

비등방 경화 지반모델을 적용한 굴착지반의 유한요소해석

Finite Element Analysis of Soil Excavation Using an Anisotropic Hardening Constitutive Model

오 세 봉, Scboong Oh* 이 승 래, Scung-Rac Lcc**

* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정, Graduate Student, Korea Advanced Institute of Science & Technology, Taejon

**한국과학기술원 토목공학과 부교수, Associate Professor, Korea Advanced Institute of Science & Technology, Taejon

개요(SYNOPSIS) : For the proper analysis of soil excavation problems through FEM, a constitutive model should be able to simulate the real soil behavior, especially around the excavated section. In this study, the nonlinear finite element analysis is performed using an anisotropic hardening constitutive model based on 'generalized isotropic hardening' rule. Furthermore, in order that the implementation of this constitutive model is performed consistently with the iterative algorithm for the numerical analysis, stresses are implicitly integrated by the closest point projection algorithm, and a consistent tangent modulus is evaluated. An excavation example including various loading sequences is analyzed, and the results are compared with the Cam-clay model.

1. 서론

비선형거동을 하는 지반의 굴착문제에 대하여 유한요소해석을 수행할 때에는, 지반재료의 구성관계와 응력의 수치적분방법이 얻어지는 해의 수렴성과 정확도에 중요한 영향을 끼친다. 굴착시 지반의 거동에 영향을 미치는 주요한 역학적 인자로는 (1) 과압밀비, 구속응력의 초기 응력 상태와, (2) 시공단계에 따른 재하/역재하로 인한 하중조건등이 있다. 이미 널리 알려진바와 같이 지반은 과다한 과압밀상태 또는 역재하 조건시에 소성변형으로 사료되는 과다한 변형이 일어날 수 있다[Roscoe와 Burland(1968), Pietruszczak과 Mroz(1983), Anandarajah와 Dafalias(1986)]. 그러나 Cam-clay 모델 [Roscoe와 Burland(1968)]과 같은 등방경화 구성모델로는 상기의 조건에서 나타나는 소성변형을 적절하게 예측할 수 없다.

현대 토질역학에서 연구되고 있는 진보적인 구성관계는 등방-이방 조합경화 규칙을 채택하는 비등방경화 구성모델들이다. 이 중에서 대표적인 것들은 Dafalias(1986)의 경계면(bounding surface) 모델과 Mroz등(1981)의 중첩항복면(nesting yield surfaces) 모델이 있다. 상기의 모델들의 비등방 경화규칙은 등방-이방 조합경화규칙(isotropic-kinematic combined hardening rule)으로 소성계수(plastic moduli)를 보간법(interpolation rule)에 의하여 수식화하는 기법을 적용하고 있다. 그러나 이러한 조합경화규칙들은 이동경화규칙을 기반으로 이론화되었기 때문에 등방경화규칙보다 수학적으로 복잡하고 더 많은 경화변수들을 필요로 하는 특성을 지니고 있다. 뿐만아니라 보간법에 의하여 소성계수를 산정하므로 고전적인 소성이론에 바탕을 두지 못하고 있다. 이러한 결점들을 개선하기 위하여 본 연구에서는 등방경화를 일반화한 개념을 도입하여, 비등방 경화규칙을 따르는 지반거동을 모델하였다 [이승래와 오세봉 (1994)]. 이러한 과정에서 적용된 핵심적인 개념은 항복면이 등방경화하는 상동중심(ccnter of homology; 등방경화하는 항복면의 크기가 변화되는 기준점)이 임의의 응력상태에서 존재할 수 있다는 것이다.

한편, 지반굴착을 비선형 유한요소법에 의하여 해를 구하고자 할 때, 효율적이고 안정적인 수치해석을 수행하기 위하여 Newton 법과 같은 반복계산 방법을 적용하고 있다. 이 때 평형방정식을 만족시키기 위하여 반복과정에 상응하는 응력값이 요구되며, 증분형태의 응력-변형률 관계를 갖는 비선형 탄소성 모델의 경우에는 응력적분이 수행되어야 한다. 대부분 널리 사용되는 탄소성 구성관계는 해석적인 응력적분이 불가능하고, 굴착문제와 같은 경우에는 반복법에 의한 유한요소해석시에 응력증분의 양이 크므로 외연적인(explicit)

적분방법으로는 오차가 심하게 나타난다. 따라서 해법의 안정성과 정확도를 확보하기 위하여는 내재적인 수치해석적 응력적분을 수행해야 한다. 가장 널리 사용되는 응력적분 방법은 일반 사다리꼴 규칙에 의한 내재적인(implicit) 적분법을 통하여 반복적으로 응력을 적분하는 것이다 [Ortiz and Popov(1985)]. 이 때 수치적으로 적분된 응력에 상응하는 접선계수는 지배방정식의 해를 구하는 반복적인 과정과 일관되게 수식화되어야 해의 수렴도가 우수한 것으로 알려져 있다. 그러므로 본 연구에서는 제안된 모델의 내재적인 응력적분과 함께 일관된 접선계수의 수식화를 구현하여 이를 비선형 유한요소법에 적용한 후 굴착 예제해석을 수행할 것이다.

