

P-version 균열모델에 의한 J-적분해석

J-integral Analysis by P-version Crack Model

이 채규*⁰, 우 광성**¹, 윤 영필***²

ABSTRACT

P-version finite element model for the computation of stress intensity factors in two dimensional cracked panels by J-integral method is presented. The proposed model is based on high order theory and hierarchical shape function. The displacements fields are defined by integrals of Legendre polynomials which can be classified into three part such as basic mode, side mode, integral mode. The stress intensity factors are computed by J-integral method. The example models for validating the proposed p-version model are centrally cracked panel, single and double edged crack in a rectangular panel under pure Mode I. And the analysis results are compared with those by the h-version of FEM and empirical solutions in literatures. Very good aggrement with the existing solution are shown.

1. 서 론

파괴역학의 기본개념은 구조계의 에너지평형이론을 기반으로 Griffith에 의해 처음으로 제시되었다. Griffith의 이론을 근거로 Irwin은 단위균열의 전진으로 인하여 방출되는 총에너지를 에너지 방출율(Energy Release Rate ; G)이라고 정의하고, 이는 균열선단부의 응력확대계수(K)와 직접적인 연관이 있다고 발표하였다. 이후 균열 및 흠집을 가지고 있는 탄성체의 정확한 응력 및 변형을 나타내기 위하여 에너지 방출율과 응력확대계수를 사용하기 위하여 에너지방출율과 응력확대계수를 구하고자 하는 해석적 및 수치적 연구들이 진행되어 왔다.

선형파괴역학에 의하여 에너지방출율 G와 응력확대계수 K값을 구조물의 형상, 하중조건 및 경계조건을 고려하여 수치해석에 의해 계산하는 것은 매우 복잡하여 유한요소법을 이용하고자 하는 시도가 이루어졌다. 유한요소법을 이용하여 에너지방출율을 계산 할 수 있는 방법으로는 변위의 삼법, 에너지방출율법, 가상균열확장법 및 J적분법을 들 수 있다. 에너지방출율법으로 응력확대계수를 산정하기 위해서는 균열확장전과 확장후의 유한요소해석을 2번 행하여야 하며 가상균열확장법도 역시 2번의 유한요소해석을 통해 유한차분개념을 갖고 에너지방출률이 얻어 진다. 물론, Parks가 제안한 강성도미분법(stiffness derivative method)를 사용하면 1번의 유한요소해석으로 응력확대계수를 결정할 수 있으나 이 때 가상균열길이를 어떻게 가정하느냐에 따라 에너지방출률 값이 영향을 받게 된다. 참고로, Parks는 균열길이의 10^{-6} 정도의 가상균열을 사용하였다고 논문 중에 밝히고 있다. 또한 균열판의 응력이 비례한도(proportional limit)내에 있고 균열선단의 소성영역(plastic zone)이 작은 경우 통상 소성영역 항복(small scale yielding)에 근거한 선형탄성파괴역학(LEFM)으로 응력확대계수를 산정할 수 있다. 이 때의 균열 매개변수 G는 Rice가 적분경로에

* 조선대학교 공과대학 토목공학과

** 전남대학교 공과대학 토목공학과

*** 목포공업전문대학 토목과

상관없이 일정하게 증명해보인 또 다른 균열매개변수 J 값과 일치하게 된다. 이 때 G 나 J 는 물리적인 의미로 균열발생력(crack driving force)를 표현하게 된다. 그러나, 균열선단에서의 소성영역이 커지게 되면 이 때는 더 이상 에너지법칙에 근거한 가상균열확장법(virtual crack extension method: VCE)이나 에너지방출율법(energy release rate method)는 더 이상 정당화될 수 없다. 이러한 대영역 항복(large scale yielding)의 경우는 탄소성파괴역학(EPFM)의 이론이 필요하게 되는데 유한요소법을 사용하여 응력확대계수 및 균열의 전진등을 파악하기 위해서는 J -적분법이 유일한 방법으로 알려져 있다.

