

Chua 회로에서의 Bifurcation 과 Attractor

배 영철^{**o} · 고재호^{*} · 임화영^{*}

광운대학교 공과대학

*제어 계측 공학과

**전기 공학과

Bifurcation and Attractor from Chua's circuit

Bae yeong-chul*, Ko jae-ho*, Yim wha-yeong*

*Dept. of control and instrumentation Eng. ** Dept. of electrical Eng. Kwangwoon Univ.

Abstract

Chua's circuit is a simple electronic network which exhibits a variety of bifurcation and attractors. The circuit consists of two capacitors, an inductor, a linear resistor and a nonlinear resistor. This paper describes the implementation for a practical op amp of Chua's circuit.

In experiment results, 1 periodic motion, 2 periodic motion, rössler type attractors, stranger chaotic attractor periodic window and limit cycle are shown, which are coincide with computer simulation.

I. 서론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학, 공학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다. [1-3] 간단한 전기 및 전자 회로를 구성하여 카오스 현상이 존재함을 증명하는 논문도 발표되고 있으며 [4-5] 이를 대표하는 것으로 Chua 회로를 들 수 있다 [6-9].

Chua 회로는 매우 단순한 자율, 3차계 시스템으로 Reciprocal이며 1개의 비선형 소자인 3 구분 선형 저항 (3 segment piecewise - linear resistor)과 4개의 선형 소자인 (R , L , C_1 , C_2)로 구성되는 발진회로다.

Chua 회로의 카오스 어트랙터는 Matsumoto [6]가 컴퓨터 시뮬레이션으로 처음 제시하였으며 이후 실험에 의한 Chua 회로의 카오스 어트랙터를 증명한 연구[9]도 있었다.

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로[6]를 그림 1에 나타냈으며 상태방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} &= G(v_{C2} - v_{C1}) - g(v_{C1}) \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} &= G(v_{C1} - v_{C2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $G = 1/R$, $g(\cdot)$ 은 식 (2)와 같이 표현되는 구분 선형 함수(piecewise-linear function)이며 그림 2에 나타내었다.

$$g(v_R) = m_0 v_R + \frac{1}{2} (m_1 - m_0)[|v_R + B_p| - |v_R - B_p|] \quad (2)$$

여기서 m_0 은 내부 영역의 기울기, m_1 은 외부 영역의 기울기, $\pm B_p$ 는 Break-point이다.

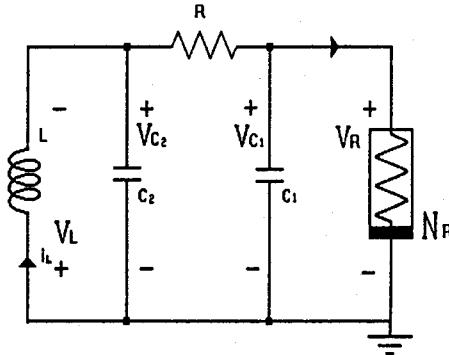


그림 1. Chua 회로
Fig. 1. Chua's circuit

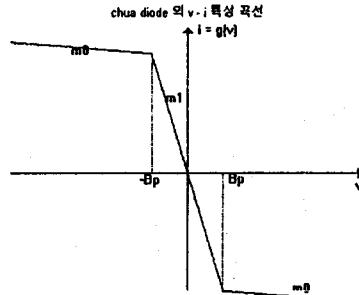


그림 2. 3 구분 선형 저항 - 전류(v-i) 특성
Fig. 2. Three segment piecewise-linear v - i characteristic.

Matsumoto [6]에 의해 제시된 Chua 회로의 비선형 저항을 3 구분 선형 저항으로 구성하면 캐퍼시터의 충전 저항과 전력이 무한대가 되어 실제회로를 구성할 수 없는 문제점이 있다.

