

형상함수를 이용한 절점 속도장에 의한 소성가공 공정의

상계해석

김 영 호*, 배 원 병*, 박 재 우**

* 부산대학교, 정밀정형 및 금형가공 연구소

** 부산대학교 대학원

An Upper bound Analysis of Metal Forming Processes by Nodal Velocity Fields using Shape Function

Young-Ho Kim*, Won-Byong Bae*, Jae-woo Park**

Abstract

The velocity fields can be composed by nodal points using shape function. Forging load and deformed profile are obtained by minimizing total energy consumption rate which is function of unknown velocities at each nodal points. The velocity and streamline distribution can also be investigated at the deformation profile. The effectiveness of proposed method in this paper is demonstrated by comparing with those of FEM and experiment, that is the results of upset forging problem. Obtained results are compared with FEM and experiment, and fairly good agreement is found between them.

1. 서 론

수치적인 방법에 의한 소성가공 문제의 주요 해석방법은 Prager와 Hodge^[1]에 의해 정립된 상계이론을 시점으로 이것을 더욱 더 발전시킨 상계요소법, 유한요소법 등이 있다. 유한요소법은 컴퓨터의 발달에 힘입어 종전에 비해 상당히 계산시간을 줄였지만 아직까지도 현장적용 면에서 연구의 과제로 남아 있다. 상대적으로 상계요소법은 이러한 점에서는 유한요소법에 비해 유리한 점을 가지고 있으나, 범용성의 면에서 떨어지므로 초창기 Kudo^[2]~^[3]와 Kobayashi^[4]를 기점으로 Bramley^{[5]~[7]}, Kiuchi^{[8]~[9]}, Kim^[10] 등 많은 연구자들에 의해 상계요소법의 확장과 개선을 할려는 시도를 해왔다.

그러나 앞서 언급한 범용성의 면을 해결하지 못했기 때문에 현재는 상계요소법에 대한 연구는 줄어들고 있는 추세이다. 상계요소법의 이러한 문제는 평행 속도장인 직각 삼각형과 직사각형에 의한 적용의 한계 때문이다. 이

러한 문제점을 개선하기 위하여 1차변분에 의한 속도장 이전의 물리적인 양인 유동함수를 이용한 속도장 구성이 Shimizu^[11]에 의해 제안되었고, Lin^{[12]~[13]}에 의해 형상함수를 도입함으로써 일반화되었다. 그리하여 유동함수에 의한 속도장 구성은 더 이상 평행 속도장인 직각 삼각형이나 직사각형에 국한되지 않고, 임의의 형상의 속도장을 구성할 수 있다는 점에서 대단한 진전이라 할 수 있다. 예너지 소비율을 최소로 하는 최적의 속도 불연속경계도 얼마든지 얻어질 수 있다. 또한 그렇게 구성된 속도장은 유동함수의 성질상 비압축성 조건을 자연히 만족함으로 상계요소법에서의 속도장 구성의 어려움이 대폭 줄어들었다고 할 수 있다.

그러나 유동함수를 이용한 속도장 구성에도 문제점은 있다. 즉 유동함수 자체가 일반적으로 2차원까지 밖에 정의할 수 없는 한계가 있다. 그리하여 최근 더욱 일반화된

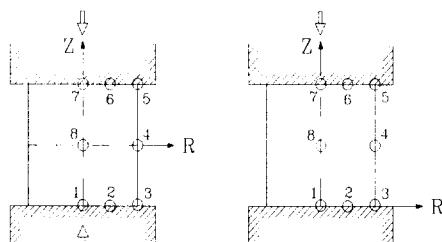
속도장을 구성하려는 노력이 Jiang^[14]에 의해 시도 되었다. Jiang도 Shimizu와 마찬가지로 수치해석에 의해 해결하려는 시도를 하였나, 제시한 속도장 그 자체를 일반화시키지는 못하였다.