파괴역학을 위한 유한요소법의 적용은 Gallagher등의 연구자들에 의해 행하여 졌으며 그 이후 Rice, Pian 및 Apostol등에 의하여 계승되어 균열선단에서의 응력분포에 대한 해석을 수행하기 위한 여러 형태의 요소가 제안 되어 수렴성을 검증하였다. 그러나 초기균열을 갖은 구조물은 균열선단에서의 응력분포가 유한응력에서 무한응력으로 급격한 전이현상이 발생하기 때문에 이러한 급격한 응력경사를 나타내기 위해 특별요소(special element)가 다양하게 제안되었다. 즉, Byskov는 삼각형 균열선단요소를 개발하였고, Hardy는 3:1 형상비를 갖는 4각형 균열선단요소를 개발하였다. 제안된 균열요소들은 주로 혼합변분원리(mixed variational method)에 기초를 둔 Hybrid Element를 통하여 개발되었으며 응력확대계수를 직접적으로 계산할 수 있다는 이점을 가지고 있었다. 그러나 이러한 요소들은 균열선단영역의 요소분할을 매우 조밀하게 하여야 한다는 문제점이 발생하였다. 또한 J -적분법의 기본 가정은 적분경로를 어떠한 것을 선택하든지 균열매개변수 J 는 일정하다는 것이나 종래의 h -version 유한요소법은 요소의 갯수와 요소분할 형태에 따라 적분경로의 선택이 응력확대계수의 정확도에 영향을 주고 있음이 밝혀졌다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결할 수 있는 p -version 유한요소모델을 제안하고자 한다.

p -version 유한요소모델에 기초한 유한요소해석법의 파괴역학에 적용한 연구로는 Mehta, Basu, Peano, Woo등의 논문을 열거할 수 있으나 아직도 이 분야에 대한 연구는 매우 미진한 형편이다. p -version 유한요소에서 자유도수의 증가에 따른 에너지 Norm의 상대오차로 수렴성을 분석하였을 때 h -version 유한요소모델의 수렴속도에 비하여 약 2배가량 빠르다는 것이 증명되었다.

본 연구에서는 J -적분법을 이용하여 G 값을 계산할 수 있는 p -version 유한요소모델을 제시하고자 한다. 제안된 p -version 유한요소 모델에서는 형상함수로서 계층적 성질을 가지고 있는 적분형 르장드르함수를 이용하였으며, 응력확대계수는 앞에서 언급한 바와 같이 탄성해석뿐만 아니라 탄-소성해석에도 적용할 수 있는 J -적분법을 이용하여 계산하였다. 제안된 p -version 유한요소모델에 의하여 인장모우드(MODE I)상태에 있는 중앙균열판, 일변균열판 및 양변균열판을 예제로 응력확대계수를 해석하여 h -version 유한요소모델의 결과 및 기존의 연구결과들과 비교하였다.

2. J-적분법

2.1 기본 개념

J -적분법은 에너지평형의 개념을 기본으로 하여 Rice에 의하여 처음으로 제안되었다. 두 균열면상에 초기점과 끝점을 가지고 있고 균열선단을 포함하고 있는 경로에 대하여 선적분의 값은 Rice에 의하여 다음과 같이 제안되었다.

$$J_k = \int_{\Gamma} Q d\Gamma \quad Q = \left[W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right] \quad (1)$$

여기에서 W 는 총 변형을 에너지밀도로서 다음과 같이 계산한다.

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2)$$

식(1)과 식(2)에서 σ_{ij} 는 응력장, ϵ_{ij} 는 전체 변형을, u_i 는 변위벡터로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^T &= [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]^T \\ u_i^T &= [u_1 \ u_2]^T \\ \epsilon_{ij}^T &= \left[\frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial x_k} \quad 2 \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_k} \quad \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial x_k} \right]^T \end{aligned} \quad (3)$$

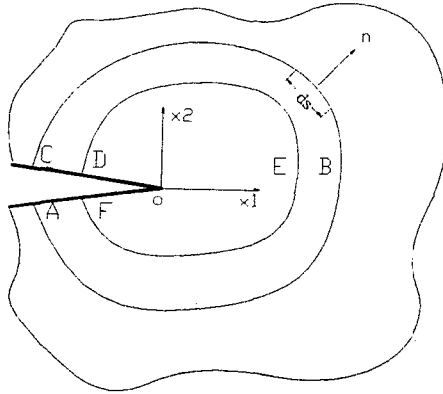


Fig.1 Contour path for J-integral evaluation

n_j 는 적분경로에 수직인 벡터 n 의 j 번째 방향의 항을 나타내고, x_k 는 균열선단을 원점으로 한 Kartessian좌표계, ds 는 적분경로상의 원호길이이다.

