

복합적층쉘의 저속충격에 대한 동적 거동 해석
Dynamic Response of Laminated Composite Shell
under Low-Velocity Impact

조종두 (인하대학교 기계공학과), 조영훈* (인하대 대학원)
C. Cho (Inha Univ.), Y. H. Cho (Inha Univ. Graduate School)

ABSTRACT

The dynamic behavior of graphite/epoxy laminated composite shell structure due to low-velocity impact is investigated using the finite element method. In this analysis, the Newmark's constant-acceleration time integration algorithm is used. The impact response such as contact force, central deflection and dynamic strain history from shell structure analysis are compared with those from the plate non-linear analysis. The effects of curvature, impact velocity and mass of impactor on the composite shell are discussed.

1. 서론

최근에 섬유보강 복합재료는 중량에 비해 강도 및 강성이 매우 우수하고 특히 설계요건에 따라 적층배열을 적절히 선정할 수 있는 유용성 때문에 경량화 및 고강도가 요구되는 자동차, 항공기 및 우주 비행체의 구조물에 널리 유용되고 있는 상태이다. 그러나, 두께방향에 대한 상대적인 강화의 결핍으로 외부 물체의 충격에 매우 약하며 손상을 입기 쉽다는 점이 최근의 주요한 관심이 되고 있다. 특히 저속충격을 받는 경우 복합재료 특유의 이방성, 비균질성 때문에 손상이 복합적층판의 내부나 후면에 발생하여 손상의 여부를 눈으로 판단할 수 없다.

많은 학자들이 저속 및 고속 충격하의 복합재료 구조물 거동에 대해 해석적, 실험적 연구를 수행하고 있다. Yang과 Sun⁽¹⁾은 정직인 상태에서 수행된 압입실험을 통하여 섬유강화 복합적층판에 대한 정직 접촉법칙을 설정하였고, 그후 Tan과 Sun⁽²⁾은 Yang 등⁽¹⁾의 접촉법칙을 유한요소법에 적용하여 충격문제를 해석한 결과, 실험치와 잘 일치하며 정직 압입실험으로 구한 정직 접촉법칙이 충격문제 해석에 유용하게 적용할 수 있음을 보였다. 또한 국내에서는 최익현, 홍창선, 이인⁽³⁾ 등은 저속충격을 받는 복합적층판의 거동에 대해 비선형 해석과 선형 해석을 실시하여 비교하였으며 이영신, 박웅⁽⁴⁾은 고차 전단변형이론을 사용하여 저속충격문제를 유한요소 해석하였는데 일차 횡전단변형이론을 사용한 결과와 큰 차이를 보이지 않았다. 그러나 이 연구들은 모두 복합재료 적층판에 대한 것이며 일반적인 복합재료 쉘 구조물에 대한 연구는 활발하지 못한 상태이다.

이 논문에서는 유한한 곡률을 갖는 복합재료 쉘 구조물의 유한요소모델에 Tan⁽²⁾의 접촉법칙을 적용하여 저속충격거동문제를 해석하였다. 본 연구의 목적은 저속충격을 받는 복합적층판을 해석한 결과에 유한한 곡률을 갖는 복합적층 쉘 구조물의 저속 충격해석한 결과를 비교, 검토하여 구조물의 저속 충격해석

를 해석하였다. 본 연구의 목적은 저속충격을 받는 복합적층판을 해석한 결과에 유한한 곡률을 갖는 복합적층 쉘 구조물의 저속 충격해석한 결과를 비교, 검토하여 구조물의 저속 충격해석에 있어서 곡률이 미치는 영향의 중요성을 보이는데 있다. 또한 경계조건의 변화에 따른 충격응답의 변화와 응력과의 분산형태를 연구하였다.

2. 이론전개 및 유한요소 수식화 과정

2.1 해석모델

본 연구에서는 Fig. 1에서 보여주는 적층 쉘을 고려한다. 쉘 중앙면에서 어떤 한 점의 위치는 축방향 좌표 및 원주방향 좌표를 x 및 θ 로 표시하고 반경방향의 좌표는 r 로 표시한다. 또한 중앙면위의 임의의 점에서 축방향, 원주방향 그리고 반경방향의 변위 성분을 각각 u_1, u_2 및 u_3 로 표시한다.