그리하여 본 논문에서는 형상함수를 도입하여 절점에 의한 속도장을 일반화하여 범용성을 갖도록 구성하고 간단한 업셋단조 문제에 적용하여 유한요소법 및 실험과 비교하고 본 연구에서 제시한 상계해법의 타당성을 검토하고자 한다. 또한 마찰조건에 따른 별징 형상(burging profile)의 변화와 속도분포 그리고 유선의 모양도 조사하고자 한다.

2. 이론 해석

2.1 동적가용속도장

속도장은 각각의 주어진 요소에 해당하는 형상함수와 그 절점에서의 속도 성분으로 구성된다. 주어진 요소의 형상이 삼각형이면 그에 해당하는 삼각형 요소의 형상함수를 사용하고, 사각형이면 사각형 요소의 형상함수를 사용한다. 간단한 축대칭 업셋팅 문제에 대해 사각형 요소의 8절점으로 Fig.1과 같이 반단면에 번호를 붙인다. 각 절점에서 속도성분은 (\dot{U}_r , \dot{U}_z)이다. 따라서 속도장은 다음과 같다.



(a) Moving both upper die (b) Moving only upper die and lower die

Fig. 1 Boundary condition for upset forging

$$\begin{aligned}\dot{U}_r &= \sum_{k=1}^n N_k \dot{U}_{Rk} \\ \dot{U}_z &= \sum_{k=1}^n N_k \dot{U}_{zk} \\ \dot{U}_\theta &= \sum_{k=1}^n N_k \dot{U}_{\theta k}\end{aligned}\quad (1)$$

여기서 N_k 는 형상함수를 나타낸다.

2.2 변형률 속도

변형률 속도는 속도장의 일차변분으로 구성되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial r} \dot{U}_{Rk} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{\dot{U}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{r} \dot{U}_{Rk} \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial z} \dot{U}_{zk} \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial z} \dot{U}_{Rk} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial r} \dot{U}_{zk} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

여기서 n 은 절점의 수를 나타낸다.

2.3 구성된 속도장에 대한 구속조건

속도장으로서의 역할을 하기 위해서는 비압축성 조건 또는 체적일정 조건이 만족되어야 한다. 기존의 상계해석이나 UBET에서는 처음부터 체적일정조건에 근거하여 속도장을 구성했다. 그러므로 속도장을 구성하기는 어려웠지만 일단 알맞게 속도장만 구성되면 전체 에너지 소비율을 과하중을 계산하는 것은 용이했다.

