韓國精密工學會 '95年度 秋季學術大會論文集 pp.843~846

횡방향 압력을 받는 복합적층 원통실린더의 좌굴후 거동해석
(Postbuckling Behavior of Composite Laminated Cylinder under Lateral Pressure)

조 종 두 (인하대학교 기계공학과), 김 헌 주* (인하대 대학원)
C. Cho (Inha Univ.), H.J. Kim* (Inha Univ. Graduate School)

ABSTRACT

The buckling and postbuckling behavior of composite laminated long cylinders under lateral pressure are investigated by the nonlinear finite element method. A long cylinder of 3-D shell problem is modelled as 2-D plane strain problem for analysis. And for the finite element analysis, eight nodes quadratic element is utilized. Arc-length method is adopted for the iteration and load-increment along postbuckling equilibrium path. The composite laminated cylinders in study are composed of cross-plied uniaxially reinforced shells. As a result, buckling load and postbuckling behavior are discussed.

쉘 형태의 구조물은 압축강도보다 훨씬 낮은 응력에서 좌굴이 발생한다고 알려져있다. 좌굴은 구조물에 대회전과 대변형을 일으키게 하고, 이로인해 파손이 일어난다. 이로한 파손에 의해 구조물의 강성이 감소하여 결국 최종파손에 도달하게 되므로, 오래전 부터 좌굴은 설계시 반드시 고려되어야 할 중요한 문제로 인식되어 왔다.

섬유강화 복합재료(fiber reinforced composite material)는 강화재인 섬유와 기지(matrix)로 구성되며, 이 재료는 비강도, 비강성, 피로특성등의 기계적 성질이 좋다. 또한, 이방성을 이용해 사용자의 요구조건에 맞는 구조물을 설계하는데 용이하고 경량화를 할수있어 최근 항공기 동체, 로켓, 압력용기, 해저탐사장비등의 구조요소에 사용이 증가하고있다. 복합재료로 된 구조물은 보강섬유의 방향, 적층순서에 따라 구조물의 강성이 달라진다. 따라서 적절한 섬유방향과 적층순서의 선택은 구조물의 좌굴에 대한 저항력을 증가 시킬수 있을 뿐만 아니라 사용목적에 따른 최적설계가 가능하다. 또한 복합재료로 된 구조물의 초기좌굴이 최종파손을 을 의미하지는 않으며 좌굴후에도 어느정도는 하중을 지지한다. 그러므로 효율적이고 안전한 구조물을 설계하기 위해서는 초기좌굴및 좌굴후 거동해석이 필요하다.

본 논문에서는 횡방향 압력을 받는 복합적층 원통실린더의 좌굴및 좌굴후 거동을 해석하였다. 횡방향 압력을 받는 쉘 구조물은 좌굴과 같은 대변형시 표면에 작용하는 수직한 방향하지 않을 때와 오차가 크게는 30%정도 차이가 남을 지적하였다. 그러므로 정확한 거동해석을 위해 압력에 대한 실린더의 변형시 작용하는 힘의 변화를 고려하였다. 비선형 유한요소해석에서는 8절점요소를 사용하였고, 기본적인 반복계산을 위해 수정 Newton-Rapson 방법과 평형경로의 진동이나 발산방지를 위해 하중증분은 호길이법(arc-length method)를 사용하였다. 고려한 적층은 $[0_{16}]_T$, $[0_4/90_4]_S$, $[0_2/90_2]_{2S}$ 이다.

2. 비선형 유한요소 해석

2-1 유한요소 방정식

체적력을 무시한 일반적인 탄성체의 포텐셜 에너지식은 다음과 같다.

$$\Pi = \int_V W\,dV - \int_S T_i\,u_i\,dS \tag{1}$$

여기서 W, T_i, u_i 는 각각 변형에너지밀도, 표면력, 변위를 의미한다.
윗 식에서 내부일(internal work)은

$$\int_V W\,dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,dV \tag{2}$$

변형에 따른 표면력의 변화를 고려한 외부일(external work)은 다음과 같다. [7]

$$\int_S T_i\,u_i\,dS = \lambda \int_S [\; u\cos\varphi + v\sin\varphi + \frac{1}{2R}\{v(y\,u_{,x} - x\,u_{,y}) + u(y\,v_{,x} + x\,v_{,y})\}\;]\,dS \tag{3}$$

여기서 σ_{ij}는 응력텐서이고, ε_{ij}는 Green 변형률텐서이다. u, v는 직교좌표계에서의 변위이며, R은 실린더 반지름, λ는 하중상수이다.
1차 변분에 의한 임의의 i번째 평형상태에서의 유한요소 방정식은 다음과 같다.

$${}^i\{\Psi(\delta)\} = {}^i\int_V [\;B\;]^T\{\sigma\}dV - {}^i\lambda\;{}^i\{R(\delta)\} \tag{4}$$

여기서, 행렬 [B] = d{ε} / d{δ} , 변형률은 비선형항을 포함하고 있으므로

$$[\ B\ ] = [\ B_L\ ] + [\ B_{nL}(\delta)\ ] \tag{5}$$

로 표현할수 있다.