2. 비등방 경화 구성모델

본 연구에서는 등방경화규칙에 기반을 둔 비등방경화 구성모델 [이승래와 오세봉 (1994)]을 적용하여 지반굴착을 수치해석적으로 모델하였다. 본 구성모델은 재하규준에 의하여 상동중심이 임의의 응력상태에서 형성될 수 있고, 이방경화현상을 불연속적으로 기술함으로써 단순한 등방경화함수만으로 비등방경화규칙을 구현할 수 있는 특징이 있다.

그림 1에서는 재하 및 역재하시의 항복면을 응력장에서 나타낸 것이다. 등방경화하는 항복면들의 상동 중심을 상동응력 ξ 라고 정의하고, 항복면이 상동응력 ξ 에 대하여 상동적으로 등방경화하는 것을 '일반 등방경화규칙'이라고 명명하였다. 그림 1 (a)의 응력경로 1-3과정으로부터 이어지는 그림 1 (b)의 4-7 경로에서는, 갑작스런 하중방향의 변화(역재하 효과)에 의하여 상동중심이 역재하된 응력에서 새로이 형성됨으로써 소성변형을 유발한다. 즉 역재하를 계기로 그림 1 (b)는 (a)와 상이한 상동응력을 기준으로 항복면들이 등방경화하게 된다. 이 때 나타나는 일축 응력-변형률 관계는 그림 1 (c)와 같이 4-7 과정에서도 소성변형을 유발한다. 이 때 상동중심응력과 관련된 내부변수를 새로이 생성시키는 역재하규준은 다음 식 (1)과 같이 수식화할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \leq 0 \quad (1)$$

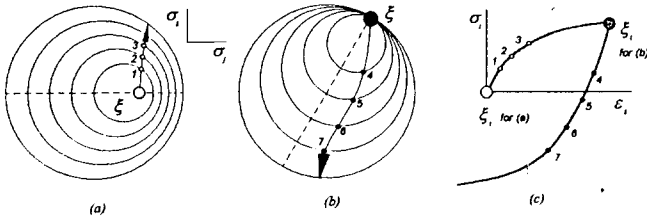


그림 1 일반 등방경화규칙

제안된 구성모델에서는 기준면과 항복면의 설정이 요구된다. 기준면 $F=0$ 은 기준면내에서 항복이 일어날 때에 상동응력에 대하여 등방경화하는 항복면의 상동 기준이 되며, 기준면상에서 항복이 일어날 때에는 항복면의 역할을 한다. 기준면 내에서 항복으로 인한 소성변형이 유발될 경우에는 항복면이 '일반 등방경화규칙'에 의하여 등방경화하는 동시에 기준면 또한 유발된 소성변형으로 인하여 등방경화하게 된다. 따라서 상동응력은 기준면의 확장에 따라 이방경화가 일어나고 그 값이 변화한다. 역재하시 불연속적으로 생성되는 내부변수는 상동응력을 기준면의 크기로 규준화한 '규준 상동응력'으로 다음과 같이 정의한다.

$$\theta = \xi / p_c \quad (2)$$

기준면과 항복면 $f=0$ 은 그림 2에서 보여지듯이 좌우 상이한 2개의 타원으로 이루어졌으며 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$F = (p - sp_c)^2 + \frac{3s}{2m^2} p_c^2 - d^2 p_c^2 = 0 \quad (3)$$

$$f = (p - \alpha)^2 + \frac{3(s - \beta)(s - \beta)}{2m^2} - r^2 = 0 \quad (4)$$

여기서, 응력 텐서 $\sigma = p1 + s$, 항복면 중심응력 텐서 $\alpha = \alpha 1 + \beta$ 로 정의될 수 있고, $\alpha = \alpha_y b_y$, $1 = \delta_y$ 이다. 사용된 재료계수는 그림 2에 나타난 M, s, γ 를 이용하여 다음식과 같이 정의된다.

$$d = 1 - s, \quad m = Ms / (1 - s), \quad \text{if } p \geq \alpha \quad (5)$$

$$d = \gamma + s, \quad m = Ms / (\gamma + s), \quad \text{if } p < \alpha \quad (6)$$

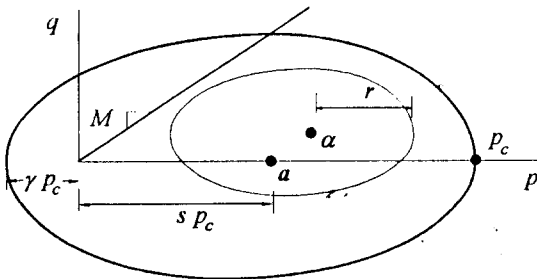


그림 2 기준면과 항복면

기준면의 경우에는 Cam-clay 모델과 동일한 소성 체적변형률에 의존하는 다음 식 (7)과 같은 경화함수를 사용하였으며, 기준면내에서 항복이 일어날 때에는 식 (8)과 같이 소성 축차변형률에 의한 함수로 경화함수를 가정하였다.