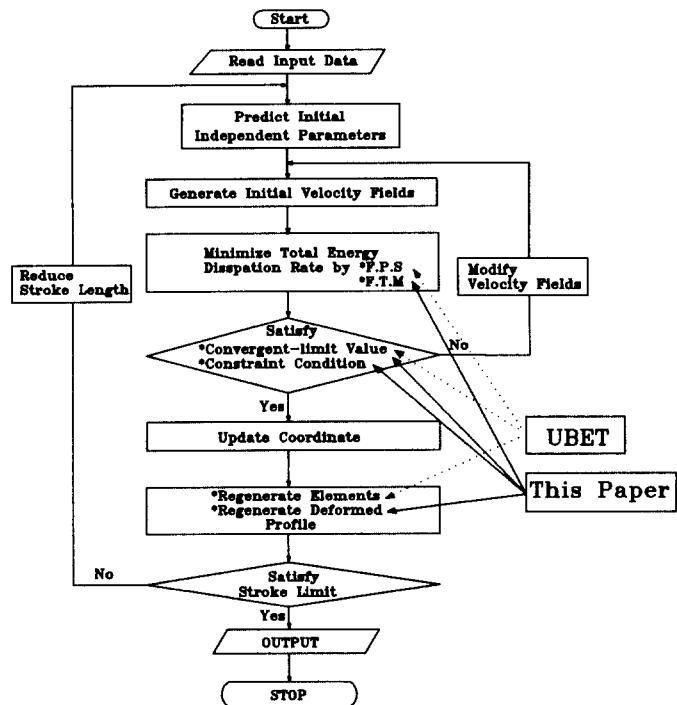


Fig.2 Algorithm difference between UBET
and this paper

그러나 본 논문의 절점에 의한 속도장은 체적일정조건에 근거한 속도장이 아니라 가정에 의해 그 변형모양에 맞게 형상함수로 구성된 속도장이고 체적일정조건은 전체 에너지 소비율을 최소화하는 과정에서 구속조건으로 만족되도록 구성된다.

Fig.2는 기존의 UBET와 본 연구에서 제시한 상계해석에 대해 알고리즘의 차이를 보여 주고 있다. 일반적으로 평면변형이나 축대칭에 대해서는 유량의 출입관계를 고려하면 쉽게 체적일정조건을 만족시킬 수 있다. 유량에 대한 기하학적 관계식은 Fig.3과 같다.

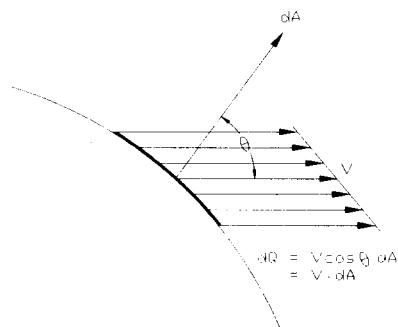


Fig.3 Geometric expression of $dQ=V \cdot dA$

2.4 인접 변형영역사이의 속도불연속량

절점 (1,2), (3,4), 그리고 (5,6)에 의해 정의된 속도불연속의 전형적인 형태가 Fig.4에 나타나 있다. 속도불연속점에서 각각의 절점(i,j)에서 수직과 접선속도 방향 변화는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U^{\parallel}_{ij} &= \cos \theta (U_j - U_i) + \sin \theta (V_j - V_i) \\ U^{\perp}_{ij} &= \sin \theta (U_j - U_i) + \cos \theta (V_j - V_i) \end{aligned} \quad (3)$$

속도경계에서 불연속인 각 점에서 $U^{\perp}_{ij} = 0$ 임을 의미하는 구속조건을 취함으로써 인접변형영역 사이의 수직속도 연속조건을 만족시킨다. 여기서 (i,j)는 절점 (1,2), (3,4), 혹은 (5,6)의 값을 취하고, θ 는 r(평면변형일 때 x)축과 불연속점과 이루는 각이다.

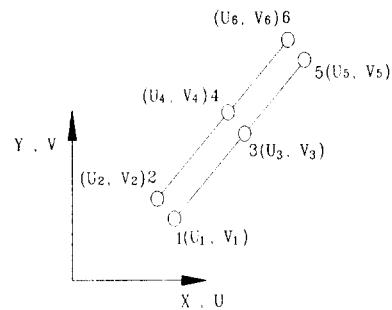


Fig.4 Quadratic velocity discontinuity

2.5 에너지 소비율

상계이론은 Prager와 Hodge에 의해 정립되었으며, 동적 가용속도장으로 부터 유도된 변형률 속도장의 함수로서 다음 식을 최소로 하는 것이다.

$$J^* = \int_v \overline{\sigma} \cdot \overline{\epsilon} dV + \int_s \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{3}} |\Delta v| dS + \int_s m \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{3}} |\Delta v| dS \quad (4)$$

실제 외부에서 공급된 일을 J^* 는 식(4)를 이용해서 계산된 것보다 작거나 같다. 첫번째 항은 내부변형에너지 소비율 \dot{W}_v 를 나타낸다. 두번째 항은 요소와 요소 사이의 속도불연속면에서 전단에너지 소비율 \dot{W}_s 을 나타내며, 마지막 항은 공구와 재료 사이의 경계에서 마찰에 의해 소비된 일을 ' \dot{W}_m '을 나타낸다.