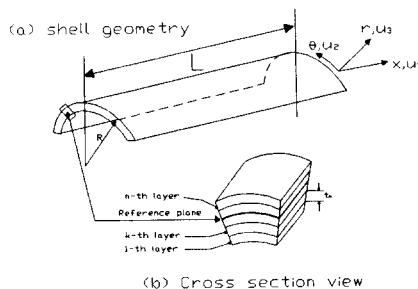


Fig. 1 Geometry of Laminated Composite Shell

2.2 운동방정식과 접촉력-압입 관계식

일차 전단변형이론에 근거한 쉘의 운동방정식은 다음과 같다.

$$N_{1,x} + (N_6 + c_0 M_6)_{,\theta} =$$

$$I_1 u_{1,\theta} + (I_2 + \frac{I_3}{R}) \phi_{1,\theta}$$

$$(N_6 - c_0 M_6)_{,x} + N_{2,\theta} + \frac{Q_2}{R} =$$

$$I_1 u_{2,\theta} + (I_2 + \frac{I_3}{R}) \phi_{2,\theta} \quad (1)$$

$$Q_{1,x} + Q_{2,\theta} - (\frac{N_2}{R} - q) = I_1 u_{3,\theta}$$

$$M_{1,x} + M_{6,\theta} - Q_1 = I_3 \phi_{1,\theta} + I_2 u_{1,\theta}$$

$$M_{6,x} + M_{2,\theta} - Q_2 = I_3 \phi_{2,\theta} + (I_2 + \frac{I_3}{R}) u_{2,\theta}$$

$$\text{여기서 } c_0 = -\frac{1}{2R} \text{ 이다.}$$

식 (1)에서 t 는 시간이고, N_i, M_i 그리고 Q_i 는 각각의 두께 방향과 연관하여 단위길이당 작용하는 힘, 모멘트, 전단력이다. 그리고, I_i 는 인장, 연계, 회전 관성 계수로서 다음과 같다.

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho_k dz \quad (2)$$

섬유방향의 회전각인 ϕ 인 적층쉘의 k 번째 층의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\{\sigma_i\} = [\bar{Q}_{ij}] \{ \varepsilon_i \}_k \quad (i, j = 1, 2, 6, 4, 5) \quad (3)$$

여기서 \bar{Q}_{ij} 는 각 층의 회전각 ϕ 에 따라 결정되는 변환강성 행렬이다⁽⁵⁾.

복합재료 적층쉘의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ B & D \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^o \\ \chi^o \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{55} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^o_{xz} \\ \gamma^o_{\theta x} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 A_{ij}, B_{ij} 는 쉘의 신장, 굽힘-신장연성 강성이며, D_{ij} 는 굽힘강성이고 H_{ij} 는 두께전단강성이다. 이들은 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (6)$$

$$H_{ij} = k_p k_i \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (7)$$

식 (6), (7)에서 k_4, k_5 는 전단보정계수로써 Whitney⁽⁶⁾가 제안한 방법을 사용하여 계산하였으며, 본 연구에서 적용된 적층쉘에 대해서 구한 결과가 Table 1에 있다.

Table 1 Shear Correction Coefficient of Laminate*

$$k_4 = 0.864 \quad k_5 = 0.879$$

* Fiber orientation of the laminate is [0/45/0/-45/0]s

위의 식 (4), (5)에서 ε^o 는 중앙면의 공학변형률이고 γ^o 는 횡전단변형률이며 x^o 는 곡률 및 회전변형으로 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & [\varepsilon^o_1, \varepsilon^o_2, \gamma^o_6]^T = \\ & [u_{1,x}, u_{2,\theta} + \frac{u_2}{R}, u_{2,x} + u_{1,\theta}]^T \\ & [\gamma^o_4, \gamma^o_5]^T = \\ & [u_{3,\theta} + \phi_2 - \frac{u_2}{R}, u_{3,x} + \phi_1]^T \\ & [x_1, x_2, x_6]^T = [\phi_{1,x}, \phi_{2,\theta}, \\ & \phi_{2,x} + \phi_{1,\theta} - \frac{1}{2R}(u_{2,x} - u_{1,\theta})]^T \end{aligned} \quad (8)$$

식 (1)에 식 (2)~(8)을 대입하면 변위와 회전항들만으로 구성된 식을 얻게 된다.

