

유연성 영향 계수를 이용한 구조물의 결합부 해석

이재운,* 고강호,** 이수일,** 이장무***

Analysis of Structural joints Using Flexibility Influence Coefficient

Jae Woon Lee,* Kang Ho Ko,** Soo Il Lee,** Jang Moo Lee***

* 현대정공(주) 기술연구소

** 서울대학교 대학원 기계설계학과

*** 서울대학교 공과대학 기계설계학과

ABSTRACT

This paper presents rational modeling and analysis method for complex structures with various structural joints. For modeling of structural joints, a general modeling technique is newly proposed by flexibility influence coefficient and inverse of flexibility matrix and static reduction concept which is applied to the retained DOFs(degrees of freedom) of detailed finite element model of structural joints. By this method, joint model with contact surface, which can not be reduced by the general reduction theory such as Guyan reduction theory, can be reduced effectively. And in this method, the nonlinearity of the contact surface can be linearized within a proper range and the boundary effects of joint region can be excluded. Using the proposed method, screwed joint, glued joint and bolted joint are analyzed. And the effectiveness of the proposed method is verified by experiments.

1. 서론

결합부가 있는 구조물에서 결합부는 전체 구조물의 특성에 중요한 영향을 미치게 된다. 그러므로 기계구조물의 거동 특성을 정확하게 해석하기 위해서는 결합부의 특성을 정확하게 해석하는 것이 필수적이다. 정확도를 요구하지 않는 구조물에 대해서는 결합부를 강결합(Rigidly joined)된 것으로 가정하거나 단순화된 모델을 사용하여 해석하지만 항공기나 로켓같이 고정밀도를 요구하는 복합구조물은 정확한 결합부 특성이 필요하다. 결합부 특성에 관한 연구는 1970년대 들어서면서 정밀 가공에 있어서 공작기계의 중요성이 부각되면서 공작기계 공구의 결합부에 대한 기초적인 연구가 활발히 진행되었다.[1,2] 그리고 1980년대 이후의 연구에서는 여러가지 결합부에 대한 해석적인 방법과 실험적인 방법 그리고 이 두가지 방법을 병행한 해석 방법이 제시되고 있다. 해석적 방법인 유한 요소법[3,4]과 이론적 해석 방법[5]을 이용하여 볼트 결합부나 용접 결합부 그리고 접착 결합부에 대한 연구가 수행되었으나 결합부의 동적 특성을 규명하지는 못하였다. 또 실험과

관련된 결합부 특성의 동정(Identification)에 있어서 주파수 응답 함수(Frequency response function)[6-8]나 모달 데이터(고유진동수, 고유모드)[9]를 이용하는 경향이 커지고 있다. 그러나 결합부 영역에서는 주파수 응답 함수를 측정하기가 어렵고 결합부의 형상이 복잡할 경우 고유 모드를 구하기가 어렵다는 문제점이 있다. 그러므로 균래에 와서는 임의의 결합부에 대한 일반적인 해석 방법이 요구되고 있다.

결합부는 나사나 볼트 또는 접착제에 의하여 결합되거나 접촉면(Contact faces)을 포함하게 되며 접촉면은 유한 요소 모델에서 접촉 요소(Contact element)를 사용하거나 강결합된 것으로 가정하여 모델링된다. 그러나 접촉 요소를 포함하고 있는 해석 모델에서는 축약된 강성 행렬과 질량 행렬을 구할 수 있으며 동적 해석을 할 수 없는 문제점이 있다.

본 논문에서는 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬의 역행렬은 Guyan의 정축약 이론에 의하여 축약된 강성행렬과 같음을 보였다. 그리고 강성 행렬은 접촉 요소를 포함한 모델에서 유연성 행렬을 구하여 그 역행렬을 구함으로써 선택된 자유도로 축약된 행렬을 구하였으며 질량 행렬은 강결합된 모델과 접촉

요소를 포함한 모델이 서로 같기 때문에 강결합된 모델에서 선택된 자유도로 정축약하여 구하였다.

