

## 최소분산제어법에 의한 강인한 서보 제어기 설계

김상봉<sup>1</sup>, 이충환<sup>2</sup>, 유희룡<sup>3</sup>

\*1 부산수산대학교 공과대학 기계공학과, \*2 쌍용자동차(주), \*3 부산수산대학교 공과대학 기계공학과 대학원

### A Robust Servo Control System Design Using Least Distribution Control Method

Sang Bong Kim<sup>1</sup>, Choong Hwan Lee<sup>2</sup>, Hui Ryong Yoo<sup>3</sup>

\*1 National Fisheries University of Pusan Department of Mechanical Engineering, \*2 SsangYong Motor Company  
\*3 National Fisheries University of Pusan Department of Mechanical Engineering Graduated School

#### Abstract

A servo control algorithm robust under disturbance and reference change is developed using the self tuning control method based on the concept of the least distribution control. Also, the design algorithm incorporates the concepts of the well known internal model principle and the annihilator polynomial. In order to evaluate the effectiveness of the method, MAGLEV (Magnetic Levitation) system is used and the position control experiment for reference changes and disturbances of step type is done.

#### 1. 서론

성능이 우수한 제어 시스템을 설계하려면 플랜트의 동특성이 정확히 모델링 되고 그 환경의 지식이 정확해야만 된다. 그러나, 실제적인 시스템에서는 이들의 정보를 정확하게 파악하기란 어려운 경우가 많다. 적용제어는 이와같은 어려움을 해결하는 제어이론으로서 개발된 것으로, 환경의 동특성 변동을 고려함과 동시에 플랜트의 동특성이 미지 또는 불확실 하더라도 바람직한 성능을 항상 유지할 수 있는 제어방식으로 알려져 있다.

그 제어방식으로, 모델 구현형 제어방식과 자기동조 제어방식의 두 가지가 대표적이며, 두 방식의 통일화가 이루어져, 적용 투포의 대역적 수렴성이 증명되기도 하여 이상상태에 있어서 적용제어이론은 체계화되어, 일단 완성을 본 단계라고 할 수 있으며, 최근에 이르러 보다 실 시스템의 거동에 가까운 로보트 적용제어가 활발하게 연구되고 있다<sup>[1]-[7]</sup>. 시스템에 대한 적용연구는 항공기, 로봇, 선박, 전기기기 및 프로세스 공업등의 분야에서 행해지고 있지만, 구체적인 용어에라고 하는 관점에서 보면, 아직 그렇게 많지 않다. 그러나 이론의 전진과 마이크로 프로세서의 급속한 진보에 따라서, 디지털 계산기에 의한 실 시스템에 대한 적용 가능성이 산업계의 각종 분야에서 큰 관심을 모으고 있다.

서보 시스템은 임의의 파라미터 변동이나 외란에 대해서 주어진 목표치를 자동적으로 추종하는 강인한 능력을 가져야만 한다. 일반적으로 서보제는, 제어대상에 외란의 모델을 포함한 서보 보상기를 결합하여 구성된 확대계를 안정화시키는 피드백 제어계로 그 목적을 달성한다. 적용제어 이론은 서보계 구성법으로, 확률적 외란을 포함한 플랜트의 출력 분산을 최소화하는 최소분산제어와 서보 문제를 대상으로 한 극영점 지정제어법을 비롯하여, 외란을 포함한 확대 시스템을 새로운 플랜트로 간주하여, 외란의 영향을 적극적으로 제거하여 출력오차의 수렴성을 확보하는 방법들이 제안되어 있다<sup>[1]-[7]</sup>.

본 논문에서는 미지 풀렌트를 대상으로 하여 변화하는 환경에 적용 할 수 있는 능력을 가진 적용제어이론에 의한 제어계 설계법 중의 하나인 최소분산제어법을 이용하여, 외란이나 목표치가 기지의 차분다항식 형태로 주어진 경우<sup>[8]</sup>, 페루프 시스템이 바람직한 제어특성을 갖게 하는 강인한 서보 제어기 설계법을 제안하였다.