유한요소 방정식을 얻기 위해 변분형을 취하게 되면 다음의 식과 같다.

$$\int_{S_o} \{\delta \bar{A}\}^T [\bar{\rho}] \{\bar{A}\} dS + \int_{S_o} \{\delta \bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} dS - F \delta w_p = 0 \quad (9)$$

식 (9)에서 S_o 는 변형 전의 쉘의 면적이고, $\{\bar{A}\}$ 는 일반화된 변위이며, $[\bar{\rho}]$ 는 적층 쉘의 질량행렬이다. F 는 충격하중, 즉 적층쉘과 충격체 사이에서 발생하는 접촉력이며, 이것은 다음의 압입량과 접촉력에 관한 실험관계식에서 구할수 있다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} & \text{하중경로일때} \\ & F = ka^{1.5} \end{aligned} \quad (10)$$

해충경로일때

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_o}{\alpha_m - \alpha_o} \right)^q \quad (11)$$

재하중경로일때

$$F = F_m \left(\frac{\alpha - \alpha_o}{\alpha_m - \alpha_o} \right)^{1.5} \quad (12)$$

위와 같이 세 경로의 구성의 한 예를 Fig. 2에서 보여주고 있다.

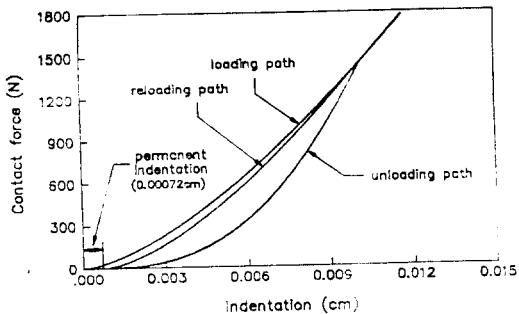


Fig. 2 Loading, unloading and reloading curve with 1.27 cm (diameter) indenter when the maximum load is 1447 KN.

앞의 식 (10), (11) 그리고 (12)에서 F_m , α_m 은 하중시의 최대 하중과 최대 압입량이며, α_p 은 영구 압입량인데, 임계 압입량 α_p 와 다음의 관계식을 갖는다.

$$\alpha_p = \begin{cases} \beta(\alpha_m - \alpha_p) & \text{if } \alpha_m > \alpha_p \\ 0 & \text{if } \alpha_m \leq \alpha_p \end{cases} \quad (13)$$

식 (10) ~ (12) 과 식 (13)에서 k , q , α_p , β 는 실험에서 사용된 적층 쉘의 적층방향(fiber orientation)과 압입체의 기하학적 형상에 의해 결정되어지는 실험상수이며 본 연구에서 사용된 값은 Table 2에 나타내었다.

Table 2 Indentation Coefficients⁽²⁾

k (N/cm ^{1.5})	q	α_p (cm)	β
1.413×10^{-5}	2.5	1.667×10^{-3}	0.094

Note : 1. Diameter of indenter is 1.27cm.

2. Fiber orientation of the specimen is [0/45/0/-45/0]_{3s}

앞의 식들로 부터 접촉력을 구하기 위해서는 압입량을 알아야 하는데 Fig. 3을 참고하여 다음과 같이 구할수 있다.

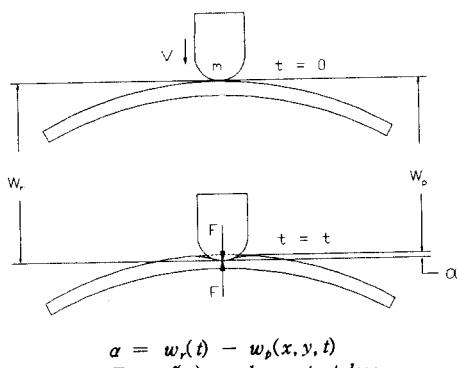


Fig. 3 Indentation between Shell and Impactor

$$\alpha(t+dt) = w_r(t+dt) - w_p(t+dt) \quad (14)$$

식 (14)에서 w_r 과 w_p 는 각각 충격체의 변위와 접촉지점에서의 판의 변위이고, dt 는 시간증분을 의미한다.

