

Voronoi 도형을 이용한 자유곡선의 옵셋팅

정재훈, 김광수
포항공대 산업공학과 CAD/CAM 연구실

Voronoi diagrams for closed shapes have many practical applications, ranging from numerical control machining to mesh generation. Shape offset based on Voronoi diagram avoids the topological problems encountered in traditional offsetting algorithms. In this paper, we propose a procedure for generating a Voronoi diagram and an exact offset for a planar curve. A planer curve can be defined by free-form curve segments. The procedure consists of three steps : 1)segmentation by minimum curvature, 2)construction of Voronoi diagram, and 3)generation of the exact offset.

서론

옵셋은 주어진 대상을 일정한 범위까지 확장하는 역할을 수행하는 기하학적 오퍼레이션이다. 옵셋 곡선의 생성은 CAD와 CAM의 중요한 기능중의 하나로 자리잡고 있다. 예를 들면 NC 포켓가공이나 VLSI 회로디자인 그리고 로보트 경로계획등의 다양한 응용분야에서 offset 곡선을 필요로 한다. 이러한 필요성에 의하여 많은 연구자들이 offset 곡선의 생성에 대한 연구를 수행하고 있다. [1-10]

일반적인 곡선에 대한 offset에서는 self-intersection, loop 그리고 cusp과 같은 많은 문제가 발생한다. 이

러한 degeneracy를 해결하기 위하여 많은 논문들이 나왔지만 대부분이 원호와 직선의 경우에 대해서만 다루고 있고 자유곡선에 대한 degeneracy를 해결하는 연구는 그렇게 활발하지가 않았다. [1, 5, 6, 7, 8, 10] 자유곡선에 대한 offset 수행시 생기는 degeneracy처리 방법은 크게 3가지로 분류된다. 첫번째로 Hoschek [1], Tiller [6], Suh & Lee [8] 등은 offset 곡선을 방향성을 가지고 있는 loop라 생각하고 유효하지 않는 방향성을 가지는 loop를 제거하는 방식으로 자유곡선에 대한 offset을 수행하였다. 이 방법은 기본개념은 단순 하지만 많은 양의 계산을 필요로 하고 제한된 형태에 대해서만 수행이 되는 단점이 있다. 두번째 방법은 본질적으로 degeneracy가 제거되는 유진의 원리 (Huygens principle)를 이용하는 방법이다. Kimmel [7]과 Mikheev [10]는 유진의 원리를 응용하여 자유곡선에 대한 offset을 구하였지만 자유곡선을 사각형의 격자위에 양자화하고 불연속적인 (discrete) 점들에 대하여 offset을 구하는 것이기 때문에 정밀한 offset 곡선을 구하기가 힘들다. 마지막으로 본 연구에서 제안하는 Voronoi diagram을 이용한 offset 곡선의 생성방법을 들수가 있다. Voronoi diagram은 패턴인식, 컴퓨터 그래픽스, 로보틱스 등 여러 분야에서 연구되어 왔다. Lee [11]는 n

개의 정점을 갖는 단순다각형이 주어질 때 $O(n\log n)$ 시간에 Voronoi diagram을 구하는 알고리듬을 개발하였고 Held[12]는 원호와 직선으로 이루어진 포켓형상에서 최적화된 공구경로를 생성하기 위하여 Voronoi diagram을 이용하였다. Voronoi diagram을 이용한 approach에서도 원호와 직선에 대한 offset곡선의 생성에 대한 연구는 활발한 반면에 경계곡선이 자유곡선으로 이루어진 형상에 대한 연구는 미미하였다. 본 논문에서는 처음으로 자유곡선으로 이루어진 planar shape에 대하여 Voronoi diagram을 구성하고 degeneracy 문제가 해결된 offset 곡선을 정확히 구하는 알고리듬을 제시한다. 이 알고리듬에서는 loop approach의 단점중의 하나인 유효하지 않은 loop를 유효한 loop로 오인하는 문제등이 발생하지 않으며 격자점위에서 유진의 원리를 응용하는 알고리듬[7, 10]들이 단점으로 가지는 정밀도를 극복하였다. Offset 곡선을 구하기 위하여 1) curvature에 따라 포켓의 경계를 이루는 자유곡선들을 적절히 분할(segmentation)하고, 2) 분할된 성분들을 바탕으로 하여 자유곡선에 대한 Voronoi diagram을 구성하며, 3) Voronoi diagram이 구성되면 본 연구에서 제시한 방법에 따라 특정한 offset 거리값에 대한 offset곡선을 정확히 구할 수 있다.