그림1에서 임의로 선정한 경로 Γ_{ABC} 와 Γ_{DEF} 를 포함하고 있는 폐합경로 $\Gamma (= \Gamma_{ABC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DEF} + \Gamma_{FA})$ 에서 응력 및 변위의 변형도가 일정하다고 한다면 적합조건(compatibility condition)을 만족하기 위하여 J-적분값은 다음조건을 만족하여야 한다.

$$J_k = \int_{ABC} Q d\Gamma - \int_{DEF} Q d\Gamma + \int_{CD} Q d\Gamma + \int_{FA} Q d\Gamma = 0 \quad (4)$$

균열면상에 존재하는 Γ_{CD} , Γ_{FA} 경로상에서는 Q 값이 0이 되기 때문에 이 두개의 경로에서의 J-적분값은 0이 된다. 이는 균열면에서 n_1 은 항상 0이 되고, 균열면의 표면력(traction)이 작용하지 않는다면 J_1 은 항상 0이 되기 때문이다. 즉 경로 Γ_{ABC} 과 Γ_{DEF} 에 대한 J-적분값은 동일 하다는 결론에 도달한다. 따라서 어떤 임의의 적분경로가 시작과 끝점이 균열면을 포함하고 있다면 J-적분값은 어느 경로에 상관 없이 항상 일정하다.

선형탄성조건에 있는 평면응력문제에 있어서 J-적분값은 에너지방출율 G 와 동일한 값을 갖게 되며 다음과 같이 응력확대계수 K_I 와 직접적인 관계를 가지고 있다.

$$K_I = \left(\frac{8 \mu J_1}{1+\kappa} \right)^{1/2} \quad (5)$$

여기에서 μ 는 전단탄성계수이고, κ 는 평면조건에 따른 계수로서 다음과 같이 계산한다.

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

$$\kappa = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)} \quad : \text{평면응력조건} \quad (7a)$$

$$\kappa = 3-4\nu \quad : \text{평면변형율 조건} \quad (7b)$$

2.2 J-적분값의 계산

적분값은 적분경로와 무관하기 때문에 일반적으로 $\xi=\xi_p$ =일정 경로를 취한다든가 혹은 $\eta=\eta_p$ =일정한 경로를 취한다. 수치적분을 실시하기 위한 첫번째 문제는 임의의 점에 대한 단위 정규벡터 n_j 를 정의하는 것이다. 임의의 점에 있어서 $\xi=\xi_p$, $\eta=\eta_p$ 일때의 방향을 나타내는 벡터 A , B 는 각각 다음과 같다.

$$A^T = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \eta}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, 0 \right] \quad : \xi = \xi_p \quad (8a)$$

$$B^T = \left[\frac{\partial x_1}{\partial \xi}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, 0 \right] \quad : \eta = \eta_p \quad (8b)$$

요소의 평면에 수직인 벡터 C 는 A 벡터와 B 벡터의 곱으로서 다음과 같다.

$$C^T = \left[0, 0, \left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right) \right] \quad (9)$$

적분경로에 대하여 수직인 벡터 D 는 다음과 같다.

$$D^T = C \times A = [D_1, D_2, 0] \quad : \xi = \xi_p \quad (10a)$$

$$= C \times B = [D_1, D_2, 0] \quad : \eta = \eta_p \quad (10b)$$

따라서 단위정규벡터 n 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$n^T = [n_1, n_2, 0] = \left[\frac{D_1}{N}, \frac{D_2}{N}, 0 \right] \quad : \quad N = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \quad (11)$$

따라서 식(1)의 $[\sigma_{ij}n_j]$ 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

가우스 적분점에서 ds 는 다음과 같다.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2} d\eta \quad ; \quad \xi = \xi_p \quad (13a)$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad ; \quad \eta = \eta_p \quad (13b)$$

평면응력문제에 있어서 변형을 에너지 밀도는 다음과 같다.

$$W = \frac{1}{2} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \quad (14)$$

따라서 각 요소의 J-적분값은 식(12),(13),(14)를 식(1)에 대입하므로써 $\xi = \xi_p$ 인 경우에는 식(14a), $\eta = \eta_p$ 인 경우에는 식(14b)와 같이 계산할 수 있다.