2.3 유한요소 수식화와 충격문제 해석과정

횡방향 전단효과를 고려하는 임의의 복합적층구조물의 문제해석을 위해서는 변위구성식에 신장(extention), 굽힘(bending) 외에도 전단변형(shear deformation)효과를 포함시키는것이 중요하다. 이를 위해 그림과 같은 각 절점당 5자유도 ($u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2$)를 가지는 9절점 요소(9-node quadrilateral isoparametric element)의 유한요소 모델을 사용한다.

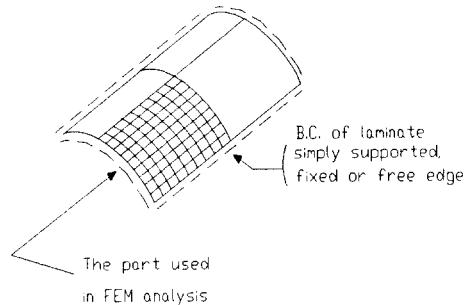


Fig. 4 Present FEM shell model

9절점 요소의 변위성분을 동일한 형상함수(shape function) ϕ_i 를 사용하여 나타내면

$$u_1 = \sum_{i=1}^9 u_{1i} \phi_i, \quad u_2 = \sum_{i=1}^9 u_{2i} \phi_i, \quad u_3 = \sum_{i=1}^9 u_{3i} \phi_i$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^9 \phi_{1i} \phi_i, \quad \phi_2 = \sum_{i=1}^9 \phi_{2i} \phi_i \quad (15)$$

이 되고, $u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \phi_{1i}, \phi_{2i}$ 는 각각 절점값이다.

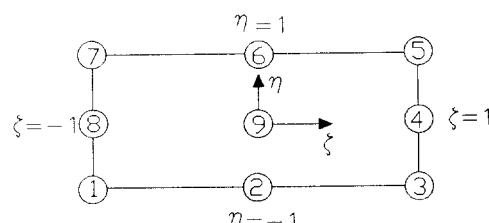


Fig. 5 9-node quadrilateral isoparametric element

식 (9)에 식 (15)를 대입하면 다음의 유한요소방정식을 얻을수 있다.

$$[M^e] \{ \ddot{A}^e \} + [K^e] \{ A^e \} = \{ F^e \} \quad (16)$$

여기서 $[M^e]$ 은 요소 질량 행렬, $[K^e]$ 는 요소 강성

행렬, 그리고 $\{F^e\}$ 는 요소 하중 벡터이다.

전체 요소에 대한 유한 요소 방정식은 각 요소에 대하여 중첩하면 다음과 같다.

$$[M] \{A\} + [K] \{A\} = \{F\} \quad (17)$$

또한 이과정에서 수치적분을 효율적으로 하고 전단 잠금(shear locking)을 피하기 위해서 reduced integration method를 사용하였다⁽⁷⁾. 즉 굽힘에너지와 관성에너지 항들은 3×3 Gaussian 적분법칙을, 횡전단에너지 항들은 2×2 Gaussian 적분법칙을 사용하였다.

강체로 가정된 충격체의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_r \ddot{w}_r + F = 0 \quad (18)$$

식 (18)에서 m_r 은 충격체의 질량이고, \ddot{w}_r 은 충격체의 가속도이며, F 는 접촉력이다.

또한 웰의 동격거동문제를 해석하기 위해 Newmark의 일정가속도(constant acceleration) 시간적분법을 적용하였고, 강체로 가정된 충격체의 지배방정식을 풀기 위해 웰의 시간적분법과 같은 개념을 적용하여 단위시간내에서는 일정한 평균치의 가속도를 갖는다고 가정하여 해석하였다.

충격거동문제를 해석하기 위해서는 접촉법칙인 앞의 식과 웰의 충격체에 대한 지배방정식인 식을 동시에 풀어야 하는데, 이 과정에 대한 흐름도(flow chart)를 Fig. 6.에 나타내었다.

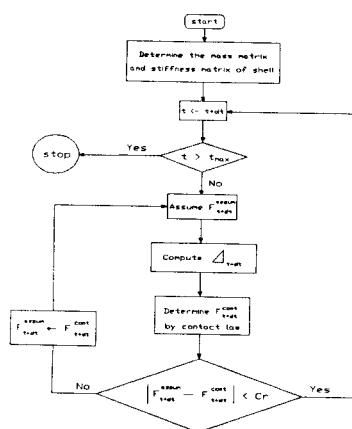


Fig. 6 Flow chart of this impact analysis.

