

# 콘크리트 균열진행의 유한요소 정규화

## Finite Element Regularization of Progressive Cracks in Concrete

송 하원\*, 변 근주\*\*, 이 주영\*\*\*, 서 철\*\*\*, 심 별\*\*\*

H.W. Song, K.J. Byun, J.Y. Lee, C. Suh, B. Shim

### Abstract

Fracture mechanics does work for concrete, provided that one used a proper, nonlinear form of fracture mechanics in which a finite nonlinear zone at fracture front is being considered. The fracture process zone is a region ahead of a traction-free crack, in which two major mechanisms, microcracking and bridging, play important roles. The toughness due to bridging is dominant compared to the toughness induced by the microcracking, so that the bridging is the dominant mechanism governing the fracture process of concrete.

In this paper the bridging zone, which is a part of extended macrocrack with stresses transmitted by aggregates in concrete, is modelled by a Dugdale-Barenblatt type model with linear tension-softening curve for the analyses of crack growth in concrete. Finite element technique is shown for implementation of the model.

### 1. 서론

콘크리트 구조물에 발생하는 균열은 구조물을 파괴에 까지 다다르게 할수 있으며 이때 파괴거동과 극한하중등을 예측하기 위해서는 진행성 균열에 대한 이해가 필요하다. 특히 압축강도에 비하여 상대적으로 훨씬 낮은 콘크리트의 인장강도로 인하여 소홀히 되었던 콘크리트의 인장거동은 파괴역학의 도입으로 콘크리트 구조물의 진행성균열에 중요한 역할을 하는 것으로 밝혀졌다. 작용하중에 대하여 콘크리트구조물에 있어서는 미시적균열의 분포에 의한 변형율연화, 종곡파괴에 미치기 이전의 균열의 국소화 그리고 균열선단의 거시 균열면에서의 응력의 전달 현상이 일어나며

특히 균열선단에 발생하는 큰 비선형 파괴진행영역(fracture process zone)으로 인하여 선형탄성파괴역학을 콘크리트에 직접적으로 적용할 수 없다. 콘크리트의 파괴진행영역은 금속재료의 균열선단에서의 소성변형에 의해 응력집중이 완화되게하는 선단소성영역에 대응되며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다.

본 논문에서는 콘크리트 파괴진행을 해석하기 위한 콘크리트의 파괴진행영역의 모델링과 불연속면을 갖고 있는 균열유한요소를 사용한 콘크리트 균열진행의 유한요소 정규화와 유한요소해석을 다루고자 한다.

### 2. 콘크리트 인장파괴 모델링

콘크리트의 파괴를 지배하는 미케니즘을 규명하는 것은 콘크리트의 균열진행해석을 위한 모델과 수치해석프로그램을 개발하는데 필수적이다. 콘크리트의 인장파괴현상을 이해하기

\* 연세대학교 토목공학과 조교수  
\*\* 연세대학교 토목공학과 교수  
\*\*\* 연세대학교 토목공학과 석사과정

위해 인장파괴 단면에서 균열면의 변위를 제어하는 방법에 의해 일축인장시험을 실시하면 균열면에서 인장응력이 인장강도에 도달한 후에도 균열면에서 응력이 전달되어 바로 응력이 0이 되지 않음을 알 수 있다. 콘크리트의 전달응력(transmitted stress :  $\sigma_t$ )이 인장강도( $f_t$ )에 도달한후 균열개구변위(crack opening displacement :  $\omega$ )의 증가에 따른 균열면에서의 전달응력은 감소된다. 이처럼 균열변위의 증가에 따른 균열의 응력전달응력이 감소되는현상을 인장연화(tension-softening) 현상이라 하며 균열면 전달응력과 탄성변형을 제외한 균열개구변위와의 관계를 나타내는 곡선을 인장연화곡선(tension-softening curve : Fig.1(a))이라 하며 콘크리트의 파괴에 관한 특성을 나타낸다.

