

ANRSS 필터를 이용한 비선형 시스템의 인식 및 성능분석

김현상^o, 남상원
한양 대학교 전기공학과

Nonlinear System Identification using an Adaptive Nonlinear Recursive State-Space Filter and its performance analysis

Hyun-Sang Kim and Sang-Won Nam
Dept. Electrical Eng., Hanyang University

Abstract - The purpose of this paper is to present a nonlinear system identification method, where an adaptive nonlinear recursive state-space(ANRSS) filter is employed as its filter structure, and a variable step (VS) algorithm is applied as its adaptation law. To demonstrate the validity of the proposed method, some simulation results are included.

1. 서 론

최근까지 보고된 많은 적용 비선형 필터는 절단된(truncated) 불데과 급수를 이용한 것으로, 이 방법은 유한한 임펄스 응답(finite impulse response: FIR)을 가지고 있다[1]. 특히 불데라 필터는 선형 유한 임펄스 응답(FIR) 필터를 비선형의 경우로 확장한 것으로 볼 수 있는데, 선형 유한 임펄스 응답(FIR) 필터는 영점(zeros)만을 이용하여 실제 대상에 적용하기 때문에 많은 수의 계수가 필요하게 되어 계산량이 많은 단점이 있고, 비선형 FIR 필터 경우에는 더욱더 많은 계수가 필요하다. 따라서 실시간 필터링에 부적절한 경우도 있는데 이를 극복하기 위한 대안의 하나로 무한 임펄스 응답(infinite impulses response: IIR) 필터가 연구되고 있다[1,2]. 선형 무한 임펄스 응답(IIR) 필터는 영점과 극점 모두를 사용하여 실제 대상에 적용하기 때문에 선형 FIR 필터에 비해 아주 적은 수의 계수를 사용하므로 계산량이 적은 장점이 있다. 이와 마찬가지로 적용 비선형 IIR 필터도 적용 비선형 FIR 필터에 비해 적은 계수를 사용하므로 경제적이다. 지금까지 무한 임펄스 응답 필터에 대한 연구가 유한 임펄스 응답 필터에 비해 활발하지 못했던 이유는 유한 임펄스 응답 필터는 영점으로 구성되어서 광역 최저점(global minimum)만을 가지는 반면 무한 임펄스 응답 필터는 영점과 극점을 모두 갖고 있기 때문에 적용과 정 중에 국소 최저점(local minimum)에 빠질 위험이 있다는 단점과, 적용필터의 극점이 적용과정 중에 안정영역을 벗어나면 알고리즘이 발산하는 안정성의 문제가 있기 때문이다[2]. Adaptive nonlinear recursive state-space filter (ANRSS)는 적용 비선형 IIR 필터의 한 종류로서 실제 대상의 표현식을 알고 있는 경우 우수한 성능을 나타낸다[3]. 본 논문에서는 필터구조로 ANRSS필터를 이용하고 계수직응방법으로는 variable step(VS) 알고리즘을 이용하였는데, VS 알고리즘은 최소 평균 자승법(least mean square)에 의한 적용 알고리즘에 비하여 근소한 양의 계산량 증가로 더 빠르고 정확한 적용이 가능하다[4]. 다음의 2절에서는 ANRSS 필터의 구조와 계산량 감소 방법에 대하여 논하고, 3절에서는 VS 알고리즘을 논하였다. 끝으로 4절에서는 위의 두 방법을 결합하여 비선형 시스템 인식 문제에 적용하였다.

2. ANRSS 필터

2.1 필터 구조와 경사(gradiant) 계산

실제 대상의 표현식을 알고 있는 경우 그 식은 미분 방정식 또는 차분방정식으로 나타낼 수 있으며 이를 상태공간(state-space) 방정식으로도 쉽게 변환시킬 수 있다[5]. 실제 대상이 다음과 같은 비선형 순환(recursive) 상태공간 방정식으로 표현된다고 가정하자.

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + B_p u(k) + g_p(p_p, u(k), x_p(k)) \quad (1-1)$$

$$y_p(k) = C_p^T x_p(k) + d_p u(k) \quad (1-2)$$

여기서 A_p 는 시스템 행렬, B_p 는 시스템 입력 계수 벡터, x_p 는 상태 벡터, g_p 는 선형 항을 제외한 비선형 함수이고 p_p 는 비선형항의 계수 벡터이다(식 (15) 참조). 또한 g_p 의 차수와 형태는 알고 있다고 가정한다. 따라서 ANRSS 필터는 다음과 같이 실제 대상과 동일한 구조를 갖는다

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + g(p, u(k), x(k)) \quad (2-1)$$

$$y(k) = C^T x(k) + du(k) \quad (2-2)$$

위 ANRSS 필터의 계수 A, B, p, C, d 를 실제 대상의 필터 출력의 오차의 차승이 최소가 되도록 다음과 같이 계산 할 수 있다[1].

$$a_{ij}(k+1) = a_{ij}(k) + 2\mu_a(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial a_{ij}(k)} \quad (3)$$

$$b_i(k+1) = b_i(k) + 2\mu_b(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial b_i(k)} \quad (4)$$

$$c_i(k+1) = c_i(k) + 2\mu_c(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial c_i(k)} \quad (5)$$

$$d(k+1) = d(k) + 2\mu_d(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial d(k)} \quad (6)$$

$$p_i(k+1) = p_i(k) + 2\mu_p(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial p_i(k)} \quad (7)$$