2.3 본 연구의 충격문제 설정

본 연구에서 고려된 복합적층ウェ일의 크기는 x 방향으로는 15.24 cm이고 θ 방향으로는 $-\frac{\pi}{4} \sim \frac{\pi}{4}$ 이며 곡률은 계속 바꾸어가는 구조물인 Graphite / Epoxy 적층웨일이다. 적층순서는 $[0 / 45 / 0 / -45 / 0]_{2s}$ 이고 한층의 물성치는 Table 3에 나와 있다. 충격체는 끝단의 형상이 지름 1.27cm인 반구형상의 물체이며 웨일의 수직한 방향으로 웨일의 중심점에 충격을 가한다. 이때 웨일의 곡률을 ∞ 에서 작은 값까지 변화시키면서 해석한다. 이때 웨일의 경계조건은 자유경계인 경우, 단순지지인 경우 그리고 고정지지인 경우에 대해 해석한다.

저속충격문제를 해석하는 프로그램은 동적문제에 대한 해석으로 하나의 시간증분 동안에 충격하중을 구하기 위한 반복수행이 행해지는 복잡하고 긴 수행시간을 요하는 프로그램이다. 이러한 프로그램을 효율적으로 수행하기 위해서 본 연구에서는 전체 적층웨일의 1/4만을 가지고 충격문제를 해석할 수 있는 방법을 사용하였다. 본 연구에서 적용된 적층웨일의 경계조건은 x, θ 두 방향에 대해 대칭이므로 전체 적층웨일의 중심에서의 처짐값을 해석하는 것은 $[0/45/0/-45/0]_{2s}$ 의 1/4적층 웨일 두개와 $[0/-45/0/45/0]_{2s}$ 의 1/4 적층 웨일 두개를 해석하여 두 값의 평균값을 구하는것과 같다. 그런데 앞의 두 적층웨일의 강성행렬의 구성항을 살펴보면 굽힘강성행렬에서의 D_{16} 와 D_{28} 항을 제외하고는 모두 크기가 같다는 것을 알 수 있다. 또한 D_{16} 와 D_{28} 항도 각각 절대값의 크기는 같고 부호만 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 해석하는 적층웨일의 각 항의 평균값인 0으로 놓고 해석하면 전체 구조물의 1/4만을 해석하여 전체 웨일 중심에서의 처짐값을 정확하게 계산할 수 있으며 이에 따라 충격하중의 해석을 훨씬 효율적으로 수행할 수 있다⁽³⁾.

Table 3 Material properties of lamina

$E_1 = 120.0 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.30$
$E_2 = 7.9 \text{ GPa}$	
$G_{12} = G_{13} = 5.5 \text{ GPa}$	
$G_{23} = 2.63 \text{ GPa}$	$\rho = 1.58 \text{ g/cm}^3$

본 연구에서는 적절한 시간증분을 찾기 위해 $0.4 \mu\text{sec}$ 에서 $1.0 \mu\text{sec}$ 까지 증가시키면서 해석을 하였다. 시간증분이 커지면 커질수록 ($dt \rightarrow 1.0 \mu\text{sec}$) 데이터의 요동(fluctuation) 현상은 줄어드는 경향이 있으나 정확한 접촉력을 찾기 위한 반복수행시간이 더욱 길어지는 경향을 보인다. 또한 시간증분을 줄여나갈수록 ($dt \rightarrow 0.4 \mu\text{sec}$) 반복수행시간은 줄어들지만 요동현상이 커지는것을 볼 수 있다. 또한 반복수행의 종결치인 C_r 의 값을 $0.1 \sim 0.01$ 까지로 정하여 해석을 하였는데 C_r 의 값을 크게 할수록 다음 시간증분 단계의 반복수행시간이 길어지며 요동현상 또한 커지는 현상을 관찰할 수 있었다.

본 연구에서는 효율적인 프로그램의 수행을 위하여 $dt = 0.4 \mu\text{sec}$ 로 하였고 $C_r = 0.01$ 로 하였다.