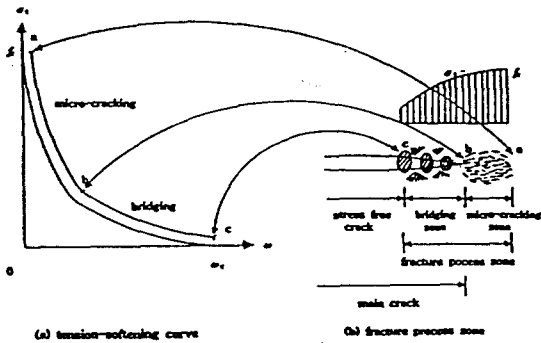


Fig.1 tension-softening curve and fracture process zone

이때 콘크리트의 균열선단에서의 파괴진행영역은 인장연화상태에 있으며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다. 즉 파괴진행영역의 각 점들 (Fig.1의 a, b, c점)은 인장연화곡선상의 점들과 대응된다. 이러한 인장연화상태에 있는 파괴진행영역은 Fig.1(b)에서 보는 바와 같이 미세 균열의 발생과 성장이 지배적인 microcracking 영역과 골재 경계면의 상호작용 마찰등에 의해 거시적으로 균열면에서 응력전달이 이루어 지는 bridging영역으로 나누어 진다.

Nirmalendran과 Horii<sup>1)</sup>는 콘크리트의 균열 진행영역에서의 microcracking과 bridging의 영향을 연구하였고 그 중 microcracking의 영향은 콘크리트의 전체 강성의 5%이내의 영향을 미치며 결국 콘크리트의 균열성장의 주된 지배기구는 bridging임을 알아냈다. 균열선단

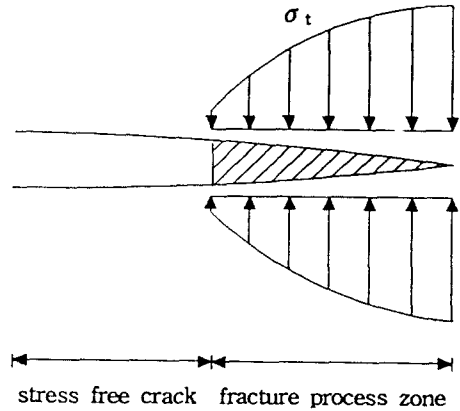


Fig.2 Dugdale-Barenblatt type model

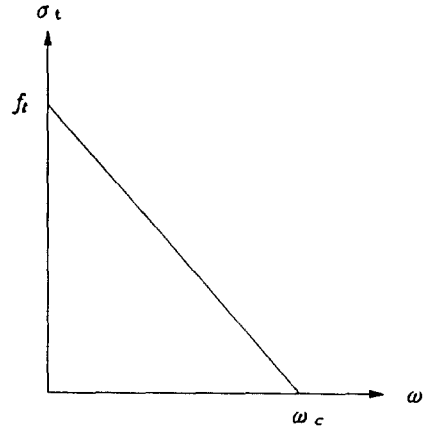


Fig.3 linear tension-softening curve

에서의 비선형거동을 모형화하기 위하여 Fig.2에서 보이는 것처럼 균열선단에 전달응력이 작용하는 Dugdale-Barenblatt형 모델이 있으며 이모델은 콘크리트의 균열진행거동을 위한 모델로서 많이 연구되었다.<sup>2,3)</sup> Horii와

Ichinomiya<sup>4)</sup>는 콘크리트파괴 실험과 해석적 결과를 비교함에 의하여 Dugdale-Barenblatt형모델은 콘크리트의 파괴진행영역의 microcracking영역은 잘 표현하지 못하나 bridging영역은 잘 대표함을 밝혔다. 본 논문에서는 콘크리트의 균열성장은 지배하는 bridging영역을 표현하기 위하여 Fig 3에서 보이는 것처럼 선형인장연화곡선을 사용한다.

$$\zeta \quad \frac{\sigma_t}{f_t} + \frac{w}{w_c} = 1 \quad (2.1)$$

콘크리트의 파괴진행해석은 파괴진행영역식 (2.1)을 만족하면서 작용하중에 대한 균열진행영역의 길이 혹은 균열진행영역길이에 대한 콘크리트의 변형과 작용하중등을 구하는데 있으며, 본 연구에서는 이를 위해 유한요소해석기법을 사용 사용하였다.

### 3. 균열진행의 유한요소 정규화

콘크리트 균열의 유한요소해석 방법으로서 크게 균열을 기하학적 불연속으로 처리한 이산균열(discrete crack)방법과 균열을 연속체로 처리한 분포균열(smearred crack)방법이 있다. 분포균열방법은 간단하나 균열로 인한 물리적인 불연속을 표현하지 못하는 결점이 있고 이산균열방법은 국소화된 균열을 잘 표현하나 균열이 유한요소경계를 따라 진행하여야 하거나 새로운 요소의 분할등을 해야하는 결점을 갖고 있다.