Segmentation of Curved Objects.

곡선상에서 offset을 수행할때 국부(local) 적으로 가장 큰 curvature 값보다 offset 거리가 더 크게되면 cusp, loop와 같은 degeneracy가 발생한다. 이러한 degeneracy는 curvature가 가장 큰곳으로부터 먼저 생기는데 만일 이러한 기하학적인 성질을 고려하지 않고 Voronoi diagram을 구성하면 offset

을 수행할 때 degeneracy가 발생할 수 있다. 이것을 방지하기 위하여 curvature값에 따라서 폐경계곡선을 이루는 곡선성분들에 대한 segmentation을 수행한다. segmentation이 수행되면 하나의 곡선성분이 segmentation이 수행된 곳에서 두개의 성분으로 나뉘어진다. 나중에 이 두개의 성분을 이용하여 bisector를 만들게 되면 곡선성분내부에서 발생하는 loop와 cusp등을 제거할 수 있다. segmentation은 양의 값을 가지는 curvature중에서 국부적으로 가장 큰 값을 가지는 부분에서 행해진다. 그림 1은 예제1을 segmentation한 결과인데 경계를 이루는 세개의 곡선성분 s_1, s_2, s_3 는 segmentation을 거쳐 6개의 곡선성분으로 나뉘어진다.

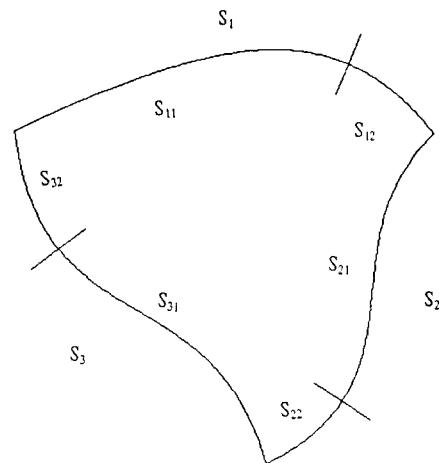


그림1 예제1의 segmentation

Voronoi diagram of Curve Segments

Voronoi 엣지를 이루는 두 곡선의 bisector는 다음과 같은 조건식들로 표현된다.

$$S_f = (x - f_1(u))^2 + (y - f_2(u))^2 - r^2 = 0$$

$$S_g = (x - g_1(v))^2 + (y - g_2(v))^2 - r^2 = 0$$

$$\frac{\partial S_f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial S_g}{\partial v} = 0 \quad (4), (5), (6), (7)$$

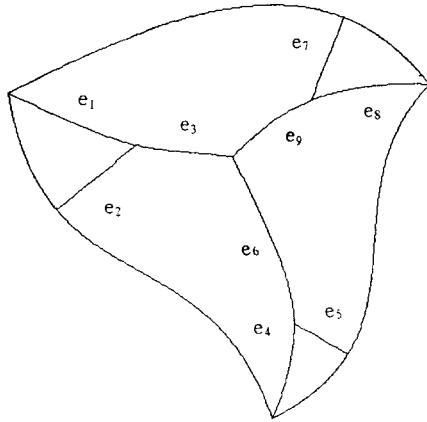
식 (4), (5)는 $f(u)$, $g(v)$ 곡선에서 r 만큼 떨어진 점들의 자취를 말하며 식 (6), (7)은 곡선의 접선과 수직이 되는 직선위의 점을 의미한다. 따라서 이 네 식을 만족하면 두 곡선에서 같은 거리에 있는 offset 점이 된다.

bisector의 조건식에는 x, y, u, v, r 의 다섯개의 변수와 4개의 식이 들어있다. 즉 자유도가 하나이므로 5차원상의 커브가 된다. 본연구에서는 Hoffmann [13, 14]에 의하여 연구된 곡선추적 (curve tracing) 방법을 이용하여 두 곡선의 bisector를 구하였다.