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_1 \right. \\ \left. - \left((\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2} \right\} d\eta \quad (15a)$$

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_1 \right. \\ \left. - \left((\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2} \right\} d\xi \quad (15b)$$

3. p-version 유한요소 모델

계층적 성질을 가지고 있는 고차 다항식에 근거한 형상함수는 정규영역에 대하여 3개의 그룹으로 분류된다. 3개의 그룹은 각각 Basic Mode, Edge Mode 및 Bubble Mode로 정의된다. Basic Mode는 P=1일때 선형 형상함수를 의미하고, Edge Mode는 P=2에서부터 발생하여 좌표값을 갖지 않은 절점이 꼭지점을 제외한 4변에 추가되는 Mode이다. Bubble Mode는 유한요소법의 수렴조건중의 하나인 적합조건을 만족하기 위하여 P=4이상에서 부터 발생하는 내부 모드이다. 본 연구에서 사용한 고차 다항식은 적분형 Legendre함수로서 정규영역에 대하여 다음과 같다.

$$F_{j+1}(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int P_j(t) dt \quad (16)$$

여기에서 $P_j(t)$ 는 Rodrigues에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^2 - 1)^j \quad i=0,1,2,3\dots \quad (17)$$

유한요소 방정식은 Gauss 적분법을 이용하였다. Gauss 적분법은 불균등하게 배치된 적분점에 대하여 가중치를 곱하여 적분값을 산정하는 방법으로서 피적분함수의 차수를 p 라고 할 때 적분점의 개수는 $(p+1)/2$ 개 이상이 필요로 한다. 수치적분의 차수는 매우 중요하여 충분히 많은 적분점을 사용하면 정확한 적분값을 계산할 수 있어 본 연구에서는 피적분 차수와 관계없이 1개의 요소에 대하여 10x10의 적분점을 사용하였다.

4. 수치해석 예

제안된 J-적분법을 이용한 p-version FEM의 수치해석에는 인장을 받는 중앙균열판, 일반 균열판 및 양단 균열판을 대상으로 하였다. 적분경로는 Gauss 적분점을 이용하여 10개의 경로를 취하여 각각의 J-적분값을 계산하고, 평균 J-적분값을 이용하여 응력확대계수를 계산하였다. 각각의 P-version 유한요소모델에 의한 결과는 특이요소를 포함한 h-version 유한요소모델결과 및 선행된 연구결과와 비교하여 보았다.