본 논문에서는 Chua 회로에서 비선형 저항 N_R 을 5 구분 선형 회로로 구성하여 3구분 선형회로의 문제점을 해결하고 수치해석을 통하여 카오스 현상이 존재함을 위상공간상의 어트랙터로 증명하였으며 실제 소자로 하드웨어를 구현하여 파라미터 값의 변화에 의한 주기 신호와 카오스 신호를 만들어내는 Chua 회로를 제작하였다.

2. 컴퓨터 시뮬레이션 및 하드웨어 구현

본 논문에서는 Matsumoto[6]가 컴퓨터 시뮬레이션한 결과를 이용하여 다음과 같은 방법으로 하드웨어를 구현하였다.

2-1. 단위 및 시간 rescaling

시뮬레이션 결과로 제시된 각 소자는 단위가 없는 값으로 상태변수를 v_{C1}, v_{C2}, i_L 로 미분방정식을 구성하여 이트랙터를 구할 수 있었으나 시뮬레이션 결과값으로는 하드웨어를 구성할 수 없으므로 전자회로에서 쉽게 구현할 수 있는 단위로 소자값을 변환하여야 한다.

본 논문에서는 소자 단위 및 시간에 대하여 rescaling한 후 각 소자의 값에 가장 근접하고 쉽게 구할 수 있는 새로운 소자값을 다음과 같이 선정하였다.

$$\begin{aligned} C_1 &= 10 \text{ [nF]} \\ C_2 &= 100 \text{ [nF]} \\ L &= 18 \text{ [mH]} \\ R &= 2000 \text{ [\Omega]} \end{aligned}$$

2-2. 5 구분 선형 저항 구성

Matsumoto[6]에 의해 제시된 3 구분 선형 저항은 시뮬레이션에서 시스템을 발산시키는 초기조건이 존재하므로 본 논문은 이를 5 구분 선형 저항소자로 구성하였다.

5 구분 선형 소자의 함수는 식(3)에 회로도를 그림3, $v-i$ 특성을 그림 4에 각각 나타내었다.

$$\begin{aligned} g(v_R) &= m_{-1}v_R + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)[|v_R + B_{P1}| - |v_R - B_{P2}|] \\ &+ \frac{1}{2}(m_0 - m_{-1})[|v_R + B_{P1}| - |v_R - B_{P2}|] \quad (3) \end{aligned}$$

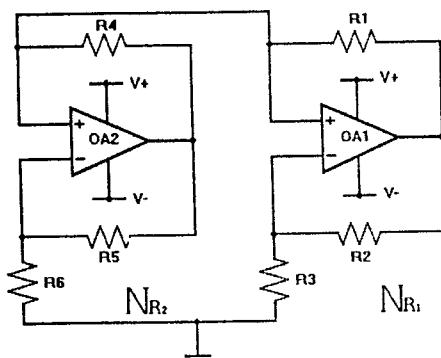


그림 3. 5 구분 선형 저항의 회로도
Fig. 3. The Circuit of 5 segment piecewise-linear resistor.

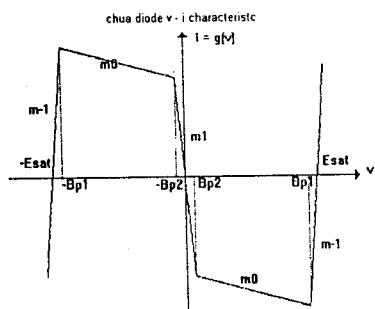
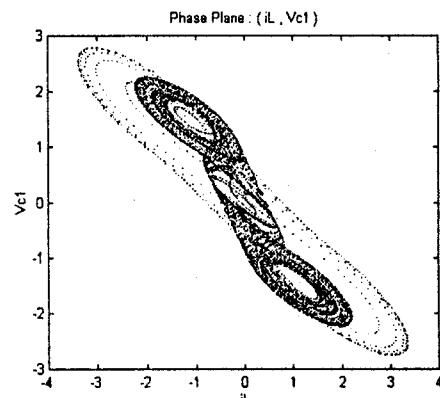