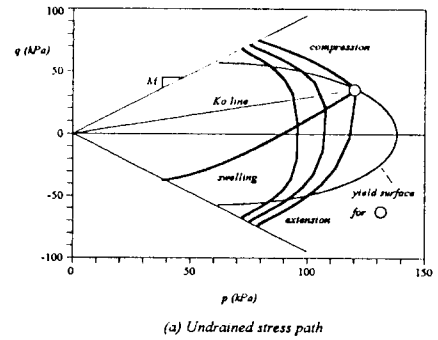
$$\dot{p}_c = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p_c \dot{\epsilon}_v^p \quad (7)$$

$$\hat{\epsilon}_d^p = \int d\epsilon_d^p = \frac{a}{m^2 \|\theta\|^2} \frac{(cr_v / dp_c)^b}{1 - cr_v / dp_c} \quad (8)$$

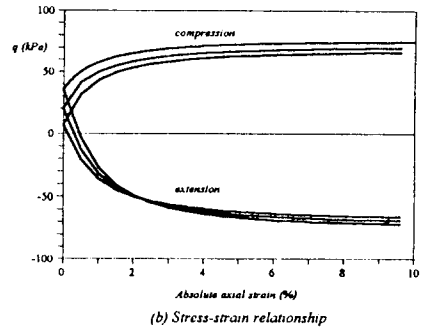
$$; d\epsilon_d^p = \sqrt{2/3} \|d\epsilon_v^p - d\epsilon_k^p / 3\|$$

여기서 a, b, c 는 재료계수이다.

그림 3은 제안된 모델을 이용하여 K_0 압밀된 Weald clay[Henkel(1956)]의 삼축압축 및 인장시에 예측되는 비배수 유효응력경로 및 응력-변형률 관계를 나타낸 것이다. 사용된 계수는 $\lambda = 0.093, \kappa = 0.035, e_a = 0.908, M = 0.95, s = 0.476, \gamma = 0.1, \alpha = 0.0007, b = 1.8, c = 1.0, v = 0.25$ 이다. 그림 3 (a)에서 보여지는 K_0 팽창과 삼축 압축 및 인장시험시의 유효응력경로는 매우 곡선적으로 체적응력이 감소하는 경향을 보이고, (b)에서 보여지는 응력-변형률관계는 소성변형률을 포함하여 강성도가 유연하게 예측하였다. 이러한 거동은 실제의 점토에서 나타나는 거동과 정성적으로 일치한다. 만일 Cam-clay 등방경화 구성모델을 이용하여 동일한 거동을 예측하면, 그림 3 (a)의 초기 항복면내에 있는 유효응력경로들이 직선적으로 나타날 것이다. 특히 비배수 유효응력경로는 항복면에 도달할 때까지 체적응력이 일정한 채로 전단응력이 일어나고 이로 인하여 전단변형률은 과소평가된다.



(a) Undrained stress path



(b) Stress-strain relationship

그림 3 K_0 압밀 Weald clay의 거동 모사

3. 응력적분 알고리즘

굴착문제등의 정적인 유한요소해석에 사용되는 힘 평형 관계식은 다음과 같다[Borja 등(1989)].

$$R_{n+1} = (F_{ext})_{n+1} - F_{int}(\sigma_{n+1}^k); \quad F_{int}(\sigma_{n+1}^k) = \int B^T \sigma_{n+1}^k d\Omega \quad (9)$$

여기서 $(F_{ext})_{n+1}, F_{int}(\sigma_{n+1}^k)$ 은 $n+1$ 번째 단계의 외력 및 내력 벡터이며, k 는 반복수이다. 잔류력 벡터 R_{n+1} 이 영벡터에 수렴할 때까지 식 (9)를 선형화한 식 (10)을 반복적으로 풀게 된다.

$$d_{n+1}^{k+1} = d_{n+1}^k + \Delta d_{n+1}^k; \quad K_{n+1}^k \Delta d_{n+1}^k = R_{n+1}^k; \quad K_{n+1}^k = \int B^T C(\sigma_{n+1}^k) B d\Omega \quad (10)$$

이 과정에서 σ_{n+1}^k 와 C_{n+1}^k 를 도출하는 데 있어서, 외연적인 응력적분(explicit stress integration)으로는 Newton법을 이용한 해석방법의 수렴성 및 정확도를 확보할 수 없으므로 다음과 같은 수치적인 응력적분법이 적용되었다.