본 설계법의 유효성을 입증하기 위해, MAGLEV(Magnetic Levitation) 시스템을 이용하였으며, 구체적인 실험으로는 스템 형식의 목표치 변경 및 외란에 대한 강인성의 효과를 검증하였다.

#### 2. 플랜트 모델 및 문제설정

플랜트는 다음과 같은 1입력 1출력의 선형이산시간 시스템으로 주어지는 것으로 한다.

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + w(k) \quad (2.1)$$

단,

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \quad (2.2a)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m} \quad (2.2b)$$

여기서  $u(k)$ ,  $y(k)$ 는  $k$ 시점에서의 플랜트 입력과 출력이며,  $w(k)$ 는 다음을 만족한다고 한다.

$$P_u(q^{-1})u(k) = 0 \quad (2.3)$$

$$P_w(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_rq^{-r} \quad (2.4)$$

단,  $P_w(q^{-1})$ 은 안정한 다항식이라고 가정한다.

(2.1)식의 이상상태 조건을 다음과 같다고 한다.

① 다항식  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ 은 기약이다.

② 계수  $a_i(i=1, \dots, n)$ ,  $b_j(j=1, \dots, m)$ 은 미지의

정수이다. 단,  $b_0 \neq 0$ 이다.

③  $A(q^{-1})$ 와  $B(q^{-1})$ 의 차수  $n$ 과  $m$ 은 기자이다.

④  $B(q^{-1})$ 은 안정한 다항식이다.

조건 ④의 안정다항식은 그 근이 모두 단위원내에 존재하는 것이며, 최소위상 플랜트를 의미하고 있다.

플랜트 식(2.1)에 대해 다음을 만족하는 목표치 입력  $y_m(k)$ 가 주어 진다고 한다.

$$P_m(q^{-1})y_m(k) = 0 \quad (2.5)$$

$$P_m(q^{-1}) = 1 + m_1q^{-1} + \dots + m_rq^{-r} \quad (2.6)$$

단,  $P_m(q^{-1})$ 은 안정한 다항식이라고 한다.

(2.4)식과 (2.6)식의 최소공배다항식을 다음과 같이 정의한다.

$$P(q^{-1}) = l.c.m(P_m(q^{-1}), P_w(q^{-1})) \\ = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_rq^{-r} \quad (2.7)$$

(2.1)식의 양변에 (2.7)식을 작용(operating)시킨 후, (2.3)식의 관계를 이용하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$P(q^{-1})A(q^{-1})y(k) = P(q^{-1})B(q^{-1})u(k) \quad (2.8)$$

본 제어계 설계의 목적으로 상기의 가정하에서 플랜트의 출력  $y(k)$ 가 바람직한 출력  $y_m(k)$ 에 가능한 한 같게 되도록, 즉, 분산 식(2.9)가 최소가 되도록 하는 제어 입력  $u(k)$ 를 결정하는 것으로 한다.

$$J = E[(y_m(k) - y(k))^2] \quad (2.9)$$

#### 3. 제어계 설계

##### 3.1 최소분산제어 시스템의 설계

식(2.8)에서 새로운 입력  $u(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$v(k) = P(q^{-1})u(k) \quad (3.1)$$

이때 식(2.8)은

$$\tilde{A}(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})v(k) \quad (3.2)$$

와 같이 되어, 외관에 대한 영향을 제거한 형태의 시스템 표현임을 알 수 있다. 단,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(q^{-1}) &= P(q^{-1})A(q^{-1}) \\ &= I + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n+s} q^{-(n+s)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

풀랜트 식(3.2)의 대형식  $\tilde{A}(q^{-1})$ 와  $B(q^{-1})$ 가 기억이라고 할 때,  $(n+s)$ 차의 모닉(monnic)한 안정다항식  $D(q^{-1})$ 을 도입하면, 다음의 관계를 만족하는 다항식  $H(q^{-1})$ 을 일의적으로 정할 수 있다.

$$D(q^{-1}) = \tilde{A}(q^{-1}) + H(q^{-1}) \quad (3.4)$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n+s} q^{-(n+s)} \quad (3.5)$$

$$H(q^{-1}) = h_1 q^{-1} + \dots + h_{n+s} q^{-(n+s)} \quad (3.6)$$

식(3.4)의 양변에  $y(k)$ 를 곱하고, 식(3.2)식의 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned} D(q^{-1})y(k) &= \tilde{A}(q^{-1})y(k) + H(q^{-1})y(k) \\ &= B(q^{-1})v(k) + H(q^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