그림 4. 5 구분 선형 전압-전류(v-i) 특성
Fig. 4. Five segment piecewise-linear v-i characteristic

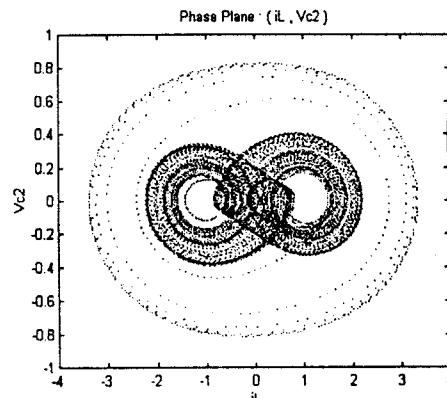
2-3. 5 구분 선형 저항에 의한 컴퓨터 시뮬레이션

5 구분 선형 저항값으로 그림 1과 같은 Chua 회로를 구성하여 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다.

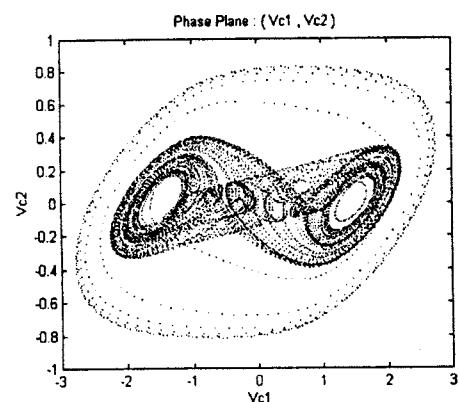
초기 조건이 $v_{c1}(0) = 2.532735, v_{c2}(0) = 0.0012585458, i_L(0) = -3.367482$ 에서는 카오스 이트랙터와 hyperbolic periodic orbit가 모두 관찰되며 그림 5에 나타내었다.



(a) (i_L, v_{c1}) 이트랙터



(b) (i_L, v_{c2}) 이트랙터



(c) (v_{c1}, v_{c2}) 이트랙터

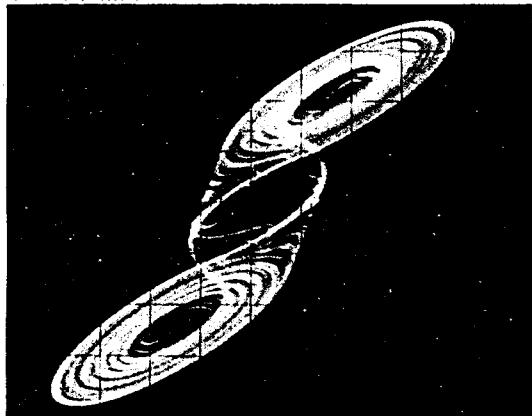
그림 5. 카오스 이트랙터와 hyperbolic periodic orbit
Fig. 5. Chaos attractor and hyperbolic periodic orbit.

3. 파라미터 변화에 의한 Bifurcation과 카오스 어트랙터

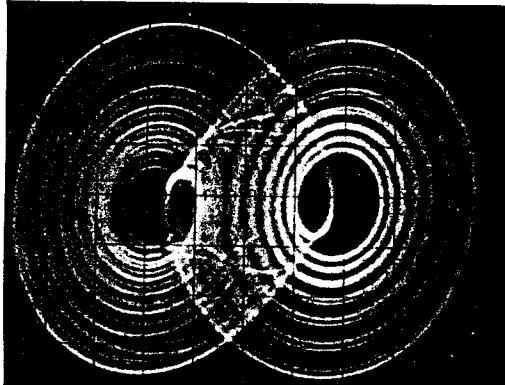
3-1. R 값의 변화

그림 1에서 저항 R 값을 2,000 Ω에서 0 Ω 까지 변화하면 Chua 회로에서 1주기 운동, 2주기 운동, 4주기 등의 주기 배증 과정(Period-doubling)이 나타나고, Rossler형 어트랙터, Double scroll strange 어트랙터, 주기성 윈도우, 리미트 사이클이 차례로 나타난다.