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \sigma_n + \int C^* \cdot d\epsilon^* \\ &= \sigma_n + \int C^* \cdot d\epsilon - \int C^* \cdot d\epsilon^p \\ &= \sigma^r - \int C^* \cdot d\epsilon^p \\ \therefore \sigma^r &= \sigma_n + \int C^* \cdot d\epsilon\end{aligned}\quad (11)$$

결국 위 식에서는 시도응력텐서 σ^r 이 기지의 값이므로 소성 변형률만의 수치적분이 요구된다. $\sigma_n, \epsilon_n, \Delta\epsilon = \epsilon_{n+1}^k - \epsilon_n$ 을 각각 수렴된 응력, 변형률 및 주어진 변형률 증분이라고 할 때 일반 사다리꼴 규칙(generalized trapezoidal rule)에 의한 소성변형률의 응력적분은 다음과 같이 이루어진다.[Ortiz와 Popov(1985)]

$$\begin{aligned}\int C^* \cdot d\epsilon^p &= C^* \cdot \int d\epsilon^p \\ &= C^* \cdot \int_{f, \sigma} d\phi \\ &= C^* \cdot \Delta\phi \{ (1-\delta)(f, \sigma)_n + \delta(f, \sigma)_{n+1} \}\end{aligned}\quad (12)$$

식 (12)의 항복면의 미분항은 σ_{n+1} 에 의존하므로 식 (11)에 의한 응력적분은 반복해석을 통해 내재적(implicit)으로 수행하여야 한다.

식 (12)에서 $\delta=1$ 인 경우를 최단투사법(closest point projection)이라고 한다[Simo와 Taylor(1985)]. 최단투사법에 의한 제안된 모델의 응력적분은 다음 식들을 연립하여 내재적으로 p, s, p_c, r 및 $\Delta\phi$ 를 구하여야 한다.

$$\begin{aligned}p &= p^r - K\Delta\phi f_p \\ s &= s^r - 2G\Delta\phi f_s \\ p_c &= p_{cn} \exp(\theta\Delta\phi f_p) \\ \sqrt{2/3} \|(e^p)_n + \Delta\phi f_p\| &= \frac{\alpha}{m^2 \|\theta\|^2} \frac{(cr / dp_c)^{\delta}}{1 - cr / dp_c}; e^p = e^r - \frac{1}{3}\epsilon_v \mathbf{1} \\ (p - \alpha)^2 + \frac{3(s - \beta)(s - \beta)}{2m^2} - r^2 &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

그리고 지배식의 풀이과정에서 Newton 법의 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 구하여 적용한다.[Simo와 Taylor(1985)]

$$C_{n+1}^k = \frac{\partial \sigma_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} = \frac{\partial p_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k} \mathbf{1} + \frac{\partial s_{n+1}^k}{\partial \epsilon_{n+1}^k}\quad (14)$$

식 (13), (14)에 대한 자세한 유도과정 및 해석과정은 부록에 기술되어 있다.

4. 예제 해석

본 연구에서는 지반굴착을 해석할 수 있는 비선형 유한요소해석 프로그램 GEOKST를 이용하였으며, 새로이 제안된 구성관계를 최단투사법으로 응력적분하고 일관된 접선계수를 구하여 적용하였다. 그림 4는 축대칭 굴착 예제에 사용된 유한요소망이다. 이 요소망은 80개의 4절점요소로 이루어졌고, 사용된 재료계수는 그림 3의 예제에 사용된 계수들과 동일하게 가정하였다.

이 때 다양한 시공하중단계 및 지표부근 흙의 과압밀상태를 조성하기 위하여 다음과 같은 모델과정을 설정하였다.

- (1) 성토(4.5 m, 90 kPa)
- (2) 성토제거
- (3) 굴착(8단계)

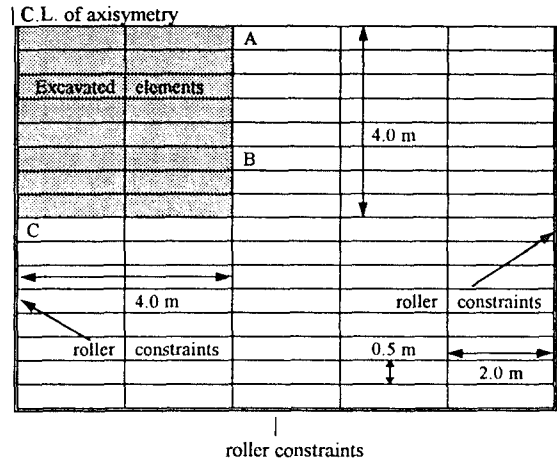


그림 4 축대칭 굴착 예제에 사용된 요소망

최단투사법에 의한 응력적분의 탁월한 정확도 및 수렴성은 여러 문헌[Borja와 Lee(1990), Simo와 Taylor(1985)]에 보고되었으며, 본 연구에서 사용된 비선형 탄소성 모델에 대한 해석알고리즘의 수렴성은 표 1에 나타난 수렴에 필요한 반복수로 보아 양호한 것으로 사료된다.