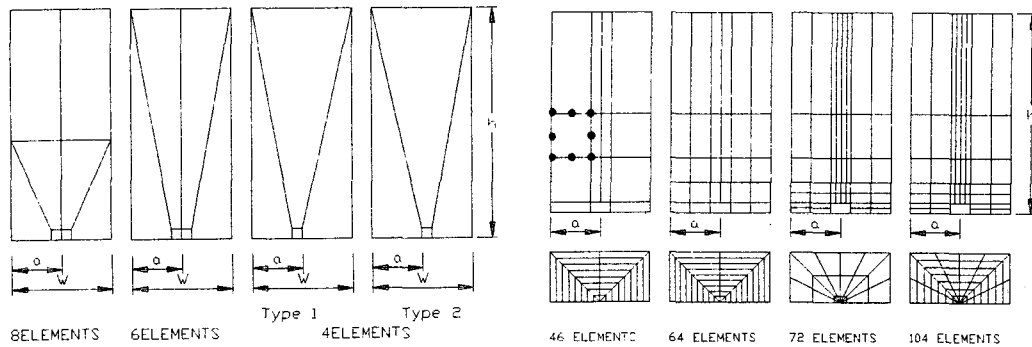


Fig.2 Type of Mesh for P-version FEM Fig.3 Type of Mesh for h-version FEM

4.1 중앙균열판

첫번째 수치해석예로서 인장을 받고 있는 중앙균열판을 취하였다. 모델링은 구조물의 1/4 영역에 대하여 p-version 유한요소 모델은 그림2와 같은 요소망을 사용하였으며, h-version 유한요소모델은 그림3과 같이 isoparametric 요소를 사용한 요소분할을 실시하였다. h-version 유한요소모델에서는 균열선단부의 정확한 모델링을 위하여 삼각형 특이요소(quarter point triangular element)를 이용하였다. 그림4에서는 $a/W=0.5$, $h/W=2$ 인 균열판에 대하여 자유도(number of degree of freedom)의 증가에 따른 p-version 유한요소 모델과 h-version 유한요소모델과의 수렴성을 나타내었다. 그림4에서 보는 바와 같이 p-version에 의해 계산된 형상계수(Correction Factor)는 요소의 개수와 상관 없이 p-level의 증가에 따라 매우 좋은 수렴성을 보여 주고 있으며 p-level=8일 때 Brown과 Feddersen이 제시한 값과 매우 근접한 형상계수를 계산할 수 있으나, h-version 유한요소 모델은 p-version 유한요소모델에 비하여 매우 많은 자유도를 가지고 있음에도 불구하고 기존의 연구결과와 큰 오차가 발생하고 있음

알 수 있다. a/W 비를 증가시켜 가며 계산한 형상계수는 그림5에서 보는 바와 같이

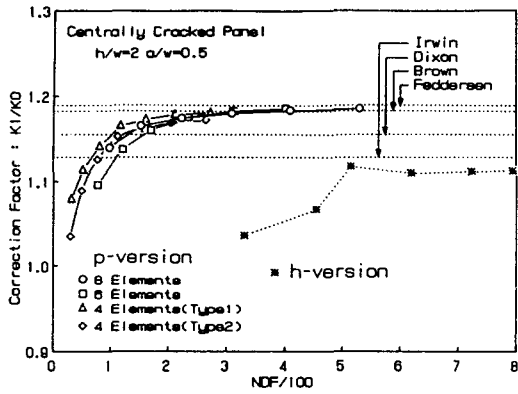


Fig.4. Convergence Characteristics

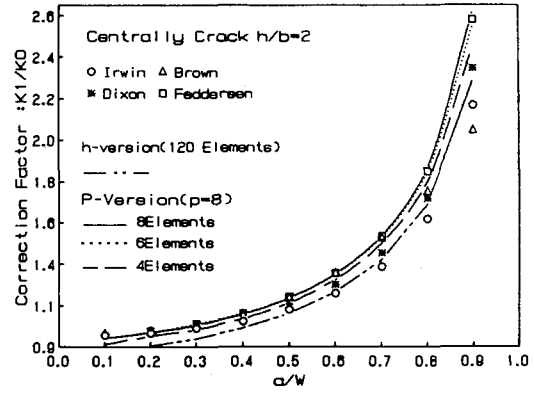


Fig.5 Correction Factor vs a/W for Centrally Cracked Panel

p-version유한요소모델은 전반적으로 Feddersen의 연구결과와 일치된 값을 얻을 수 있으나, 104개 요소(자유도:722)를 이용한 h-version유한요소모델은 a/W 가 0.6 이상에서만 Dixon의 연구결과와 유사한 값을 얻을 수 있었다.

4.2 일반균열판

두번째의 해석예로는 인장응력 상태에 있는 일반균열판에 대하여 형상계수를 계산하였다. 구조물의 모델링은 구조물의 대칭성을 이용하여 구조물의 1/2영역에 중앙균열판과 동일하게 실시하였다. 그림6에서 보는 바와 같이 p-version유한요소모델은 p-level=8일 때의 계산 결과는 요소의 갯수와 상관없이 Gross, Bowel, Keer, Benzley의 연구결과와 일치된 경향을 보여주고 있으나, 104개의 요소를 이용한 h-version유한요소모델은 전반적으로 약 5%의 상대 오차를 갖는 결과값을 나타내고 있다.