주어진 상계식(4)은 구속조건이 있는 비선형 함수를 최소화하는데 사용되는 FTM^[15]에 의해 최소화 된다. 그리하여 이렇게 구한 전체 에너지 소비율로 부터 변형에 요구되는 하중을 구하게 된다.

2.6 최적화

2.6.1 FTM(Flexible Tolerance Method)

일반적으로 FTM은 비선형의 다변수 함수를 구속조건을 가지면서 최적화를 수행하는 기법이다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } y &= f(X) , \quad X \in E^n \\ \text{Subject : } h_i(X) &= 0 , \quad i=1, \dots, m \\ g_i(X) &= 0 , \quad i=m+1, \dots, p \end{aligned}$$

여기서 $f(X)$ 는 최적화될 목적함수, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

n 개의 변수를 갖는 n -차원 공간에서 column vector 이고, $h_i(X)$ 는 등호 구속조건, $g_i(X)$ 는 부등호 구속조건이다.

2.6.2 최적화 변수

Fig.1의 업셋단조의 경우 각각의 절점에서 알 수 있는 것과 없는 속도는 프로그램에서 경계조건으로 입력된다. 그것에 대한 관계가 Table 1에 주어져 있다.

Table 1 Variable value of nodal points

Moving both upper die and lower die			
nodal points	r-direction velocity	z-direction velocity	
1	O	O	
2	X	O	
3	X	O	
4	X	O	
5	X	O	
6	X	O	
7	O	O	
8	O	O	

X : unknown variable
O : known variable

Moving only upper die			
nodal points	r-direction velocity	z-direction velocity	
1	O	O	
2	X	O	
3	X	O	
4	X	X	
5	X	O	
6	X	O	
7	O	O	
8	O	X	

X : unknown variable
O : known variable

3. 수치 결과 및 고찰

유도된 속도장으로부터 구성된 상계 에너지 소비율식은 상·하·다이의 마찰조건에 관계없이 업셋단조에 적용될 수 있다. Fig.5는 상·하·다이의 마찰조건이 같은 업셋팅에서 변위(stroke)에 따른 하중선도를 유한요소법 그리고 실험값과 비교하여 도시한 그래프이다. 여기서 알수 있듯이 상당히 좋은 일치를 보여주고 있다.

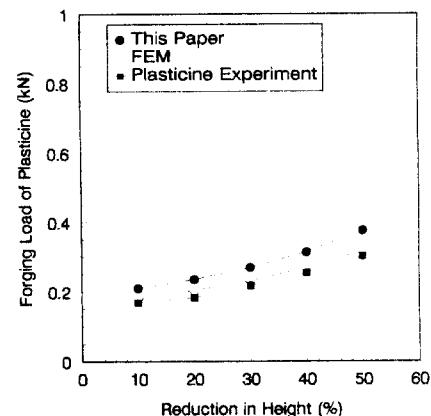


Fig.5 Variation of forging loads according to stroke for the same friction conditions of upper and lower die

다음으로 Fig.6은 Fig.5의 경우에 대해 목적함수가 FTM에 의해 구속조건을 가지면서 최적화될 때 각 단계에서 반복되는 횟수와 목적함수 값은 찾아가는 과정을 도시한 것이다. 반복횟수가 증가함에 따라 최적의 해에 잘 수렴하는 것을 알 수 있다. 또한 단계마다 반복되는 횟수에 차이를 가지면서 최적화되는 것을 알 수 있다.