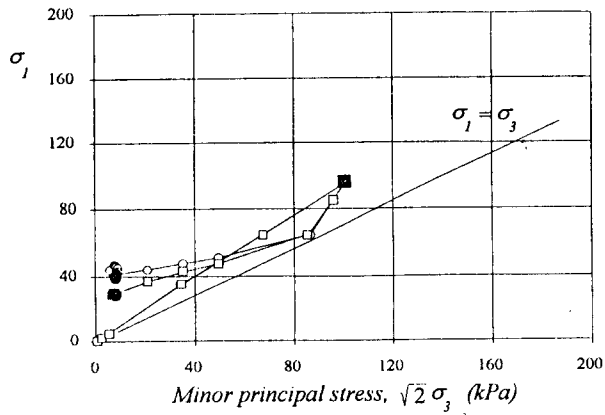
표 1 굴착단계별 최대변위 및 수렴에 필요한 반복수
(잔류력 norm 허용치: 1.0E-5, 잔류에너지 norm 허용치: 1.0E-8)

굴착 단계	굴착면 최대 수평변위 (mm)	굴착면 최대 수직변위 (mm)	반복수
1	15.4	2.0	5
2	31.2	4.7	5
3	44.9	9.0	6
4	57.5	15.7	6
5	69.2	26.0	6
6	80.1	40.8	9
7	90.3	59.2	11
8	99.8	74.8	11

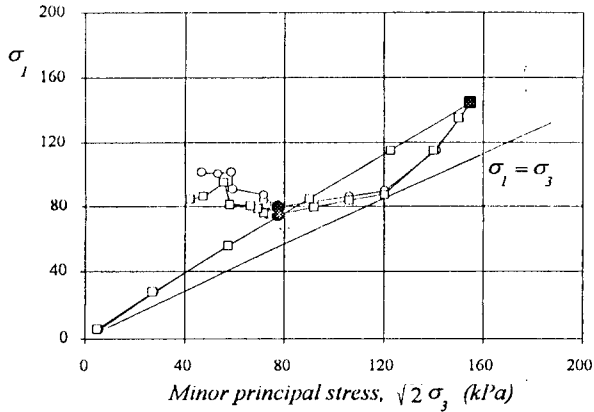
그림 5에는 굴착면 주변의 최대 및 최소 주응력경로를 성토 및 굴착단계에 따라 나타낸 것이다. 표 2에 나타난 바와 같이 A, B 점은 굴착 벽면, C점은 굴착저면에 위치한 적분점이며, 각각 성토에서 성토제거가 완료된 상태에서 굴착이 시작된다. A점은 성토제거가 완료된 상태에서 유효응력이 거의 이완되어 굴착과정에서는 응력의 변화가 일어나지 않았으며, C점에서는 굴착과정을 통하여 응력의 변화추이가 서서히 일어나면서 응력이 이완된다. 그림에서 보듯이 성토제거와 굴착과정에는 제안된 모델을 이용하는 경우 Cam-clay 모델에 비하여 최대주응력이 다소 작게 나타났다. 성토하중이 가장 크게 영향을 끼치는 A점에서 성토제거시 두 모델간의 응력차이가 다른 두 점에 비하여 크게 나타났으며, B, C점은 최대 주응력의 차이(약 15 kPa 정도)가 주로 굴착과정에서 발생되었다.

표 2 굴착면 주변 적분점의 좌표

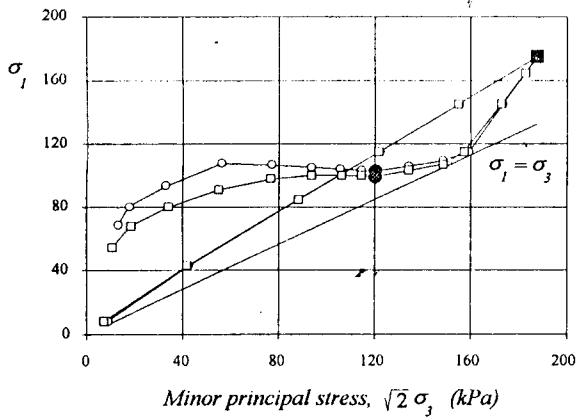
적분점	x (m)	y (m)
A	4.42	0.11
B	4.42	2.61
C	0.42	4.11



(a) A 점에서의 주응력경로



(b) B 점에서의 주응력경로



(c) C 점에서의 주응력경로

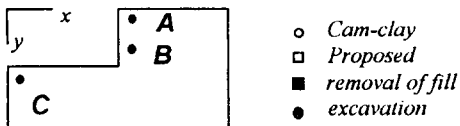
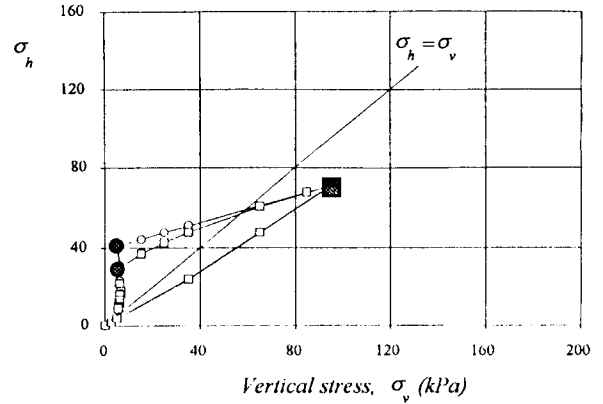
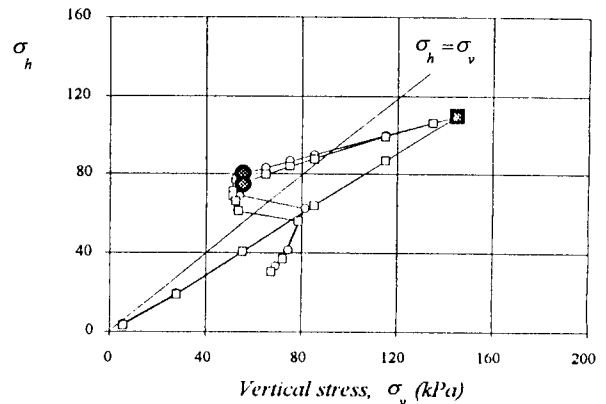