본 논문은 기존의 이산균열방법을 의 결점을 보완하기 위해 요소안에 불연속면을 포함한 균열요소를 사용한 유한요소해석을 사용한다. 이때 사용한 4절점사각형 isoparametric 균열요소의 불연속면은 특별한 형상함수를 도입하여 처리한다.<sup>5)</sup> 즉 콘크리트의 균열진행영역은 균열요소안의 불연속면으로서 표시되며 이때 불연속면의 상대변위는 요소안에서 일정하다고 가정하였다. 균열면의 구성관계식인 불연속면의 상대변위 즉 균열불연속변위와 전

달응력의 관계는 Dugdale-Barenblatt모델로서 표현된다.

#### 3.1 유한요소 정식화

·Fig.4에서 보는바와 같이 불연속면  $\Gamma_d$ 을 포함하고 있는 연속체  $\Omega$ 에 가상일의 원리를 적용하면 식 (3.1)을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \cdot \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_d} t_i^d \delta w_i d\Gamma \quad (3.1)$$

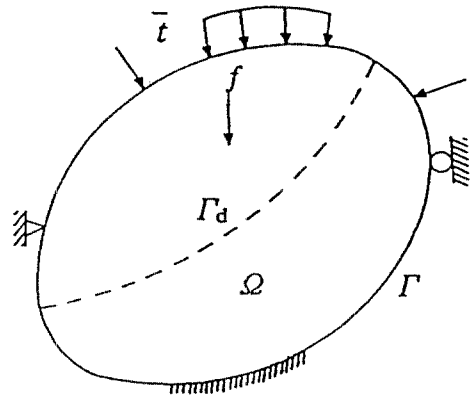


Fig.4 continuum with discontinuous line

여기서  $\sigma_{ij}$ 는 연속체내에서의 응력,  $\delta \epsilon_{ij}$ 는 가상 변형률,  $f_i$ 는 물체력 그리고  $\delta u_i$ 는 가상변위를 나타내며  $\bar{t}_i$ 는 연속체경계  $\Gamma$ 에 작용하는 트렉션이고  $t_i^d$ 와  $\delta w_i$ 는 각각 내부불연속면  $\Gamma_d$ 에 작용하는 트렉션과 내부불연속변위이다.

연속체가 변형중분이 미소일때 선형거동을 한다고 가정하면 연속체와 불연속면에서의 구성방정식은 다음식과 같이 표현된다.

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ikl} \Delta \epsilon_{kl}, \quad \Delta t_i^d = l_{ij} \Delta w_j \quad (3.2)$$

여기서  $L_{ikl}$ 은 연속체의 4차 구성재료텐서

이며  $\ell_{ij}$ 는 불연속균열면  $\Gamma_d$ 에서 균열응력과 균열불연속변위관계식으로 표현되는 2차 텐서이다.

식 (3.2)를 이용하여 식 (3.1)을 중분형으로 수정하면 다음식을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) L_{ijk} \Delta \varepsilon_{kld} d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \bar{u}_i \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \Delta \bar{u}_i \delta(\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta(\Delta w_i) \ell_{ij} \Delta w_j d\Gamma \quad (3.3)$$

식 (3.3)을 균열요소들을 포함한 유한요소법을 이용하여 풀기 위하여 영역  $\Omega$ 는  $N$ 개의 절점과 균열의 진행과 함께 1개의 요소내에 1개의 불연속절점을 갖는  $n$ 개의 균열요소를 포함한  $M$ 개의 유한요소영역들로 이산화된다 (Fig.5). 이때 균열요소를 포함한 유한요소영역  $\Omega^e$ 의 변위는 절점에서의 변위중분  $\Delta \bar{u}$ 와 불연속절점에서의 불연속변위중분  $\Delta \bar{w}$ 로 표현된다.