로 된다. 지금, 출력오차  $e(k)$ 를

$$e(k) = y_m(k) - y(k) \quad (3.8)$$

로 정의하여 오차방정식을 구하면

$$\begin{aligned} D(q^{-1})e(k) &= D(q^{-1})y_m(k) - B(q^{-1})v(k) \\ &\quad - H(q^{-1})y(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

로 된다. (3.9)식에서 우변이 영으로 되게 하는 입력, 즉 식(3.10)에 대해 오차방정식은  $e(k) \rightarrow 0$ 과 같이 됨을 알 수 있다.

$$v(k) = \frac{1}{B(q^{-1})} \{ D(q^{-1})y_m(k) - H(q^{-1})y(k) \} \quad (3.10)$$

즉,  $y_m(k) - y(k)$ 의 분산을 최소로 하는 것을 알 수 있다.

식(3.1)을 이용하여 식(3.10)를 다시 정리 하여 풀랜트(2.1)에 대한 제어입력  $u(k)$ 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{1}{b_0} \{ D(q^{-1})y_m(k) - H(q^{-1})y(k) \\ &\quad - B_R(q^{-1})u(k) \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

단,

$$B_R(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1}) - b_0 \quad (3.12)$$

식(3.11)에서, 미지 파라메터, 기지신호를 각각  $\theta$ ,  $\xi(k)$ 로 하여

$$\theta^T = [b_0 \ b_1 + b_0 a_1 \ \dots \ a_s b_m \ h_1 \ \dots \ h_{n+s}] \quad (3.13)$$

$$\xi^T(k) = [u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-m-s) \ y(k-1) \ \dots \ y(k-n-s)] \quad (3.14)$$

로 정의하면, 식(3.11)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$u(k) = \frac{1}{b_0} \{ D(q^{-1})y_m(k) - \bar{\theta}^T \bar{\xi}(k) \} \quad (3.15)$$

$$D(q^{-1})y_m(k) = \theta^T \xi(k) \quad (3.16)$$

$$\text{단, } \bar{\xi}^T(k) = [u(k) \bar{\xi}^T(k)], \ \theta^T = [b_0 \ \bar{\theta}^T] \quad (3.17)$$

식(3.11) 또는 (3.15)가 유한치로 실현될려면  $P(q^{-1})B(q^{-1})$ 은 안정다항식,  $b_0$ 는 영이 아니어야만 한다는 것을 알 수 있다.

다음으로 풀랜트의 파라메터가 미지일 경우에는,  $\theta$ 를 가조정 파라메터  $\hat{\theta}(k)$ 로 바꾸어서 식(3.11), (3.15)를 다음과 같이 구성한다.

$$u(k) = \frac{1}{b_0} \{ D(q^{-1})y_m(k) - \bar{\theta}^T(q^{-1})y(k) - \widehat{B}_R(q^{-1})u(k) \}$$

$$= \frac{1}{b_0} \{ D(q^{-1})y_m(k) - \hat{\theta}^T(k) \bar{\xi}(k) \} \quad (3.18)$$

$$\text{또는 } D(q^{-1})y_m(k) = \hat{\theta}^T(k) \bar{\xi}(k) \quad (3.19)$$

식 (3.18) 또는 식 (3.19)의 파라메터를 동정하는 파라메터 조정칙을 결정하기 위한 동정오차 모델은 다음의 순서로 구성된다.