곡선추적 방법은 bisector를 따라가면서 bisector위의 점들을 구하는 것이다. 추적에서 얻어진 점들은 위에서 언급한 4개의 식을 만족하는 (x, y, u, v, r) 등의 5개의 값을 가지고 있는 5차원상의 점이다. Voronoi diagram이 구성되면 하나의 offset 거리값에 대한 offset곡선을 구할 수가 있어야 한다. 즉, offset곡선을 구하기 위한 입력으로는 offset거리값만 존재하게 된다. 따라서 추적에서 구해진 bisector상위의 점들을 offset 거리 r 을 파라미터로 하는 4차원 $(fx(r), fy(r), fu(r), fv(r))$ 의 B-spline 으로 fitting한다. B-spline 곡선은 Voronoi diagram이 구성된 후 offset을 수행할 때 bisector상의 정확한 파라미터값 (xt, yt, ut, vt, d) 을 알기위한 시작 점 (initial point)으로 쓰인다. (offset of curved object 참조) 그림 2는 bisector의 병합과정을 거쳐 최종적으로 생성된 예제1의 Voronoi diagram 보여주고 있다.

Offset of Curved Objects

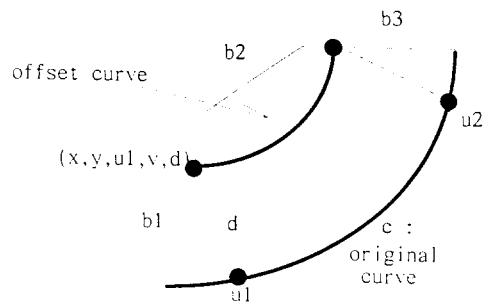
다음은 하나의 Voronoi area(그림 3에서 $c, b1, b2, b3$ 로 둘러싸인 영역)에서 offset 세그먼트를 구하는 방법이다.



e_i : Voronoi 엣지

그림 2 예제1의 Voronoi diagram

- 1) offset 거리 d 를 결정한다.
(그림 3에서 d)
- 2) 모든 bisector는 offset거리 r 을 파라미터로 하는 B-spline 함수로 이루어져 있으며 하한한계와 상한한계의 offset거리 정보를 가지고 있다. 곡선 c 를 둘러싸고 있는 bisector중에서 offset 거리 d 가 하한한계와 상한한계에 포함되는 bisector를 찾아낸다. (그림 3에서 $b1, b3$)
- 3) offset 거리 d 를 input으로 하여 bisector상의 한점의 위치 (x, y) 와 원래의 곡선상의 파라미터 u 값을 얻어낸다.
- 4) 3)에서 얻어진 값을 초기값으로 하여 수치 기법을 동원하여 정확한 곡선의 파라미터를 구한다. (그림3에서 $u1, u2$)
- 5) 4)에서 얻어진 파라미터값의 내부에서는 degeneracy가 발생하지 않는다. 따라서 이 구간 $[u1, u2]$ 에 대한 offset 을 바로 구하면 된다.



c : original curve segment
 b₁, b₂, b₃ : c 가 가지는 bisector
 d : offset distance
 [u₁, u₂] : degeneracy가 발생하지 않는
 파라미터 구간

그림 3 곡선성분의 offset

Examples

그림 4는 예제1의 offset곡선을 구한것이다. 그림5는 내부에 island를 가지고 있는 폐경계곡선에 대한 Voronoi diagram과 offset곡선들을 구한 것이다. a)는 두개의 경계곡선이며 b)는 두개의 경계곡선을 최소거리로 연결할수 있는 부분을 찾아 연결하여 하나의 경계곡선태로 만든것이며 (c), (d)는 Voronoi diagram과 offset을 각각 구한 것이다.

결론

본 논문에서는 loop나 self-intersection등의 위상학적인 문제가 자연적으로 제거되는 Voronoi diagram을 이용하여, 자유곡선으로 이루어진 포켓형상에 대한 offset을 구하는 새로운 알고리듬을 제시하였다. 이방법은 곡선성분의 segmentation을 통하여 loop나 self-intersection이 완전히 제거되는 특징을 지니고 있으며 종래의