증분식(incremental equation)은 2차 변분에 의해 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} d\{\Psi(\delta)\}^i = & \ {}^i\int_V d[\ B\ ]^T\{\sigma\}dV \\ & + {}^i\int_V [\ B\ ]^T d\{\sigma\}\ dV - d\{R\}^i \\ = & \ {}^i\Big(\int_V [\ B\ ]^T [\ D\ ]\ [\ B\ ]\ dV \\ & + \int_V [\ G\ ]^T [\ S\ ]\ [\ G\ ]\ dV \\ & - [\ K_P\ ] \Big) d\{\delta\}^{i+1} \\ = & \ {}^i[\ K_T\ ]\ d\{\delta\}^{i+1} \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 행렬 [B], [G], [D], [S] 는 각각 참고문헌 [7,8]에 주어진 바와 같다.

2-2 반복계산및 하중증분

하중단계 i번째에서 j번째 변위의 증분변화는 다음과 같다.

$${}^i[\ K_T\ ]\ \{\Delta\delta\}_i^j = \Delta\lambda_i^j \{R\}_i^{j-1} - \{\Psi\}_i^{j-1} \tag{7}$$

윗 식에서, 내부힘 벡터와 외부힘 벡터의 합

$$\{\Psi\}_i^{j-1} = \{F_i\}_i^{j-1} - \{F_e\}_i^{j-1} \tag{8}$$

이며, 여기서 내부힘, 외부힘 벡터는 식(4)에서 알수 있다.
최종적으로 증분변위는 두개의 벡터로 다음과 같이 표현할수 있다.

$$\{\Delta\delta\}_i^j = \Delta\lambda_i^j \{\delta_I\}_i^{j-1} + \{\Delta\delta_R\}_i^j \tag{9}$$

한 하중단계에서의 총 변위와 하중은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \{\delta\}_i^j = \{\delta\}_i^{j-1} + \{\Delta\delta\}_i^j\ , \\ & \lambda_i^j = \lambda_i^{j-1} + \Delta\lambda_i^j \end{aligned} \tag{10}$$

한 하중단계에서 발생할수 있는 총변위에 대한 구속조건은 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$l_i^2 = {}^i\{\Delta\delta_a\}_i^T\ {}^i\{\Delta\delta_a\}_i \tag{11}$$

식(7), (8), (9), (10)을 이용해 $\Delta\lambda_i^j$ 는 다음과 같이 구하여진다.

$$\Delta\lambda_i^j = [\ -B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}\ ]\ /(2A) \tag{12}$$

여기서

$$A = \{\delta_I\}_i^T\ \{\delta_I\}_i \tag{13}$$

$$B = 2[\ \{\Delta\delta_a\}_i^{j-1} + \{\Delta\delta_R\}_i^j\ ]^T\ \{\delta_I\}_i^{j-1} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} C = & \ (\{\Delta\delta_a\}_i^{j-1} + \{\Delta\delta_R\}_i^j)^T\ (\{\Delta\delta_a\}_i^{j-1} + \{\Delta\delta_R\}_i^j) \\ & - l_i^2 \\ , & \ \{\Delta\delta_a\}_i^j = \{\delta\}_i^j - \{\delta\}_{i-1} \end{aligned} \tag{15}$$

식(12)에서 최초의 반복계산을 제외한 모든 경우에는 역행현상을 방지하기 위해 ${}^{j+1}\{\Delta\delta_a\}_i^T\ {}^j\{\Delta\delta_a\}_i$ 에 양의 값을 주는 것을 해로 취한다. 그러나 최초의 반복계산에서는 $\{\Delta\delta_a\}_i^j$ 이 영이된다. 따라서 통상적인 호길이법에서 $\Delta\lambda_i^1$ 은 유한요소 강성행렬 $[K_T]$ 의 행렬식(determinent)의 부호가 바뀌기 전까지 계속 같은 부호를 갖는다.

그리고, 호길이의 증가는 식(11)에서 최초의 호길이를 해석자 임의로 결정된다. 최초의 하중증분을 제외한 나머지의 경우는 식(16)에서와 같이 직전하중단계에서의 반복계산 횟수, J_n을 기준으로 하여 결정하는 것이 일반적이다.

$$l_{i+1} = l_i\ (J_d / J_n)^k \tag{16}$$

여기서 J_d는 해석자가 임의로 설정한 반복계산 횟수이다. 본 논문에서는 5로 정하였다. 그리고, 지수 k는 0≤ k ≤1의 값을 임의로 정하는데 여기서는 0.5로 하였다.