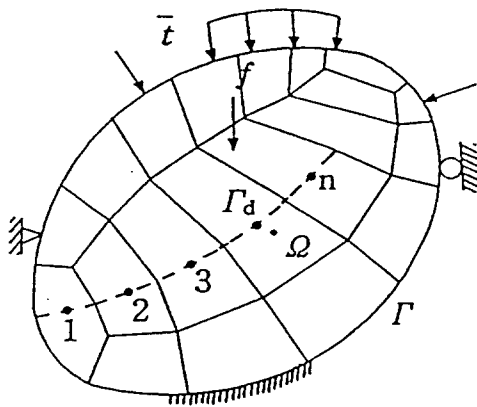


Fig.5 finite element with cracked elements

즉

$$\Delta u = N \Delta \bar{u} + N^d \Delta \bar{w} \quad (3.4)$$

이며 여기서  $N$ 은 일반적인 유한요소형상함수<sup>6)</sup>이며  $N^d$ 는 불연속 형상함수이다. 불연속 형상함수  $N^d$ 는 영역  $\Omega_e^1$ 과  $\Omega_e^2$ 에서 다음과 같다.

$\Omega_e^1$ 에서

$$N_1^d = -\frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.5)$$

$$N_2^d = -\frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$\Omega_e^2$ 에서

$$N_1^d = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (3.6)$$

$$N_2^d = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

식 (3.4)로부터  $\Omega^e$ 위의 변형률중분  $\Delta \varepsilon$ 과 변위중분  $\Delta \bar{u}$ 와  $\Delta \bar{w}$ 의 관계식은 다음식으로 표현된다.

$$\Delta \varepsilon = B \cdot \Delta \bar{u} + B^d \cdot \Delta \bar{w} \quad (3.7)$$

여기서  $B^{(d)} = \begin{bmatrix} N_x^{(d)} & 0 \\ 0 & N_y^{(d)} \\ N_y^{(d)} & N_x^{(d)} \end{bmatrix}$  이다.

위의 식 (3.5)와 (3.6)을 식 (3.3)에 대입하여  $\Delta \bar{u}$ 와  $\Delta \bar{w}$ 에 관하여 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\sum_{e=1}^M \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} B^T L B d\Omega \quad \int_{\Omega} B^T L B^d d\Omega \\ \int_{\Omega} B^{dT} L B d\Omega \quad \int_{\Omega} B^{dT} L B^d d\Omega + \int_{\Gamma_d} N^{dT} \ell N^d d\Gamma \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^M \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} N^T \cdot \Delta H d\Omega + \int_{\Gamma} N^T \cdot \Delta \bar{t} d\Gamma \\ \int_{\Omega} N^{dT} \cdot \Delta H d\Omega + \int_{\Gamma_d} N^{dT} \cdot \Delta \bar{t} d\Gamma \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

균열요소내의 불연속면은 콘크리트의 균열 진행영역을 표현하고 불연속면(Fig.6)의 인장응력  $\sigma_1$ 과 변위  $w_1$ 의 관계는 Dugdale-Barenblatt

모델의 인장전달응력과 균열개구변위의 관계와 같으며 본 논문에서는 식 (2.1)의 선형인장연화곡선식으로 표현한다.

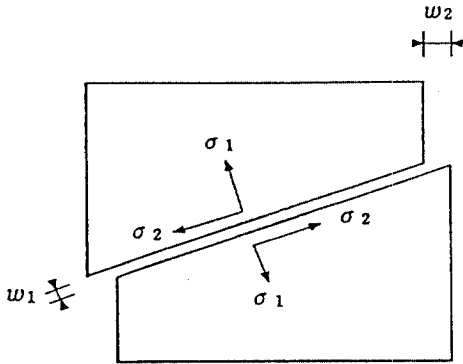


Fig.6 stresses and displacements of discontinuous line

즉 균열면에서의 구성방정식 식 (3.2)의  $l_{ij}$ 를 구할 수 있다.

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{f_t}{w_c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

#### 4. 해석예

개발된 프로그램을 검증하기 위하여 균열발생시 이상적인 응력-변형을 관계를 갖는 공시체(Fig.7)를 해석 하였다. Fig.8는 4절점 사각형요소를 사용한 유한요소 이산화를 나타내며 요소 ①과 ②에서 조금작은 최대인장응력을 사용함에 의하여 균열을 유도하였고 균열

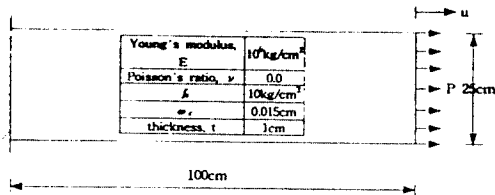


Fig.7 tension bar and stress-strain relationship of tension bar

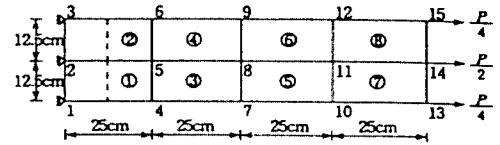
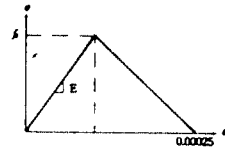


Fig.8 finite elements of tension bar

발생시 요소 ①과 ②에서 균열요소를 사용하였다. Fig.9에서 보는것처럼 두 해석결과는 이론치와 동일한 결과를 얻었다.