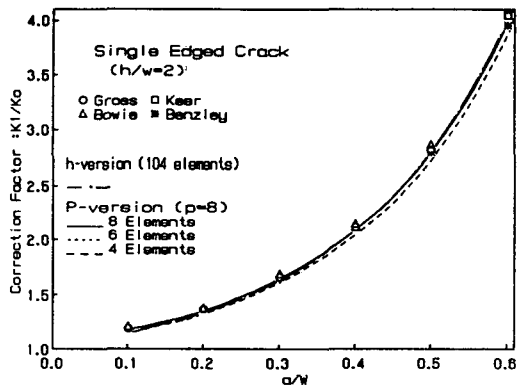


Fig.6 Correction Factor vs a/W for Single edged Crack Panel

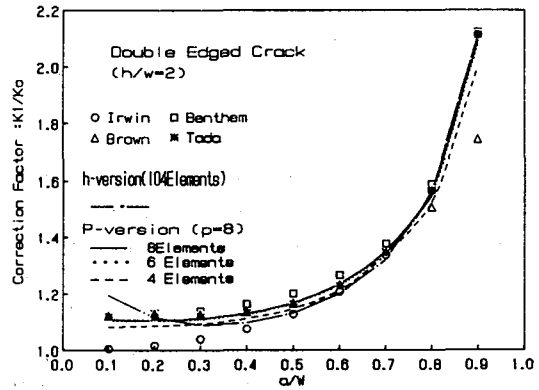


Fig.7 Correction Factor vs a/W for Double edged Crack Panel

4.3 양변균열판

마지막 해석에는 양단에 균열을 가지고 있는 판에 인장응력이 작용하는 경우이다. 해석대상 균열판의 대칭성을 이용하여 1/4영역에 대하여 모델링을 하였다. 모델 요소망은 이전의 해석예와 동일하게 취하였다. p -level=8일 때의 p -version유한요소모델의 해석결과 및 104개의 요소를 이용한 h -version유한요소모델의 해석결과를 Irwin, Brown, Benthem, Tada의 연구결과와 함께 그림6에 나타내었다. 그림6에서 알 수 있는 바와 같이 p -version의 계산결과는 Benthem의 연구결과와 잘 일치하고 있다. 그러나 h -version유한요소모델은 a/W 가 0.7 이상을 제외하고는 전반적으로 작은 해석결과를 얻을 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 균열판을 해석할 수 있는 p -version 유한요소 모델을 제안하였다. 제안된 유한요소 모델을 이용한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) p -version유한요소 모델은 4개 요소를 사용하는 경우 균열 선단부근을 제외하고는 p -level>6에서 모든 적분경로에서 거의 동일한 J -적분값을 계산할 수 있다.

(2) p -version유한요소 모델은 사용한 요소의 갯수에 상관 없이 p -level>6 ($NDF \geq 150$)에서 이론값과 비교하여 상대오차 5%이내의 값을 계산할 수 있으나 종래의 유한요소모델을 사용하는 경우 72개요소($NDF=534$)에서부터 상대오차 10%이내의 값을 계산할 수 있었다.

(3) 예제의 수치해석 결과 p -version유한요소 모델은 균열의 크기에 상관 없이 이론값과 잘 일치된 응력확대계수를 계산할 수 있다.

이상의 결과에서 볼때 제안된 p -version유한요소 모델은 사용 요소의 갯수에 상관없이 매우 정확한 해석값을 구할 수 있으며 종래의 h -version유한요소법에 비하여 매우 작은 NDF 에서도 충분한 수렴성을 보여 주었다. 따라서 J -적분법을 이용한 p -version 유한요소모델은 모델의 간편성 및 해의 정확성등의 이점을 가지고 있어 균열판 해석을 위한 적합한 모델이라 할 수 있다.

참고문헌

1. K.S.Woo and P.K.Basu, "Analysis of Singular Cylindrical Shells by p -version of FEM", *Int. J. Solids Struct.*, Vol.25, No.2, pp.151-165, 1989
2. J.R.Rice, "A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. applied Mech.* 35, pp 376-386, 1968
3. D.R.J Owen and A.J.Fawkes, *ENGINEERING FRACTURE MECHANICS Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Limited, 1983.
4. 우광성, 장용채, 정우성, "계층적 축대칭요소에 의한 p -version모델", 대한토목학회논문집, 제12권, 제4-1호 pp67-76, 1992.12
5. 우광성, 이채규, 윤영필, "원공을 갖는 유한판의 응력집중에 대한 p -version모델", 대한토목학회논문집, 제12권 제4-1호, pp1-8, 1992.12
6. 우광성, 이채규, " p -version유한요소법에 의한 피로균열 해석", 전산구조공학, 제 5권 제3호, 1992. 9