2. 이론

구조물에 외력 $\{F\}$ 가 가해졌을 때 변위 $\{u\}$ 는 다음과 관계식으로 표현된다.

$$\{u\} = [a]\{F\} \quad (1)$$

여기서 $[a]$ 는 유연성 행렬로써 j 자유도에 단위하중이 가해 졌을 때 i 자유도에서의 변형량을 의미하는 영향계수 a_{ij} 로 구성된 행렬이다. 이 행렬은 선형계에서는 대칭행렬이 되고 강성행렬의 역행렬과 같다.

[10]

$$[K] = [a]^{-1} \quad (2)$$

전체 자유도에서 선택되는 자유도를 $\{u_c\}$, 생략되는 자유도를 $\{u_b\}$ 로 구분하여 식(1)을 정리하면 식

(3)이 된다.

$$\begin{Bmatrix} u_c \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{so} \\ a_{os} & a_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ F_o \end{Bmatrix} \quad (3)$$

그리고 식(2)는 식(4)와 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{so} \\ K_{os} & K_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ss} & a_{so} \\ a_{os} & a_{oo} \end{bmatrix} = [I] \quad (4)$$

식(4)를 정리하면 다음과 같다.

$$[K_{ss}] \{a_{ss}\} + [K_{so}] \{a_{os}\} = [I] \quad (5)$$

$$[K_{os}] \{a_{ss}\} + [K_{oo}] \{a_{os}\} = [0] \quad (6)$$

식(6)에서

$$\{a_{os}\} = -[K_{oo}]^{-1} [K_{os}] \{a_{ss}\} \quad (7)$$

이제 식(5)에 대입하면 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬의 역행렬을 구할 수 있다.

$$\{a_{ss}\}^{-1} = [K_{ss}] - [K_{so}] [K_{oo}]^{-1} [K_{os}] \quad (8)$$

한편, Guyan의 정축약 이론에 의하여 축약된 강성 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[11]

$$[\bar{K}] = [K_{ss}] - [K_{so}] [K_{oo}]^{-1} [K_{os}] \quad (8)$$

식(8)과 식(9)에 의하여 유연성 행렬의 역행렬은 Guyan의 정축약이론에 의한 축약된 강성행렬과 같음을 알 수 있다. 즉 Guyan의 정축약이론으로 축약할 수 없는 모델을 유연성 행렬의 역행렬로서 자유도를 축약할 수 있다는 것을 의미한다. 대부분의 결합부는 접촉면을 가지고 있으므로 접촉요소(Contact element)로서 모델링 할 경우 정축약이론으로는 축약이 불가능하므로 유연성 행렬의 역행렬을 이용하면 매우 효과적임을 알 수 있다.

상세 유한요소 모델에서 유연성 행렬을 구할 때 모델의 일부 자유도가 구속되어 있지 않으면 힘을 가하였을 때 강체 변위가 발생하기 때문에 유연성 행렬을 구할 수가 없게 된다. 즉 선택된 자유도의 일부를 구속하고, 구속하지 않는 자유도에 대한 유연성 행렬을 구성한 후, 반대로 하여 나머지 자유도에 대한 유연성 행렬을 구하여야 한다.

구속된 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_b\}$, 구속되지

않은 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_c\}$ 로 정의하면 선택된 자유도에 대한 변위 벡터 $\{u_c\}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{u_c\} = \begin{Bmatrix} u_b \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (10)$$

이때 선택된 자유도에 대한 유연성 행렬과 강성행렬은

$$[a_{ss}] = \begin{bmatrix} a_{bb} & a_{bc} \\ a_{cb} & a_{cc} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_c] = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \quad (11)$$

으로 표현할 수 있으며 $[a_{ss}]$ 는 $\{u_b\}$ 를 구속했을 때의 $\{u_c\}$ 에 대한 유연성 행렬이다. 이 유연성 행렬로부터 강성 행렬을 다음과 식으로 구할 수 있다.

$$[K_{cc}] = [a_{ss}]^{-1} \quad (12)$$

여기에서 강성 영향 계수 K_{ij} 는 j 자유도에 단위변위가 발생될 때 i 자유도를 고정하기 위한 힘으로 정의된다. 따라서 $[K_{cc}]$ 는 c 자유도에 단위변위가 발생될 때 고정된 b 자유도에서 반력을 계산하여 구할 수 있다. $[K_{cc}]$ 와 $[K_{bb}]$ 는 구속된 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_c\}$, 구속되지 않은 자유도에 대한 변위 벡터를 $\{u_b\}$ 로 정의하여 같은 방법으로 구할 수 있다.