2-3 등방성재료의 해석과 이론식과 비교

Fig.1에는 횡방향압력을 받는 등방성 실린더의 하중-변위선도가 제시되어 있다. 참고문헌[5]에 제시되어 있는 좌굴압력에 관한 식으로 구한 좌굴압력이 60KPa이므로 본 해석과 잘 일치함을 알 수 있다.

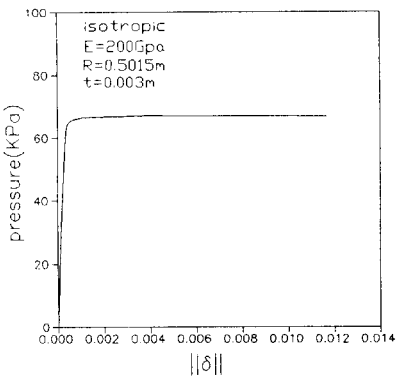


Fig. 1 Load-deflection curve of a cylinder under pressure.

3. 해석 모델

본 연구에서 고려하는 복합적층 원통실린더의 적층은 $[0_{16}]_T$, $[90_{16}]_T$, $[0_4/90_4]_S$, $[0_2/90_2]_{2S}$ 이다. 섬유방향을 0° 와 90°에 국한한 이유는 본 논문에서 해석하는 모델에서는 굽힘변형및 비틀림변형을 고려하지 못하는 한계가 있기 때문이다해석모델

은 Fig.1에 보여진것 처럼 무한길이의 복합적층 원통실린더이며 평면변형률의 가정을 이용하여 2차원으로 해석하여 좌굴하중및 좌굴후의 거동을 알아보았다. 하중은 원주방향으로 정압이 가해진다. 원통실린더의 반경은 400mm이고, 한 단층의 두께는 0.125mm이다. 그리고 적층재료로는 AS/3501 graphite/epoxy 복합재료를 고려하였다. 해석을 위하여 재료상수는 유효탄성계수및 포와송비를 구해서 사용하였다. 실린더 두께방향 탄성계수는 재료의 E_2와 같이했고, 원주방향 탄성계수는 아래와 같은 굽은적층보에 고려되는 식[9]을 이용하여 구했다.

$$E_f = -\frac{2}{t\,e}\sum_{j=1}^{N/2}(E_x)_j\,[\,R(z_j-z_{j-1}) + 0.5(z_j^2-z_{j-1}^2)+R^2\{\log(R-z_j)-\log(R-z_{j-1})\}\,] \quad (17)$$

$$\cdot\ E_x = 1/\left[\frac{1}{E_1}c^4+\left\{-\frac{2\nu_{12}}{E_1}+\frac{1}{G_{12}}\right\}c^2s^2+\frac{1}{E_2}s^2\right]$$

($c=\cos\varphi$, $s=\sin\varphi$)

여기서 e는 중립면과 도심과의 거리, t는 실린더두께이고, N은 단층의 총수이다.

복합적층판의 재료상수는 Table 1에 있다.

Table 1. Material properties of AS/3501 graphite/epoxy laminate

E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
138 GPa	9.0 GPa	6.9 GPa	0.3

Fig. 2는 해석모델을 보여준다.

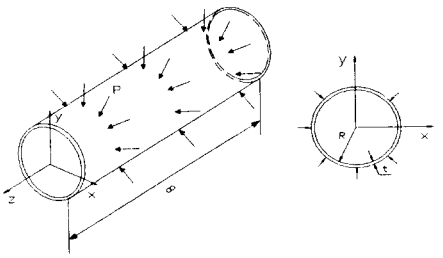


Fig. 2 Geometry of the cylinder for this analysis

Fig.3는 유한요소모델을 보여준다.

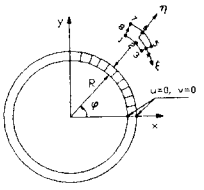


Fig. 3 The finite element model and boundary conditions

4. 결과 및 검토

Fig.3은 $[0_4/90_4]_S$실린더의 하중-변위선도에 대한 유한요소해석 결과이다. 그림에서 A점은 좌굴이 시작되는 임계좌굴하중임을 보여주고 작은 압력의 증가에 의해 변형이 급격히 커짐을 보여준다.

Fig.5는 Fig.4의 A, B, C점에 해당하는 변형형상을 보여준다. 그림에서 보듯이 초기좌굴은 모우드Ⅳ 이었다. 변형이 커지면서 경계조건으로 고정시킨 점을 제외하면 거의 변형형상이 대칭을 유지하고 있다.