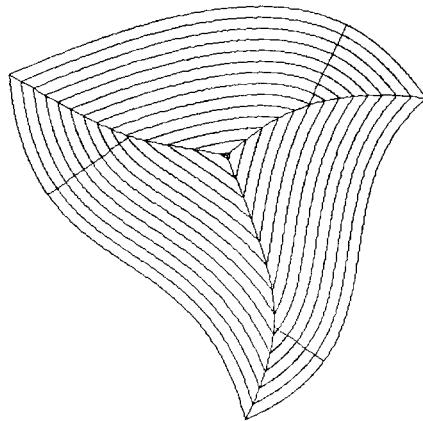
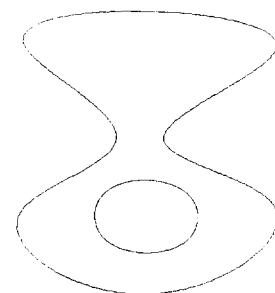
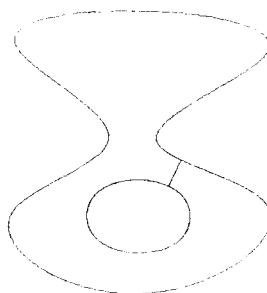


그림4 예제1의 offset곡선

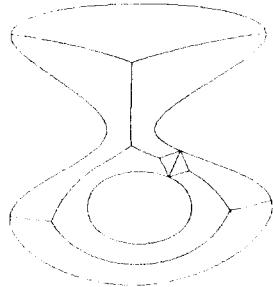


(a) island가 있는 경계곡선

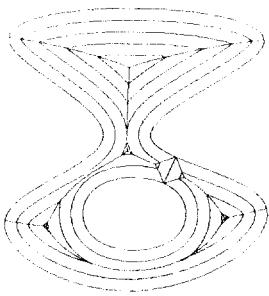


(b) 최소거리로 연결된 경계곡선

그림5 예제2의 offset



(c) Voronoi diagram



(d) offset 곡선

자유곡선 offset 알고리듬에 비하여 정확히 offset 곡선을 구할 수 있는 장점을 가지고 있다. 자유곡선에 대한 Voronoi diagram은 curvature에 따른 곡선의 segmentation과 곡선 추적방법에 의한 bisector의 생성 그리고 bisector의 병합과정에 의하여 완성된다. 외부 형상에 대한 Voronoi diagram이 완성되면 본 연구에서 제안된 방법에 따라 위상학적인 문제가 제거된 자유곡선의 offset곡선을 정확히 구할 수가 있다.

참고문헌

- [1] Josef Hoschek, "Offset curves in the plane", *Computer Aided Design*, 17 (2), 77-82 (1985).
- [2] Allan Hansen and Farhad Arbab, "An Algorithm for Generationg NC tool Paths for Arbitrarily Shaped Pockets with Islands.", *ACM Transactions on Graphics*, 11 (2), 152-182 (1992).
- [3] Kenneth Preiss, "Automated Mill Pocketing Computations", *Advanced Geometric Modelling for Engineering Applications*, Elsevier (1990).
- [4] S E O Saeed, A de Pennington and J R Dodsworth, "Offsetting in geometric modelling", *Computer Aided Design*, 20 (2), 67-74 (1988).
- [5] Kwangsoo Kim and Jaehun Jeong, "Tool Path Generation for Machining Free-Form Pockets with Islands", *Computers ind. Engng.*, 28 (2), 399-407 (1995).
- [6] Wayne Tiller and Eric G. Hanson, "Offsets of Two-Dimensional Profiles", *IEEE Computer Graphics & Application*, 4, 36-46 (1984)
- [7] R Kimmel and A M Bruckstein , Shape Offsets via level sets", *Computer Aided Design*, 25 (3), 154-162 (1993).
- [8] Yong Seok Suh and Kunwoo Lee, "NC milling tool path generation for arbitrary pockets defined by sculptured surfaces", *Computer Aided Design*, 22 (5), 273-284 (1990).
- [9] Sabine Coquillart, " Computing offsets of B-spline curves", *Computer Aided Design*, 19 (6), 305-309 (1987).

- [10] A. Mikheev, M. Nozik and j. Rubinstein, " Computation of Offset Curves by the Huygens Principle", *Computer Graphics Forum*, 13 (4), 249-252 (1994)
- [11] D. T. Lee , " Medial Axis Transformation of a Planar Shape", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4 (4), 363- 369 (1982) .
- [12] Martin Held, On the Computational Geometry of Pocket Machining, Springer-Verlag (1991) .
- [13] Christoph M. Hoffmann, "A dimensional paradigm for surface interrogations", *Computer Aided Design*, 7, 517-532 (1990) .
- [14] Christoph M. Hoffmann, " Geometric and Solid Modeling : An Introduction, Morgan Kaufmann (1989)