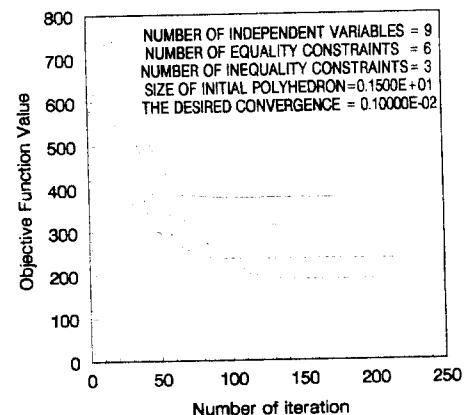
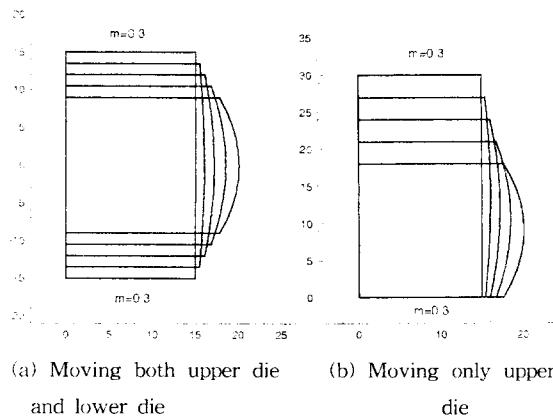


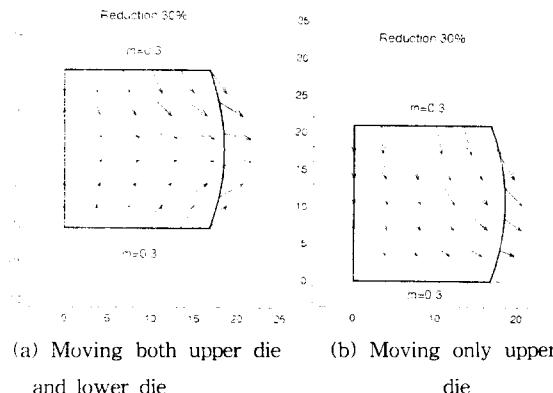
Fig.6 Minimization processing by F.T.M

Fig.7은 여러 단계의 높이 감소율에서 상·하 다이가 같이 움직일때와 상 다이만 움직일때 벌징 형상의 계산 결과를 나타낸 것이다. 결국 물리적으로 같은 결과를 초래함을 알 수 있다. Fig.8은 Fig.7의 경우 30% 높이 감소율에서 속도분포를 나타낸 것이고, Fig.9는 그때의 유선(streamline)의 모양을 나타낸 것이다.



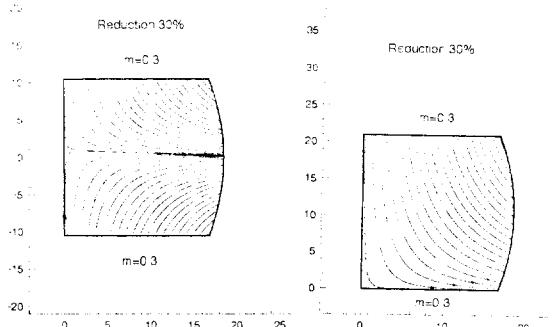
(a) Moving both upper die (b) Moving only upper
and lower die die

Fig.7 Burging profile for the same friction conditions
of upper and lower die



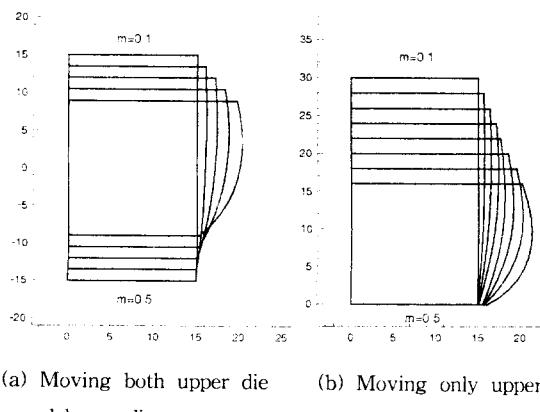
(a) Moving both upper die (b) Moving only upper
and lower die die

Fig.8 Velocity distributions at 30% reduction for the
same friction conditions of upper and lower die