3. 적용

3.1 나사 결합부(Screwed joints)

Fig.1과 같이 직경이 서로 다른 2개의 로드(Rod)가 나사 결합되어 있는 구조물에 대하여 앞에서 제시한 일반적인 모델링 기법을 적용하여 결합부의 특성을 해석하였다. 나사 결합된 부분만을 결합부 영역으로 정하였으며 결합부가 축대칭이므로 4분의 1만을 입체요소(Solid element)를 사용하여 상세 모델링하였고 나사와 나사 사이에는 접촉요소(Contact element)를 사용하여 적당한 경계조건을 주었다. Fig.2는 결합부의 상세 유한요소 모델을 나타내고 있다. Fig.3에 나타나 있는 것과 같이 선택된 자유도는 결합부 영역의 두 끝점의 축방향 자유도로 선정하였다. 유연성 영향 계수를 구하기 위하여 2번 자유도를 고정하고 1번 자유도에 축방향으로 하중을 가하였으며 Fig.4는 이 때의 변형된 모습을 나타내고 있다. 접촉면의 마찰계수는 단위하중이 가해질 때의 변형량에 영향을 미치게 되는데 마찰 계수에 대한 변형량을 Fig.5 나타내었다. 마찰계수가 0.25~0.425범위에서는 변형량이 선형적으로 변함을 알 수 있고 마찰 계수가 64%가 증가함에 따라 변형량은 0.7%가 감소되어 마찰의 영향은 크지 않은 것으로 나타났다. Table 1은 $\mu = 0.3$ 일 때와 강결합일 때의 영향 계수와 강성을 나타내고 있다.

이때 선택된 두 자유도에 대한 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K]_{\mu=0.3} = \begin{bmatrix} 2.5348 \times 10^8 & -2.5348 \times 10^8 \\ -2.5348 \times 10^8 & 2.5348 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[K]_{rigid} = \begin{bmatrix} 3.8326 \times 10^8 & -3.8326 \times 10^8 \\ -3.8326 \times 10^8 & 3.8326 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

그리고 질량 행렬은 나사 결합된 모델과 강결합된

모델이 서로 같기 때문에 강결합된 모델에서 정축약을 이용하여 선택된 자유도로 축약시켜 구하였다. 이 결합부의 특성 행렬을 전체 구조물에 적용하여 축방향의 고유진동수와 고유모드를 구하는 고유치 해석을 수행하였다. Table 2에 $\mu=0.3$ 일때와 강결합일 때의 고유진동수를 비교하여 나타내었다. 첫번째 모드에서 고유 진동수의 차이가 가장 크게 나타났는데 결합부 영역에서의 변형이 첫번째 모드에서 가장 많이 발생하기 때문이다. 두번째 모드는 결합부 영역에서는 축방향으로의 변형이 거의 없는 모드 형상이므로 고유 진동수의 차이가 적게 발생하였다. 이와 같이 결합부의 특성 그 자체 뿐만 아니라 결합부의 위치도 전체 구조물의 거동에 많은 영향을 주므로 정확한 결합부 특성의 규명이 필요함을 알 수 있다.

Fig.6은 축의 길이방향의 변위를 축의 수직 방향으로 나타낸 모드 형상이다.