그림 5 굴착면주변의 최소, 최대 주응력경로

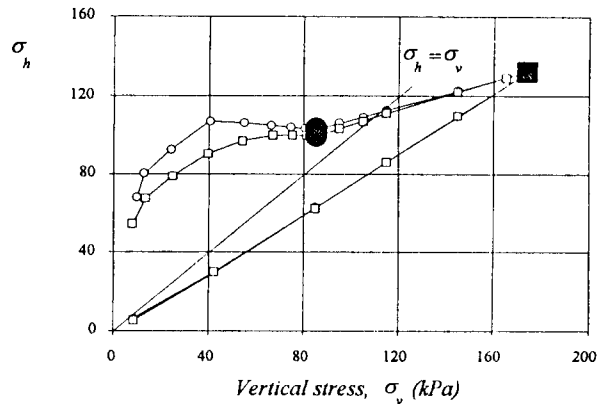
한편 그림 6에서는 수평응력과 수직응력의 관계를 시공단계에 따라 나타내고 있다. A점의 경우에는 굴착되는 단면의 모서리에 있어 수직 및 수평응력이 거의 이완되고, 굴착면의 B점은 굴착이후에 수평응력이 이완되어 주동상태를 보이고 있다. 그리고 굴착저면에 있는 C점은 수직응력이 수평응력에 비하여 크게 이완되어 주동상태와 유사한 응력상태가 나타난다. A, B 점의 성토제거과정에서 보여지듯이 Cam-clay 모델은 그 경로가 선형적으로 나타나는 데 반하여, 제안된 모델은 유연한 곡선 형태를 띠고 수평응력이 다소 작게 예측되었다. 또 Cam-clay 모델에 의한 해석은 굴착이후의 수평응력을 과대평가하는 결과를 보인다.



(a) A 점에서의 응력경로



(b) B 점에서의 응력경로



(c) C 점에서의 응력경로

그림 6 굴착면주변의 수평 및 수직응력경로

두 모델에 의한 성토제거이후에 유발되는 굴착으로 인한 최종변위는 그림 7과 같이 나타나며, 제안된 모델은 Cam-clay 모델에 비하여 최대수직변위(10.0 cm)가 약 30 %, 최대수평변위(5.0 cm)는 약 50 % 정도 크게 예측하였다.

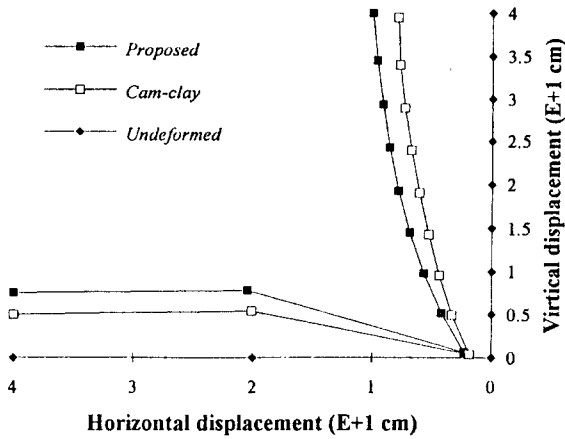


그림 7 굴착면주변의 최종 굴착후 수평 및 수직변위

5. 요약

본 연구에서는 지반굴착의 비선형 유한요소해석을 적절하게 수행하기 위하여, (1) 일반 등방경화규칙에 의한 비등방경화 구성모델을 이용하고, (2) 내재적인 응력적분방법 및 일관된 접선계수를 적용하였다. 예제 해석을 통하여, 제안된 모델에 대한 응력적분이 적절하게 수행되고 Newton법의 수렴성이 확보됨을 알 수 있었다. 또한 제안된 모델에 의하여 해석된 굴착시의 지반거동은 Cam-clay 등방경화모델에 비하여 변위가 보다 크게 유발되고 최대주응력과 수평응력등의 굴착 주변응력이 작게 나타났다. 이는 본 연구에서 적용된 비등방경화 구성모델의 특성으로 Cam-clay 모델에서 고려하지 못하는 응력 역재해서 유발되는 소성변형때문이다.