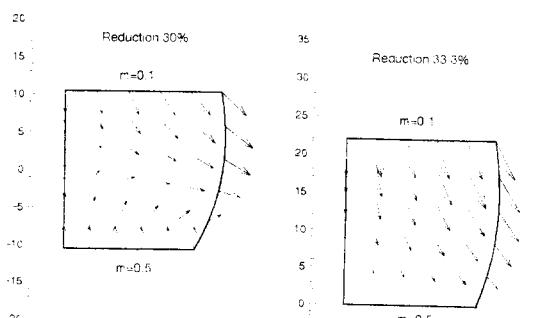
- (a) Moving both upper die (b) Moving only upper
and lower die die
- Fig.9 Streamline distributions for the same friction
conditions of upper and lower die

또한 상·하 다이의 마찰조건을 달리하면서 벌징 형상, 속도분포, 유선의 모양 등을 조사하는 것은 흥미로운 일 것이다. Fig.10은 상·하 다이의 마찰조건이 다른 경우 여러 단계의 변위에서 벌징 형상을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 마찰이 적은 부분에서는 쉽게 밖으로의 유동이 일어나고, 상대적으로 마찰이 큰 부분은 밖으로의 유동이 적은 것을 알 수 있다. 이런 경우 본 논문에서는 고려하지 않았지만 마찰이 큰 부분에서 쉽게 폴딩(folding)이 일어남을 알 수 있다.



(a) Moving both upper die (b) Moving only upper
and lower die die

Fig.10 Burging profile for the different friction
conditions of upper and lower die



(a) Moving both upper die (b) Moving only upper
and lower die die

Fig.11 Velocity distributions at 30%, 33.3% reduction for
the different friction conditions of upper and lower die

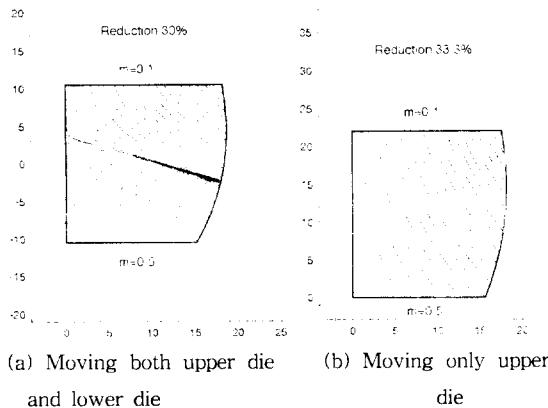


Fig.12 Streamline distributions for the different friction conditions of upper and lower die

Fig.11은 Fig.10의 경우에 대해 높이 감소율 30%, 33.3%에서 속도 분포를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 상·하 다이가 같이 움직일때와 상 다이만 움직일때 물리적인 결과는 같지만 재료 내부의 유통특성은 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 상·하 다이가 움직이면서 마찰조건이 다른 경우 마찰이 큰 쪽으로 유통이 치우침을 알 수 있다. 상 다이만 움직일때는 마찰이 작은 쪽에서 큰쪽으로 점점 속도 분포의 크기가 줄어듬을 알 수 있다.

본 논문에서 제시한 절점에 의한 속도장으로 해석할 경우 초기 경계조건과 구속조건만 알맞게 주어진다면 관심있는 단계에서 필요한 정보를 쉽게 얻을 수 있을 것이다.

4. 결론

동적가용 속도장이 형상함수를 이용하여 절점에 의해 간단하게 구성되었다. 구성된 속도장으로 부터 단조하-증과 벌징 형상(burging profile)이 속도장의 각 절점에서 알지 못하는 속도성분을 독립변수로 두어 이 독립변수에 대해 전체 에너지 소비율을 최소화함으로써 구해졌다. 소성변형에 대해 이론적인 예측과 유한요소 그리고 실험값 사이의 좋은 일치를 보였다.