3.2 볼트 결합부(Bolted joint)

Fig.7과 같이 두개의 평판이 볼트에 의해 체결된 모델에 대하여 일반적인 모델링 기법을 적용하여 굽힘 모드 형상과 그에 따른 고유 진동수를 구하였다. 결합부 영역은 두 개의 평판이 겹쳐진 부분만으로 정하였으며 결합부가 대칭이므로 2분의 1만을 상세 모델링 하였으며 접촉면이 있는 부분-평판과 평판 사이, 볼트와 너트의 나사 부분, 볼트머리와 평판이 접하는 부분, 너트와 평판이 접하는 부분-은 결합 요소를 사용하였다. Fig.8은 볼트 결합부의 상세 유한 요소 모델을 나타내고 있다. 선택된 자유도는 Fig.9와 같이 결합부 양 끝점의 병진 자유도와 회전 자유도의 4개로 정하였다. Fig.10은 절점 1의 모든 자유도를 구속시키고 절점 2에 하중을 가하였을 때의 변형된 모습이다. 단위 힘(Force)과 단위 모멘트(Moment)에 대한 각 자유도의 변형량인 유연성 영향 계수를 Table 3에 나타내었다.

이 유연성 행렬로 강성행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0536 \times 10^7 & -2.5127 \times 10^5 \\ -2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이 되며 같은 방법으로 절점 2의 모든 자유도를 구속시키고 절점 1에 대한 유연성 행렬을 구하여 강성 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0537 \times 10^7 & 2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

구한 두 행렬과 힘 평형관계를 이용하면 선택된 4개의 자유도에 대한 강성행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.0357 \times 10^7 & 2.5127 \times 10^5 & -1.0536 \times 10^5 & 2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 & -2.5127 \times 10^5 & 4.1645 \times 10^5 \\ -1.0536 \times 10^5 & -2.5127 \times 10^5 & 1.0536 \times 10^7 & -2.5127 \times 10^5 \\ 2.5127 \times 10^5 & 4.1645 \times 10^5 & -2.5127 \times 10^5 & 8.3290 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

결합부의 질량 행렬은 나사 결합부와 같이 정축약이론을 이용하여 구하였고 결합부 이외의 구조물은 보조로 모델링하여 전체 구조물에 대한 고유해석을

수행하였다. 이 결과를 모드실험으로 구한 고유진동수와 결합부를 강결합으로 가정하였을 때의 고유진동수와 비교하여 Table 4에 나타내었다.

유연성 행렬을 이용하여 구한 고유 진동수와 모드 실험으로 구한 고유 진동수가 잘 일치함을 알 수 있다. 각 경우의 모드 형상을 Fig.11에 나타내었다.

3.3 접착제 결합부(Glued joint)

Fig.12와 같이 두개의 평판이 접착제에 의하여 결합되어 있는 구조물에 대하여 볼트 결합부와 같이 굽힘 모드와 고유 진동수를 구하였다. 접착제는 고분자 화합물로 제조한 원형의 봉 형상의 고체 상태의 물질로 열을 가하여 녹인 후 접착부위에 도포하여 냉각시키면 결합이 일어나게 된다. 접착제의 영률(Young's modulus)은 인장 시험을 통하여 측정하였고 불성치는 Table 5에 나타내었다.

결합부 영역은 두 개의 평판이 겹쳐진 부분으로 정하였으며 Fig.13과 같이 상세 모델링하였다. 선택된 자유도는 Fig.14와 같이 결합부 양 끝점의 병진 자유도와 회전 자유도의 4개로 정하였다. 절점 1의 자유도를 모두 구속하고 절점 2에 단위 힘과 단위 모멘트를 각각 가하여 구한 영향 계수를 Table 6에 나타내었다.

Fig.15는 절점 1을 구속하고 절점 2에 하중을 가하였을 때 결합부가 변형된 모습을 나타내고 있다. Table 6의 유연성 행렬로 절점 2에 대한 강성 행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.98700 \times 10^6 & -1.80362 \times 10^5 \\ -1.80362 \times 10^5 & 4.39271 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이되며, 같은 방법으로 절점 1에 대한 유연성 행렬을 구하여 강성 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.98700 \times 10^6 & 1.80362 \times 10^5 \\ 1.80362 \times 10^5 & 4.39271 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