식 (3.7)은 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$D(q^{-1})y(k) = \theta^T(k) \xi(k) \quad (3.20)$$

동정오차  $\epsilon(k)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= D(q^{-1})(y_m(k) - y(k)) \\ &= \{ \hat{\theta}^T(k) - \theta(k) \} \xi(k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

따라서  $\hat{\theta}(k)$ 에 대한 파라메터 조정칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\theta}^T(k) = \hat{\theta}^T(k-1) - \Pi(k-1) \xi(k) \epsilon(k)$$

$$\Pi(k) = \frac{1}{\lambda_1(k)} [ \Pi(k-1) - \frac{\lambda_2(k)\Pi(k-1)\xi(k)\xi^T(k)\Pi(k-1)}{\lambda_1(k)+\lambda_2(k)\xi^T(k)\Pi(k-1)\xi(k)} ]$$

여기서,  $0 < \lambda_1(k) < 1$ ,  $0 < \lambda_2(k) < 1$ ,  $\Pi(0) = \Pi^T(0) > 0$ ,

$$\epsilon(k) = \frac{D(q^{-1})y(k) + \hat{\theta}^T(k-1)\xi(k)}{1 + \xi^T(k)\Pi(k-1)\xi(k)}$$

## 4. 실험결과 및 고찰

### 4.1 시스템 모델링

Fig.1에서 보인 자기 흡인부상계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = mg - f_m + \tau_L \quad (4.1)$$

$$f_m = \alpha \left(\frac{z}{z}\right)^2 \quad (4.2)$$

$$e = Rz + \frac{d}{dt}(L(z)i) \quad (4.3)$$

$$e = -k_0 u \quad (4.4)$$

단,  $m$  : 철편과 포텐셜메터 운동부의 질량

$f_m$  : 자기 흡인력

$\alpha$  : coil 전류와 발생자기 흡인력의 교환계수

$k_0$  : 프리앰프의 계인

$e$  : 코일전압

$u$  : 전력 증폭기 제어 입력

$L(z)$  : 자기 인력탄스

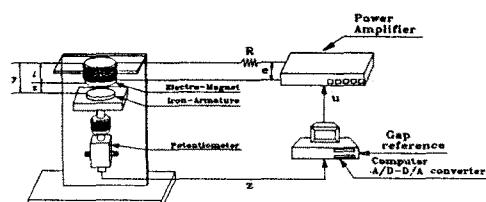


Fig. 1 schematic diagram of magnetic levitation system

Fig. 1의 시스템에 대해 다음의 상태방정식이 일어진다.

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu + \omega(t) \quad (4.5)$$

$$y = Cx \quad (4.6)$$

단,

$$x^T = \left[ z \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right], A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2gR}{L_o z_o} & \frac{2L_o g}{L_o z_o} & -\frac{R}{L_o} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[ 0 \ 0 \ -\frac{2gk_a}{L_o z_o} \right] T$$

본 실험장치의 시스템 파라미터는 Table 1과 같다.

Table 1 자기부상 시스템의 파라미터

Symbols	Description	Measured values
m	mass of iron armature and potentiometer core	0.085kg
R	resistance	3ohm
z <sub>o</sub>	equilibrium gap position	0.4cm
i <sub>o</sub>	equilibrium current	1.05A
L <sub>a</sub>	coefficient of L(z)	0.00112H
L <sub>b</sub>	coefficient of L(z)	0.193Hcm
L <sub>o</sub>	equilibrium self inductance	0.483H
k <sub>a</sub>	gain of pre-amplifier	2.94

식(4.5)에 Table 1의 파라미터를 대입하면, 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 30434.8 & 12.2 & -6.21 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2gk_a}{L_o z_o} \end{bmatrix} u + \omega(k) \quad (4.7)$$

식(4.7)의 입력 u와 출력y의 전달함수를 구하고 이 전달함수의 z-변환에 대해서 다음과 같은 차분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} A(q^{-1})y(k) &= B(q^{-1})u(k) + \omega(k) \\ A(q^{-1}) &= 1 + 6.2q^{-1} - 12.2q^{-2} - 30434.7q^{-3} \\ B(q^{-1}) &= 1 + 6.2q^{-1} - 12.2q^{-2} - 36898.7q^{-3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

#### 4.2 실험 결과

외란  $\omega(k)$ 과 목표입력  $y_m(k)$ 은 스텝형태라고 가정하고, 식(4.8)을 이용하면, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P(q^{-1}) &= 1 - q^{-1} \\ A(q^{-1}) &= 1 + 5.2q^{-1} - 18.41q^{-2} - 30446.9q^{-3} \\ &\quad + 30434.7q^{-4} \end{aligned} \quad (4.9)$$