본 논문에서 제시한 전체 소성변형 영역을 형상함수를 이용해 구성된 절점 속도장으로 부터 시뮬레이션한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 속도장 구성이 쉬우며, 형상함수로 표현 가능한 변형 장은 이러한 개념의 속도장으로 해석 가능하다. 즉, 소

성변형 영역이 직각삼각형, 직사각형, 부채꼴, 사다리꼴 등 일정한 모양을 갖지 않는 경우라도 해석이 가능하다.

- 2) 절점수를 증가시키면 증가시킬 수록 이렇게 구한 고차 요소를 이용한 속도장은 정해에 가까운 해를 얻을 수 있을 것이다.
- 3) 기존의 상계해법, UBET 이론과 다른 점이 체적일정 조건이나 비압축성 조건이 결여된 속도장을 가정한다는 것이다. 그러나 이러한 조건들은 전체 에너지 소비율을 최적화하는 과정에서 구속조건으로 만족시키게 되어 기존의 UBET에 비해 속도장 구성이 쉬워졌다.

후기

본 연구의 일부는 정밀정형 및 금형가공 연구소의 국외교육 연수 사업에 의해 연구되었으며, 이에 감사를 드립니다.

[참고문헌]

1. W.Proger , P.G.Hodge, Theory of Perfectly Plastic Solids, Chapman and Hall, London, 1951
2. H.Kudo, "An Upper-Bound Approach to Plane-strain Forging and Extrusion- I,II," Int. J. of Mech. Sci, Vol.1, pp.57-83, pp.229-252, 1960
3. H.Kudo, "Some Analytical and Experimental Studies of Axisymmetric Cold Forging and Extrusion- I,II," Int. J. of Mech. Sci, Vol.2, pp.102-127, Vol.3, pp.11-117, 1960
4. S.Kobayashi, "Upper Bound Solutions of Axisymmetric Forming Problems- I,II," J. Eng. for Ind. Trans. ASME, Vol.86, pp.112-126, pp.326-332, 1964
5. R. P. McDermott, A.N.Bramley, "Forging Analysis-A New Approach", 2nd NAMRC Conf., pp.35-47, 1974
6. A.S.Cramphorn, A.N.Bramley, R.P.McDermott, "UBET Related Developments in Forging Analysis", 4th NAMRC Conf., pp.80-86, 1976
7. A.S.Cramphorn, A.N.Bramley, "Computer Aided Forging Design with UBET", Proc. 18th Int. MTDR Conf., pp.717-724, 1977
8. M.Kiuchi, S.Shigeta, "Application of Upper Bound

- Elemental Technique(UBET) to Axisymmetric Forging Process", JSTP, Vol.22, No.251, pp.1208-1214, 1981
9. M.Kiuchi, A.Karato, "Application of (UBET) to Non-Axisymmetric Forging Process", Advanced Technology of Plasticity, Vol.2, pp.967-972, 1984
10. 김현영, UBET를 이용한 형단조 예비가공형 설계, 박사학위논문, 서울대학교, 1990
11. T.Shimizu, K.Ohuchi & T.Sano,"An application of stream function to UBET", Numerical Methods in Industrial. Forming.Processes., Vol.2, pp.651-656, 1992.
12. Y.T.Lin, J.P.Wang, "A new upper-bound elemental technique approach to axisymmetric metal forming process", Int. J. Mach. Tools Manufact. Vol.33. No2 pp135~151, 1993.
13. J.P.Wang, Y.T.Lin, "The load analysis of the plane strain forging process using the upper-bound stream-function elemental technique", J. of Mat. Proc. Tech., Vol.47, pp.345-359, 1995
14. Jian Qin,"An Upper bound approach to plane-strain problems using a general triangular element", J. of M. Pro. Tech., Vol.40, pp.263-270, 1994
15. D.M.Himmelblau, Applied Nonlinear Programming ,McGraw-Hill, New York, pp.341-365, 1972