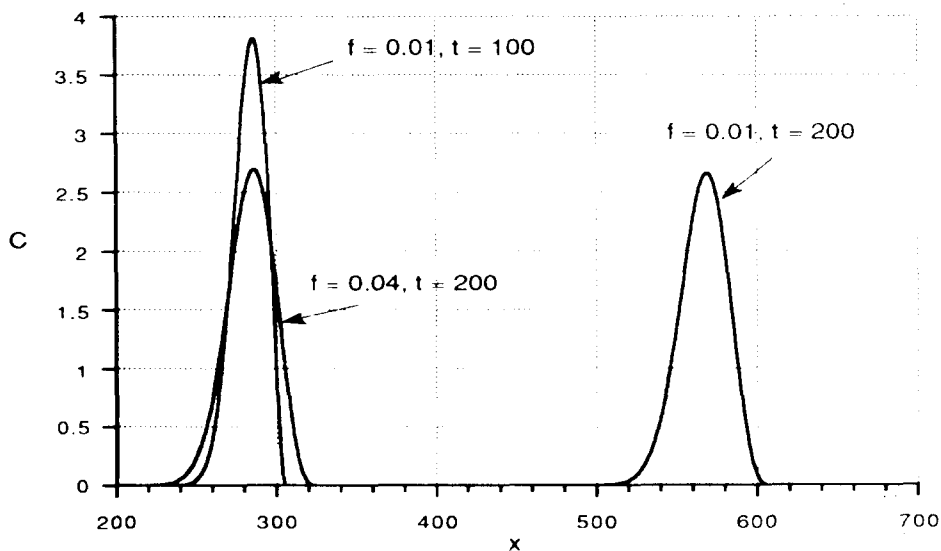


Fig. 3. Depth-Averaged Concentration Distributions Computed for Instantaneous Plane Source