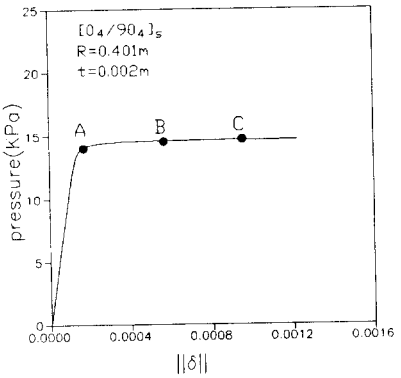


Fig. 4 Load-deflection curve of $[0_4/90_4]_S$ cylinder

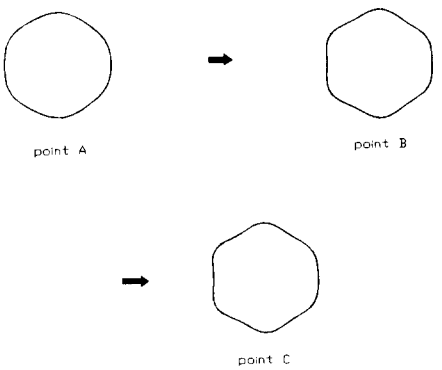
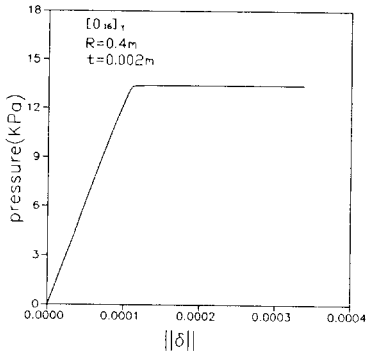


Fig. 5 Deflection shape of cylinder at A, B, C points

Fig.6은 각 적층실린더에 대한 하중-변위 선도를 보여주고 있다. 고려된 적층은 $[0_{16}]_T$, $[0_2/90_2]_{2S}$ 이다.



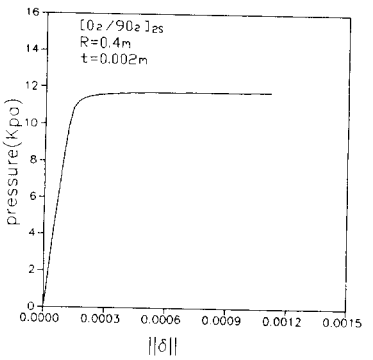


Fig. 6 Load-deflection curves of various laminated cylinders

Fig.6에서 보는 바와 같이 Table.2는 각 적층판에 대한 좌굴 압력을 보여주고 있다.

table 2. Buckling pressure for various laminated cylinders

Staking Sequence	$[0_{16}]_T$	$[0_4/90_4]_S$	$[0_2/90_2]_{2S}$
Buckling Pressure (KPa)	13.3	14	11.5

각 적층판에 대한 좌굴압력의 크기는 굽힘강성 D_{11}에 의해 설명될수 있는데 D_{11}이 큰 $[0_4/90_4]_S$실린더가 좌굴에 대한 저항성이 가장 좋음을 보여준다.

5. 결론

본 연구에서는 변형에 따른 작용하중의 변화를 고려한 비선형 유한요소법으로 횡방향 압력을 받는 복합적층 원통실린더의 좌굴후 거동해석을 수행하였다.
본 연구에서 얻어진 결과들을 정리하면 다음과 같다.

1. 이론식에서 구한 등방성실린더의 좌굴압력은 비선형유한요소법을 이용하여 얻은 좌굴압력과 거의 일치하였다.

2. 좌굴시작후 다음 평형상태까지 압력의 작은 증가에 의해 변형이 크게 일어났으며, 초기좌굴은 모우드Ⅳ 이었다.

3. 좌굴에 대한 저항성은 굽힘강성 D_{11}이 클수록 우수했다.

참고 문헌

1. K. Loganathan and S. C. Chang, "Finite Element Representation and Pressure Stiffness in Shell Stability Analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 1979, pp. 1413-1429.

2. Karan S. Surana, "Geometrically Nonlinear Formulation for The Axisymmetric Shell Elements," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, 1982, pp. 477-502

3. Murray J. Clarke and Gregory J. Hancock, "A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 1990, pp. 1365-1391.

4. 권진회, 홍창선, "축방향 압축하중을 받는 원통형 복합적층 판넬의 좌굴거동", 한국항공우주학회 논문집, 제 15 권, 제 3 호, 1987, pp.51-64

5. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd ed., Macgraw-Hill, New York, 1963.

6. D. O. Brush and B. O. Almroth, Buckling of Bars, Plates, and Shells, Macgraw-Hill, New York, 1975.

7. K. J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, London, 1982.

8. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 4th ed., Macgraw-Hill, New York, 1989.

9. Ronald F. Gibson, Principles of Composite Material Mechanics", Macgraw-Hill, New York, 1994.