식(4.9)은 불안정한 다항식이므로  $H(q^{-1})$ 을 다음과 같이 두면

$$H(q^{-1}) = -4.71q^{-1} + 17.91q^{-2} + 30446.4q^{-3} + 30434.2q^{-4} \quad (4.10)$$

안정한 다항식  $D(q^{-1})$ 을 얻을 수 있다.

$$D(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1} - 0.5q^{-2} - 0.5q^{-3} + 0.5q^{-4} \quad (4.11)$$

식(4.11)과 (3.18)을 이용하면, 입력  $u(k)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$u(k) = \frac{1}{b_0} [y_m(k) + 0.5y_m(k-1) - 0.5y_m(k-2) - 0.5y_m(k-3) - 0.5y_m(k-4) - D(k)\xi(k)] \quad (4.12)$$

3.1절의 제어계 구성 방법에 의한 제어 결과는 Fig. 4.1, Fig. 4.2, Fig. 4.3에서 보인 것과 같으며, 각각은 스텝형태의 목표치에 대한 응답, 목표치 변경시의 응답, 그리고 외란을 가했을 때의 응답을 나타낸다. 그림에서 보는 바와 같이 목표치 변경 및 외란에 대해서 오버슈트 없이 짜른 시간 내에 목표치에 추종함을 알 수 있었다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 파라미터가 미지인 플랜트를 대상으로하여 변화하는 환경에 적응할 수 있는 능력을 가진 적용제어이론에 의한 제어계 설계법 중의 하나인 최소분산제어법을 이용하여, 외란이나任意의 목표치 변경에서도 MAGLEV 시스템이 바람직한 위치제어 특성을 얻을 수 있는 강인한 서보 제어기 설계법을 제안하고 그 실시간제어에 의한 실험결과를 보였다. 실시간 제어를 통해 본 위 최소분산제어법은 전자석을 이용하는 기계장치에 널리 응용되어 보다 유연성 있는 위치제어가 실현될 수 있고, 파라미터 변동이 많은 산업현장에서 직접 이용이 가능할 것으로 기대된다.

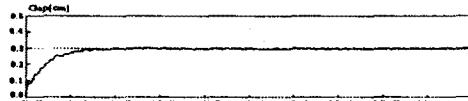


Fig. 4.1 Experimental result for step reference

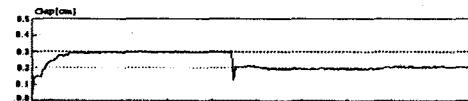


Fig. 4.2 Experimental result for reference change

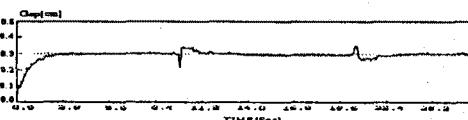


Fig. 4.3 Experimental result for step reference with disturbance

#### 참 고 문 헌

- [1] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, "Robust Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances", IEEE Trans. AC-31(4), PP.306-315, 1986
- [2] 森井, 水野, "未知確定外亂を考慮した離散時間モデル規範形適應制御", 計測自動制御學會論文集, 21(2), PP.914-920, 1985
- [3] 内門, 金井, 杉山, "確定的未知外亂を含む離散時間適應制御系の設計", 計測自動制御學會論文集, 21(2), PP.131-136, 1985
- [4] 内門, 金井, "外亂を考慮する連續時間適應制御系の一設計", 計測自動制御學會論文集, 22(6), PP.705-708, 1986
- [5] 内門, 金井, 長, "確定外亂を含む適應制御系設計の多項式代數法による一考察", 計測自動制御學論文集, 24(9), PP.985-987, 1988
- [6] F.A.Cameron & D.E.Seborg, "A Self-Tuning Controller with PI D Structure", Int.J.Cont., Vol.38, No.2, pp.401-417, 1983
- [7] 中溝高好,"最小二乗法と線形回帰"コンピュートロール, Vol.23, pp.53-58, コロナ社, 1983
- [8] 大山添弘, 工藤清, 町本浩辛, 藤川敏, "現代制御論理に基づいたデジタル制御系設計法", インターフェース, NO.116, PP.215-240, 1986