두 강성 행렬을 이용하여 4개의 자유도에 대한 강성 행렬을 구하면

$$[K] = \begin{bmatrix} 8.9870 \times 10^6 & 8.9248 \times 10^4 & -8.9870 \times 10^6 & 1.8036 \times 10^5 \\ 8.9248 \times 10^4 & 1.6593 \times 10^3 & -8.9248 \times 10^4 & 1.0182 \times 10^3 \\ -8.9870 \times 10^6 & -8.9248 \times 10^4 & 8.9870 \times 10^6 & -1.8036 \times 10^5 \\ 1.8036 \times 10^5 & 1.0182 \times 10^3 & 1.8036 \times 10^5 & 4.3927 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

이 되며 이 강성 행렬과 정축약한 질량 행렬을 이용하여 전체 구조물에 대한 고유치 해석을 수행하였다. Table 7에 나타나 있는 것과 같이 해석치와 실험치가 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig.16은 각 모드에 대한 모드형상을 나타내고 있다.

4. 결론

본 연구에서는 다양한 형태의 결합부에 적용 가능한 일반적 모델링 기법에 대한 연구를 수행하였으며 그 연구 결과는 다음과 같다.

- 1) 나사결합부, 볼트결합부 그리고 접착제 결합부 등 여러 종류의 결합부의 해석에 적용할 수 있는 일반적 모델링 기법을 제시하였다.

- 2) 유연성 영향 계수를 이용하여 결합부의 유연성 행렬을 구한 후 강성 행렬을 구하였으며, 이는 Guyan의 정축약 이론에 의하여 축약된 행렬과 같음을 보였다.
- 3) 제시된 모델링 기법은 해석시 결합부의 경계 조건의 영향이 포함되지 않으며, 접촉 빛 마찰의 영향을 고려 할 수 있다.
- 4) 하중과 변위의 크기를 고려하여 결합부의 비선형성을 적절한 범위내에서 선형화 할 수 있다.
- 5) 나사 결합부, 볼트 결합부 그리고 접착 결합부에 제시된 해석 기법을 적용하여 고유치 해석을 수행하였고, 제시된 결합부 해석 방법의 타당성을 검증하였다.

후기

이 연구는 국방과학연구소 장기기초연구 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- [1] T. R. Thomas and R. S. Sayles, "Stiffness of Machine Tool Joints : a Random-Process Approach", Journal of Engineering for Industry, Feb., 1977
- [2] T. Inamura and T. Sata, "Stiffness and Damping Identification of the Elements of a Machine-Tool Structure", Annals of the CIRP, Vol. 28/1, 1979
- [3] T. F. Lehnhoff, K. I. Ko and M. L. McKay, "Member Stiffness and Contact Pressure Distribution of Bolted Joint", Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp.550-557, june, 1994
- [4] T. Fukuoka, "Finite Element Simulation of Tightening Process of Bolted Joint with a Tensioner", Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 114, pp.433-438, Nov., 1992
- [5] D. Chen and S. Cheng, "An Analysis of Adhesive-Bonded Single-Lap Joints", Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp.109-115, March, 1983
- [6] J. S. Tsai and Y. F. Chou, "The Identification of Dynamic Characteristics of a Single Bolt Joint", Journal of Sound and Vibration, Vol. 125, No. 3, pp.487-502, 1988
- [7] Y. Dejie, S. Jianwei and P. Zemin, "A Method of Identifying Dynamical Parameters of Structural Joints", Proceedings of the 6th IMAC, pp.724-726, 1988
- [8] J. M. Lee, "A Study on the Dynamic Modelling of Structures with Bolted and Bearing Joints", Annals of the CIRP, Vol. 37, No. 1, 1988
- [9] J. Wang and P. Sas, "A Method for identifying Parameter of Mechanical Joints", Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, No. 6, pp.337-342, 1990
- [10] L. Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, Mecmillen Co., 1967
- [11] R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrix", AIAA J., Vol. 3, No. 2, p380, 1965