3. 계산 결과 및 고찰

3.1 개발된 유한요소해석 프로그램의 타당성 검사

3.1.1 웨일과 판의 기하학적 형상을 이용한 검사

본 연구에서 사용된 복합적층웨일의 곡률 R 을 무한대에 가까운 크기로 정해 놓으면 그 형상은 판과 같게 된다. 따라서 현재까지 발표된 바 있는 복합적층판의 실험결과와 비교를 할 수 있다. Fig.5는 Tan과 Sun의 실험결과와 본 연구에 사용된 곡률을 상당히 크게한 경우의 복합적층웨일 결과에 비교하고 있다. Fig. 7에서와 같이 하중분포는 잘 일치하고 있는것으로 보여진다.

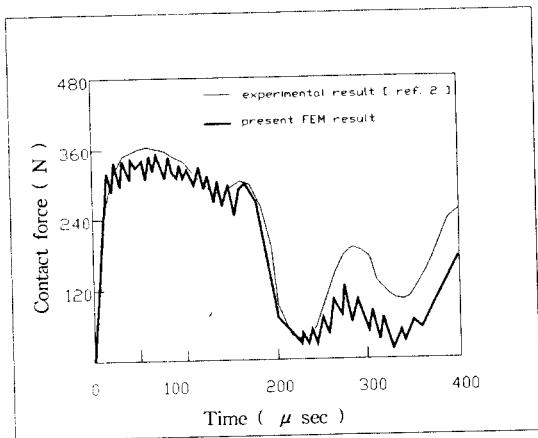


Fig. 7 Comparison of present ($\text{curvature} = \infty$) contact force history with the experimental result of plate

Fig. 7에서 보여지는 요동현상은 시간증분의 크기 차이로 나타나는 현상인데, 임계 시간증분보다 더 작게 정하게 되면 이러한 요동현상이 더 커지는 경향이 있다. 이 현상에 대해선 2-3 절에서 자세히 설명하였다.

Fig. 8에서는 또한 Tan과 Sun의 실험치와 본 연구의 결과 ($\text{곡률} = \infty$)에서의 변형율분포를 비교하였다.

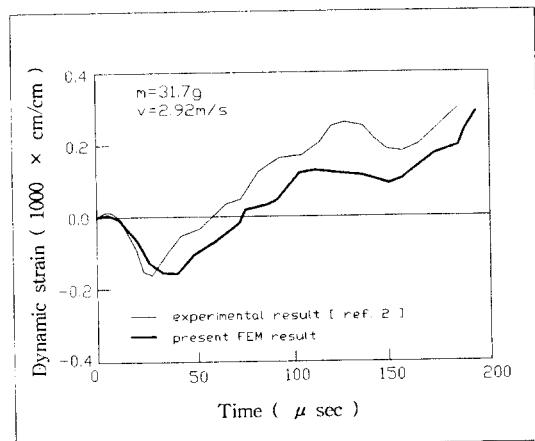


Fig. 8 Comparison of the dynamic lower extreme strain ε_{xx} at the point (1.4288 cm, 0 cm) of the shell ($\text{curvature} = \infty$) with the experimental result

Fig. 8에서와 같이 동적변형도에서 차이가 발생하는 것은 접촉력이 실험치보다 약간 낮게 해석된 탓으로 생각된다. 하지만 경향은 거의 일치하는 것으로 보인다.

3.2 쉘의 저속 충격 응답

Fig. 9에서는 곡률 $R = 30\text{cm}$ 일 때 와 $R = \infty$ 일 때의 하중분포 곡선을 비교하고 있다. Fig. 9에 나와 있듯이 곡률이 유한한 경우 최대하중이 상당히 커지게 되는 것을 볼 수가 있다. 이러한 결과는 쉘의 기하학적인 형상의 고찰로부터 유도가 가능하다. 하중상태에 있을 때 쉘 구조물은 일반적으로 판 구조물과는 달

리 접촉력의 발생으로 인한 하중분산 효과가 생기게 된다. 따라서 하중에 대한 처짐량이 적게 평가되어 압입량이 더욱 커지게 된다. 압입량이 커지게 되면 식 (10)~(12)에 의해 접촉력이 과대하게 발생된다.