참고 문헌

- 이 승래, 오 세봉(1994), "일반 등방경화규칙에 의거한 점토의 비등방 탄소성 구성모델," 한국지반공학회지 (계재 승인)
- Anandarajah A. and Dafalias, Y. F. (1986)."Bounding Surface Plasticity. III: Application to Anisotropic Cohesive Soils," *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, 1292-1318
- Borja, R. I. and Lee, S. R.(1990)."Cam-Clay Plasticity, Part I: Implicit Integration of Elasto-Plastic Constitutive Relations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78, 49-72
- Borja, R. I., Lee, S. R., and Seed, R. B.(1989)."Numerical Simulation of Excavation in Elasto-Plastic Soils," *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13, 231-249
- Dafalias, Y. F., (1986)."Bounding Surface Plasticity. I: Mathematical Formulation and Hypoplasticity," *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, 966-987
- Henkel, D. J., (1956)."The Effects of Overconsolidation on the Behavior of Clays during Shear," *Geotechnique*, 6, 139-150
- Mroz, Z., Norris, V. A., and Zienkiewicz, O. C., (1981)."An Anisotropic, Critical State Model for Soils Subject to Cyclic Loading," *Geotechnique*, 31, 451-469

Ortiz, M. and Popov, E. P.(1985),"Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations," *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.23, pp.353-366

Pietruszczak ST. and Mroz Z, (1983)"On Hardening Anisotropy of K_0 -Consolidated Clays," *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 7, 19-38

Roscoe, K. H., and Burland, J. B.(1968)."On the Generalized Stress-strain Behavior of 'Wet' Clay," in *Engineering plasticity*, J. Heyman and Leckie(Eds.) Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp.535-609

Simo, J. C., and Taylor, R. L.(1985)."Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101-118

부록

항복면의 응력 및 내부변수 r 에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_{,p} &= -f_{,s} = 2(p - \alpha) \\ f_{,r} &= -f_{,\beta} = 3(s - \beta) / m^2 \\ f_{,r} &= -2r \end{aligned} \quad (A1)$$

항복면의 중심은 기하학적으로 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha(r, p_c) = \theta p_c + \{(a / p_c - \theta) / d\} r \quad (A2)$$

응력적분은 식 (13)을 내재적으로 연립하여 풀어야 하므로 $\delta = \{p, s, p_c, r, \Delta\phi\}^T$ 에 대한 작용벡터 $g = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}^T$ 를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} g_1 &= p - p^r + K\Delta\phi_{,p} \\ g_2 &= s - s^r + 2G\Delta\phi_{,s} \\ g_3 &= p_c - p_{cn} \exp(\theta\Delta\phi_{,p}) \\ g_4 &= \sqrt{2/3} \|(e^p)_n + \Delta\phi_{,r}\| - \frac{a}{m^2} \frac{(cr / dp_c)^b}{1 - cr / dp_c} ; e^p = \epsilon^p - \frac{1}{3} \epsilon_v \\ g_5 &= (p - \alpha)^2 + \frac{3(s - \beta)(s - \beta)}{m^2} - r^2 \end{aligned} \quad (A3)$$

식 (A4)으로 선형화하여 Newton 법으로 해를 구한다.

$$g'(\delta_{n+1}^k) \Delta\delta^k = g^k, \quad \delta_{n+1}^{k+1} = \delta_{n+1}^k - \Delta\delta^k \quad (A4)$$

이 때 $g'(\delta_{n+1}^k)$ 는 다음과 같이 식 (A3)의 미분으로 구해질 수 있다. 즉 g_i 의 미분항들은

$$\begin{aligned} g_{1,p} &= 1 + K\Delta\phi \frac{\partial f_{,p}}{\partial p}, \quad g_{1,s} = 0, \quad g_{1,r} = K\Delta\phi \frac{\partial f_{,p}}{\partial r}, \\ g_{1,r} &= K\Delta\phi \frac{\partial f_{,p}}{\partial r}, \quad g_{1,\Delta\phi} = Kf_{,p} \\ & ; \frac{\partial f_{,p}}{\partial p_c} = -\frac{2}{3} \text{tr}(\alpha_{,r}), \quad \frac{\partial f_{,p}}{\partial r} = -\frac{2}{3} \text{tr}(\alpha_{,r}) \end{aligned} \quad (A5)$$

이고 g_2 의 미분항은

$$\begin{aligned}
g_{2,p} &= 0, g_{2,s} = I + 2G\Delta\phi \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial}, g_{2,p_c} = 2G\Delta\phi \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial p_c}, \\
g_{2,r} &= 2G\Delta\phi \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial}, g_{2,\Delta\phi} = 2Gf_{,s} \\
; \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial p_c} &= -2\{\alpha_{,p_c} - \frac{1}{3}\text{tr}(\alpha_{,p_c})I\} / m^2, \\
\frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial} &= -2\{\alpha_{,r} - \frac{1}{3}\text{tr}(\alpha_{,r})I\} / m^2
\end{aligned} \tag{A6}$$