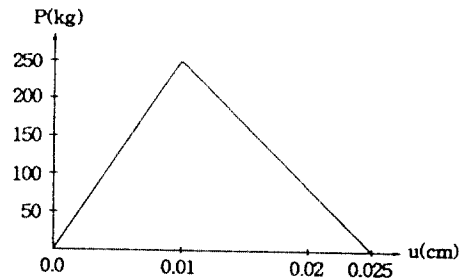


Fig.9 results of tension bar

Fig.10은 Notch를 갖고 있는 콘크리트보이다. Notch위에 균열의 발생과 함께 균열요소를 사용하였으며 Fig.11과 같이 보의 극한하중과 극한하중이후의 하중-처짐관계곡선도 얻을 수 있었다.

#### 5. 결론

콘크리트의 파괴진행영역은 콘크리트의 균열선단에 존재하며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다. 본 논문에서는 콘크리트의 균열진행을 해석하기위한 콘크리트의 파괴진행영역의 모델링과 이를 요소내의 불연속 균열면을 도

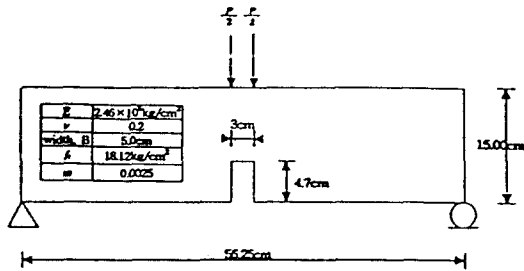


Fig.10 single-notched concrete beam

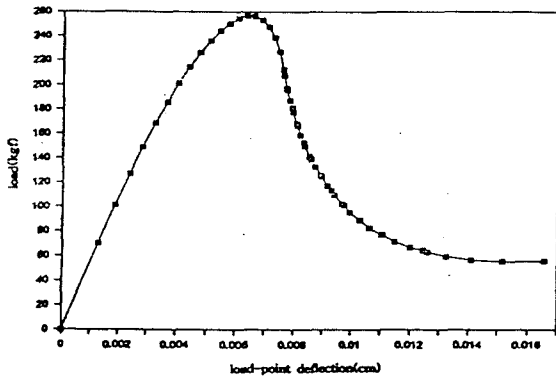


Fig.11 results from the present analysis with linear tension-softening relation

입한 균열요소를 사용하여 이산균열방법의 결점을 보완하여 콘크리트의 균열진행을 유한요소해석 하는 방법을 제시하였다. 해석예를 통하여 콘크리트의 균열진행해석에 사용된 유한요소해석프로그램을 검증하였다.

## 6. 참고문헌

1. Nirmalendran, S. and Horri, H., "Analytical Modeling of Microcracking and Bridging in the Fracture of Quasi-Brittle Materials" , *J. of Mesh. Phys. Solids*, Vol. 40, (4), 863-886, 1992.
2. Horri, H. "Model of Fracture Process Zone and a System of Fracture Mechanics for Concrete and Rock" , *inFracture Toughness and Fracture Energy* edited by Mihashi, H., et. al., Balkema Rotterdam, 406-422, 1989.
3. Ratanalert S. and Wecharatana, M. "Evaluation of the Fictitious Crack and Two Parameter Fracture Models" , *inFracture Toughness and Fracture Energy* edited by Mihashi, H., et. al., Balkema Rotterdam, 345-366, 1989.
4. Horii, H. and Ichinomiya, T., "Observation of the Fracture Process Zone by the Laser Speckle Method and Governing Mechanism in Fracture of Concrete" , *int. J. of Fracture*, Vol. 51, 19-29, 1991.
5. Wan, R. G., et. al, "A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geometricals" , *Finite Elements in Analysis and Design* Vol. 7, 129-143, 1990.
6. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., "The Finite Element Method 4th Edition" , London, McGraw-Hill Book Company, Vol. 1, 1989.