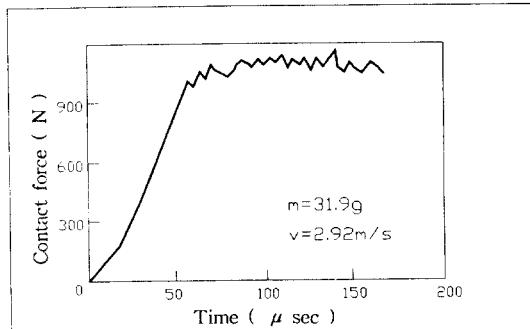


Fig. 9 Contact force history of composite shell ($R = 30\text{cm}$)

Fig. 10은 쉘에서 충격이 이루어지는 지점의 변위와 충격체의 변위를 비교한 것인데 접촉력의 결정과정에 대해 시각적으로 이해할 수 있다. 이 그림을 보면 충격체의 변위에서 적충쉘 충격지점의 변위를 뺀 크기가 압입량을 의미하며 이 압입량으로부터 접촉법칙에 의해 접촉력을 계산하게 됨을 알 수 있다.

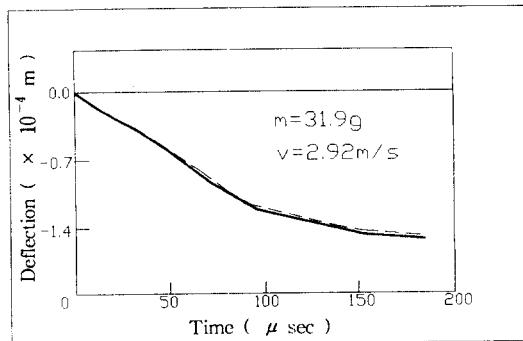


Fig. 10 Central deflection of shell and movement of impactor

Fig. 11은 Fig. 9에 의해 나타나는 하중을 받는 적충쉘의 동적 변형도를 나타낸 것이다. 하중이 증가함에 따라 변형을 또한 증가하는 것을 관찰할 수 있다.

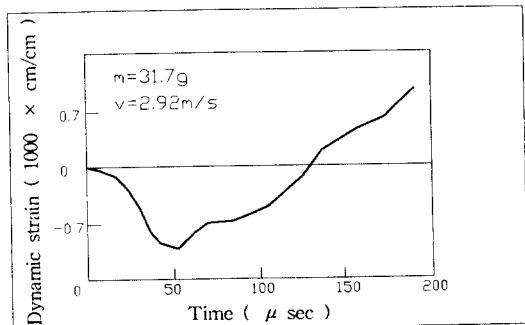


Fig. 11 Dynamic ε_{xx} strain history of shell ($R = 30\text{cm}$) at Gauss point nearing impact zone

4. 결론

저속충격을 받는 복합적층쉘의 충격응답에 대한 연구 결과 다음과 같은 결론을 일었다.

- 1) 일반적으로 알려져 있는 쉘의 하중 분산효과가 저속 충격 응답에서도 마찬가지로 나타났다.
- 2) 그 결과 처짐량의 감소로 인한 최대하중의 증가효과를 유도하게 되었다.
- 3) 처짐량이 적음에도 불구하고 동적변형율은 하중의 증가로 인해 상당히 커지게 됨을 볼 수 있다.
- 4) 따라서, 곡률을 가지고 있는 구조물은 하중설계시 과대 평가해야 하며 처짐량의 감소와 변형율의 증가로 인한 특이 사항, 즉 손상의 여부를 판 구조물보다 식별하기 어려운점에 더욱 유의하여야 한다.

5. 참고문헌

- (1) Yang, S. H. and Sun, C. T., 1982, "Indentation Law for Composite Laminates", Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 787, American Society for Testing and Materials, pp. 425-449.
- (2) Tan, T. M. and Sun, C. T., 1982, "Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composites Plate", J. of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 6-12.
- (3) 최익현, 홍창선, 이 인., 1991, "복합재료판의 저속충격 저동에 대한 비선형 해석.", 대한기계학회논문집, 제 15권, 제3호, pp 757-770.
- (4) 이영신, 박웅, 1990, "고차 전단 변형이론에 의한 복합재료 직총판의 저속 충격응답", 대한기계학회논문집, 제 14권, 제 6호, pp. 1365-1381.
- (5) Jones, R. M., 1975, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill, New-York., pp. 45~56.
- (6) Whitney, R. M., 1973, "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates under Static Load", J. of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 302-304.
- (7) Huges, Thomas J. R., 1987, The Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey., pp. 327~330.