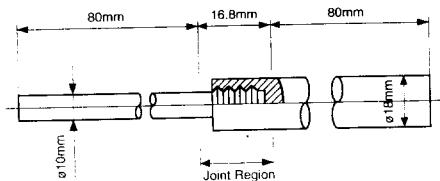


Fig.1 Configuration of the structure with screwed joint

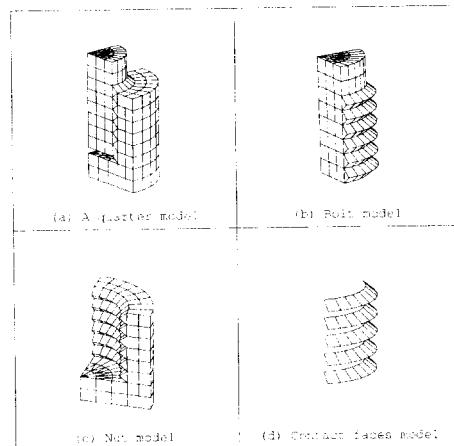


Fig.2 Detailed FE models of screwed joint

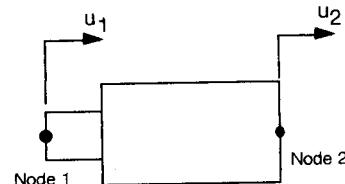


Fig.3 Retained DOFs of a screwed joint

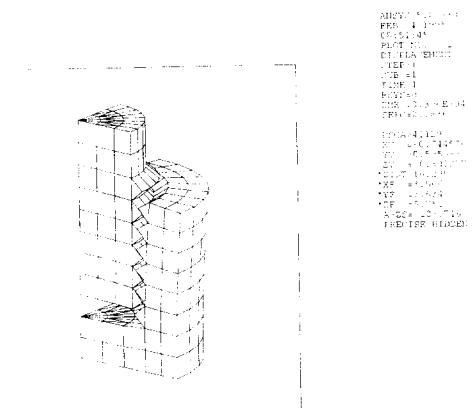


Fig.4 Deformed shape of the screwed joint

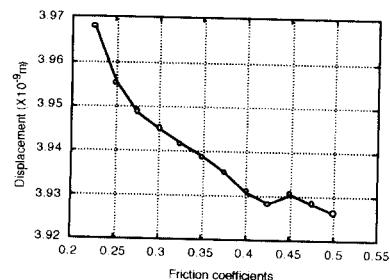


Fig.5 The effect of friction on displacements

Table 1 Flexibility and stiffness influence coefficients

	$\mu=0.3$	Rigidly jointed
Flexibility (m/N)	3.9451e-9	2.6092e-9
Stiffness (N/m)	2.5348e+8	3.8326e+8

Table 2 A comparision of natural frequencies (Hz)

Mode	$\mu=0.3$	Rigidly joined	Difference(%)
1st	9797	11150	13.8
2nd	26188	26526	1.3
3rd	30492	32012	5.0