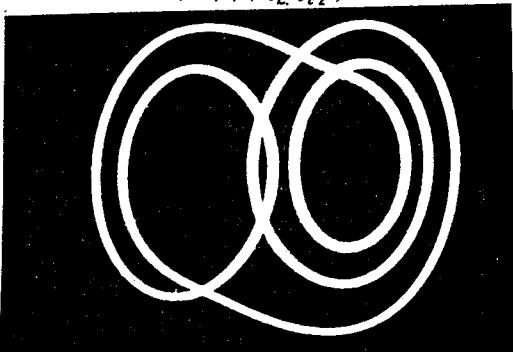
그림6에 하드웨어 구현에 의한 카오스 어트랙터, 주기성 윈도우를 나타내었다.



(a) Double Scroll 어트랙터 (i_L, v_{c1})



(b) Double Scroll 어트랙터 (i_L, v_{c2})



(c) Periodic Window (i_L, v_{c2})

그림6. Chau 회로의 실험결과

Fig. 6. The experiment result of Chua's circuit.

3-2. C_1 값 변화

저항 R = 1.8 kΩ으로 고정시켜 놓고 C_1 값을 10 nF에서 6 nF로 변화 시켰을 때, R값 변화에 의한 주기운동과 카오스 운동이 일어난다.

3-3. L 값 변화

R = 1.8 kΩ, $C_1 = 10$ nF, $C_2 = 100$ nF 으로 고정하고 L값을 변화시켰을 때 L값 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동이 일어난다.

4. 결론

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로를 3구분 선형 함수 대신 5구분 선형 함수를 비선형 지향을 사용하여 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 카오스 어트랙터를 확인하고 이를 실제 전자 회로로 구현할 수 있도록 각 소자의 단위 값과 시간에 대하여 rescaling하고 쉽게 구할 수 있는 소자값으로 변환한 후 Chua 회로를 구성하였으며, R, L, C 값의 변화에 의해 1주기, 2주기, 4주기의 주기 배증 과정이 Rossler형 어트랙터, Double Scroll stranger 어트랙터, 주기성 윈도우, 리미트 사이클이 차례로 나타남을 확인하였다. 앞으로 보다 강진한 Chua 회로의 구성과 제어 방법이 연구과제로 남는다.

참고문헌

1. 배영철, 카오스의 응용, 전자 저널, pp 110 - 112, 1993.
2. 고재호, 배영철, 임화영 “주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer - Van der Pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구” 1995 제어계측연구회 학술발표회 논문집, pp 100 - 102, 1995
3. 고재호, 배영철, 임화영 “연속시간 시스템에서의 카오스 피드백 제어” 1995 제어계측연구회 학술 발표회 논문집, pp 112 - 114, 1995
4. M. Kuramitsu and K. I. Mori "A simple Electric Circuit Generating chaos" Technical report IEICE, NLP 93 - 68, pp 31 - 38, 1994
5. Y. Ueda & N. Akamatsu "Chaotically Transitional phenomena, in the Forced Negative - Resistance Oscillator" IEEE Trans, Circuit Syst., Vol. CAS-28, No. 3, pp. 217 - 224, 1981
6. T. Matsumoto "A chaotic Attractor from chua's circuit", IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-31, No. 12, pp 1055 - 1058, 1984
7. T. S. Parker, and L. O. Chua "The Dual Double Scroll Equation" IEEE Trans. Circuit Syst., Vol. CAS-32, No. 9, pp 1059 - 1073, 1987
8. G. O. Z'hong and F. Ayrom "Experimental Confirmation of chaos from chua's circuit" Int. J. Circuit Theory Appl. Vol. 13, pp 93 - 98, Jan, 1985
9. T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro. "The Double Scroll" IEEE. Trans. Circuit Syst. Vol. CAS-32, No. 8, pp 798 - 818, 1985