이다. g_3 의 미분은

$$\begin{aligned}
g_{3,p} &= -p_{cn}\theta\Delta\phi \exp[\theta\Delta\phi f_{,p}] \frac{\mathcal{F}_{,p}}{\partial p}, \\
g_{3,s} &= 0, g_{3,p_c} = 1 - p_{cn}\theta\Delta\phi \exp[\theta\Delta\phi f_{,p}] \frac{\mathcal{F}_{,p}}{\partial p_c}, \\
g_{3,r} &= -p_{cn}\theta\Delta\phi \exp[\theta\Delta\phi f_{,p}] \frac{\mathcal{F}_{,p}}{\partial}, g_{3,\Delta\phi} = -p_{cn}\theta f_{,p} \exp[\theta\Delta\phi f_{,p}]
\end{aligned} \tag{A7}$$

이며, g_4, g_5 의 미분항은 각각 식 (A8), (A9)와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
g_{4,p} &= 0, g_{4,s} = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\phi \frac{3}{m^2} \frac{f_{,s}}{\|f_{,s}\|}, \\
g_{4,p_c} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\phi \frac{f_{,s}}{\|f_{,s}\|} \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial p_c} - \frac{a}{m^2\|\theta\|^2} \frac{\partial}{\partial p_c} (cr_v / dp_c)^b \\
g_{4,r} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\phi \frac{f_{,s}}{\|f_{,s}\|} \frac{\mathcal{F}_{,s}}{\partial} - \frac{a}{m^2\|\theta\|^2} \frac{\partial}{\partial} (cr_v / dp_c)^b, \\
g_{4,\Delta\phi} &= \sqrt{2/3} \|f_{,s}\|
\end{aligned} \tag{A8}$$

$$\begin{aligned}
g_{5,p} &= f_{,p}, g_{5,s} = f_{,s}, g_{5,p_c} = -\frac{1}{3}f_{,p} \text{tr}(\alpha_{,p_c}) - f_{,s} : \beta_{,p_c}, \\
g_{5,r} &= -\frac{1}{3}f_{,p} \text{tr}(\alpha_{,r}) - f_{,s} : \beta_{,r}, g_{5,\Delta\phi} = 0
\end{aligned} \tag{A9}$$

$(\bullet)' \equiv \partial(\bullet) / \partial \varepsilon_{n+1}^k$ 로 정의 될 때 식 (13)의 변형률에 대한 미분은 다음의 식들로 나타난다.

$$\begin{aligned}
a_1 p' + a_3 p'_c + a_4 r' + a_5 \Delta\phi' &= K1 \\
; a_0 &= 2K\Delta\phi, a_1 = 1 + a_0, a_3 = -a_0 \alpha_{,p_c}, a_4 = -a_0 \alpha_{,r}, a_5 = K \bar{f}_{,p}
\end{aligned} \tag{A10}$$

$$\begin{aligned}
b_2 s' + b_3 \otimes p'_c + b_4 \otimes r' + b_5 \otimes \Delta\phi' &= 2G(I - 1 \otimes I) \\
; b_0 &= 6G\delta(\Delta\phi) / m^2, b_2 = 1 + b_0, b_3 = -b_0 \beta_{,p_c}, b_4 = -b_0 \beta_{,r}, b_5 = 2G \bar{f}_{,s}
\end{aligned} \tag{A11}$$

$$\begin{aligned}
c_1 p' + c_3 p'_c + c_4 r' + c_5 \Delta\phi' &= 0 \\
; c_0 &= \theta p_c, c_1 = -2c_0 \Delta\phi, c_3 = 1 - c_1 \alpha_{,p_c}, c_4 = -c_1 \alpha_{,r}, c_5 = -c_0 \bar{f}_{,p}
\end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned}
d_2 f_{,s} : s' + d_3 p'_c + d_4 r' + d_5 \Delta\phi' &= 0 \\
; d_0 &= \sqrt{6}\Delta\phi / (\|f_{,s}\| m^2), d_2 = d_0, d_3 = -\psi_{,r} - d_0 f_{,s} : \beta_{,p_c}, \\
d_4 &= -\psi_{,r} - d_0 f_{,s} : \beta_{,r}, d_5 = \sqrt{2/3} \|f_{,s}\| \\
; \psi_{,r} &= \frac{b(cr_v / dp_c)^{k-1} + (1-b)(cr_v / dp_c)^k}{dp_c(1 - cr_v / dp_c)^2}, \psi_{,p_c} = -\psi_{,r} r' / p_c
\end{aligned} \tag{A13}$$

$$\begin{aligned}
e_1 p' + e_2 s' + e_3 p'_c + e_4 r' &= 0 \\
; e_1 &= f_{,p}, e_2 = f_{,s}, e_3 = f_{,s} \alpha_{,p_c} + f_{,s} : \beta_{,p_c}, \\
e_4 &= f_{,s} \alpha_{,r} + f_{,s} : \beta_{,r} + f_{,r}
\end{aligned} \tag{A14}$$

식 A (10)~(14)를 연립하여 $\partial p_{n+1}^k / \partial \varepsilon_{n+1}^k, \partial \bar{\alpha}_{n+1}^k / \partial \varepsilon_{n+1}^k$ 를 구하면 식 (14)를 도출할 수 있다.