(a) 1st mode



(b) 2nd mode



(c) 3rd mode

Fig. 6 Mode shapes of the structure with screwed joint

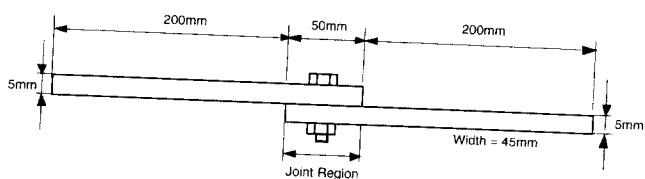


Fig.7 Configuration of the structure with a bolted joint

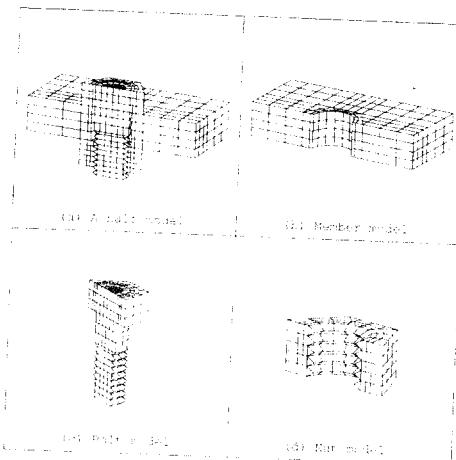


Fig.8 Detailed FE models of bolted joint

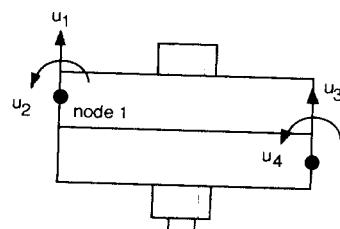


Fig.9 Retained DOFs of a bolted joint

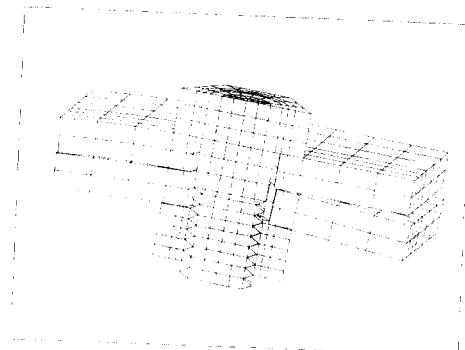


Fig.10 Deformed shape of the bolted joint

Table 3 Flexibility influence coefficients ($\mu = 0.3$)

Load	u_3 (m)	u_4 (rad)
F_3 (N)	3.3832e-7	1.0206e-5
F_4 (Nm)	1.0206e-5	4.2796e-4

Table 4 A comparision of natural frequencies (Hz)

Mode	Experimental	Proposed	Rigidly joined
1st	98.3	98.5	110.8
2nd	280.6	282.0	283.3
3rd	524.0	523.5	583.7
4th	895.0	894.3	907.5

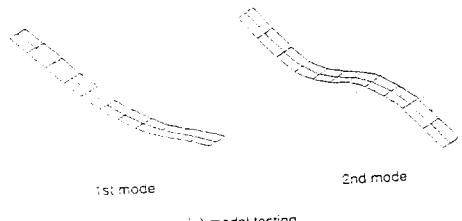


Fig. 11 Mode shapes of the structure with bolted joint

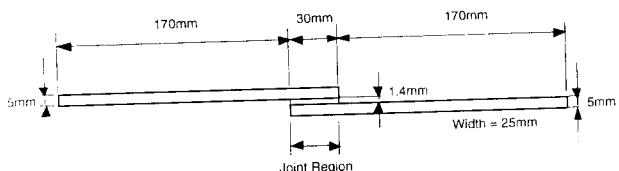


Fig. 12 Configuration of the structure with a glued joint

Table 5 Material properties of glue

Young's modulus	Mass density	Poisson's ratio
3.266e+7 N/m ²	1112.3 kg/m ³	0.45

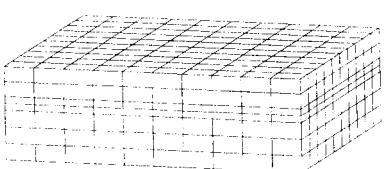


Fig. 13 Detailed model of glued joint

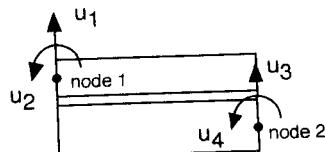


Fig. 14 Retained DOFs of a glued joint

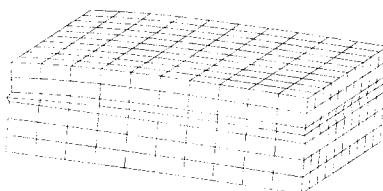


Fig. 15 Deformed shape of the glued joint

Table 6 Flexibility influence coefficients

Load	u_3 (m)	u_4 (rad)
F_3 (N)	6.3235e-7	2.5965e-5
F_4 (Nm)	2.5965e-5	1.2937e-3

Table 7 A comparision of natural frequencies (Hz)

Mode	Experimental	Proposed	Rigidly joined
1st	128.5	128.4	128.7
2nd	421.9	425.8	425.6
3rd	740.2	741.1	736.3
4th	1323.0	1325.5	1303.4

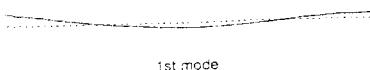


Fig. 16 Mode shapes of the structure with glued joint