여기서

$$e(k) = y_p(k) - y(k) \quad (8)$$

이며 a_{ij} 는 A 행렬($n \times n$)의 i번째행 j번째열이고 b_i, c_i, p_i 는 각각 B 벡터($n \times 1$), C 벡터($n \times 1$), p 벡터($n \times 1$)의 i번째 항이며 $\mu_a(k), \mu_b(k), \mu_c(k), \mu_d(k), \mu_p(k)$ 는 스텝 사이즈이다. 식 (3)-(7)에서와 같이 필터 출력치의 각 계수들에 대한 경사가 필요하다. 계수 C 와 d 에 대한 출력경사는 식(1-2)로 부터 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$\frac{\partial y(k)}{\partial c_i} = x_i(k) \quad , \quad \frac{\partial y(k)}{\partial d} = u(k) \quad (9)$$

계수 a_{ij}, b_i, p_i 에 대한 상태벡터의 경사값을 다음과 같이 정의하면

$$F_{ij}(k) = \frac{\partial x(k)}{\partial a_{ij}}, Q_i(k) = \frac{\partial x(k)}{\partial b_i}, H_i(k) = \frac{\partial x(k)}{\partial p_i} \quad (10)$$

각 계수에 대한 출력값의 경사는 다음과 같다.

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_{ii}} = C^T F_{ii}(k), \quad \frac{\partial y(k)}{\partial b_i} = C^T Q_i(k), \quad (11)$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial p_i} = C^T H_i(k)$$

식 (10)에서 $F_{ii}(k)$, $Q_i(k)$, $H_i(k)$ 는 (2-1)식을 각 계수들로 편미분하면 다음과 같이 순환(recursive) 형태로 나타난다.

$$F_{ii}(k+1) = A F_{ii}(k) + e_i x_i(k) \quad (12)$$

$$+ \left(\frac{\partial g(p, u(k), x(k))}{\partial x(k)} \right) F_{ii}(k)$$

$$Q_i(k+1) = A Q_i(k) + e_i u(k) \quad (13)$$

$$+ \left(\frac{\partial g(p, u(k), x(k))}{\partial x(k)} \right) Q_i(k)$$

$$H_i(k+1) = A H_i(k) + \left(\frac{\partial g(p, u(k), x(k))}{\partial x(k)} \right) H_i(k) \quad (14)$$

$$+ \left(\frac{\partial g(p, u(k), x(k))}{\partial p} \right) e_i$$

윗 식에서 e_i 는 i 번째항은 1이고 나머지 항은 0인 벡터이고, 식(12)-(14)에서와 같이 경사는 필터계수 갱신방법(즉, 식 (3)-(7))과 유사하게 계산될 수 있다[3].

2.2 경사 계산량의 감소 방법

앞 절의 논의에서와 같이 ANRSS에서는 계수를 갱신시키기 위한 알고리즘 외에 경사 계산 알고리즘도 필요하다. 이 절에서는 경사 계산시 계산량의 감소방안을 논의한다.

2.2.1 입력 계수 벡터를 고정시키는 방법

식 (13)의 입력 계수 벡터의 경사 계산을 피할 수 있다면 계산량을 감소시킬 수 있는데 특히, 벡터원소들이 0인지 아닌지(zero or nonzero) 알 수 있다는 가정 하에서는 벡터의 경사 계산을 피할 수 있다. 예를 들이 실제 대상이 다음과 같은 식으로 표현이 되면

$$x_{p1}(k+1) = a_{p1} x_{p1}(k) + a_{p2} x_{p2}(k) + b_{p1} u(k) \quad (15-1)$$

$$+ p_{p1} x_{p1}^3(k) x_{p2}^2(k)$$

$$x_{p2}(k+1) = a_{p2} x_{p1}(k) + a_{p2} x_{p2}(k) + b_{p2} u(k) \quad (15-2)$$

$$+ p_{p2} u(k) x_{p1}^2(k) x_{p2}^2(k)$$

$$y_p(k) = c_{p1} x_{p1}(k) + c_{p2} x_{p2}(k) + d_p u(k) \quad (15-3)$$

식 (15)에서 입력 벡터 B_p 의 모든 원소들이 0이 아니라면 적용필터의 입력 계수 벡터를 다음과 같이 설정된다.

$$b_1 = a_1 b_{p1}, \quad b_2 = a_2 b_{p2} \quad (16)$$

a_1 , a_2 는 임의로 가정한 스칼라량이다. 식 (15-1)에 a_1 , 식 (15-2)에 a_2 를 각각 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$x_1(k+1) = a_{11} x_1(k) + a_{12} x_2(k) + b_1 u(k) \quad (17-1)$$

$$+ p_1 x_1^3(k) x_2^2(k)$$

$$x_2(k+1) = a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) + b_2 u(k) \quad (17-2)$$

$$+ p_2 u(k) x_1^2(k) x_2^2(k)$$

$$y(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) + d u(k) \quad (18)$$

식(17), (18)에서

$$x_i(k) = a_i x_{pi}(k), \quad c_i = \frac{c_{pi}}{a_i}. \quad (19)$$

$$a_{11} = a_{p1}, \quad a_{12} = a_{p2} \frac{a_1}{a_2}, \quad a_{22} = a_{p2}, \quad a_{21} = a_{p1} \frac{a_2}{a_1} \quad (20)$$

$$d = d_p, \quad p_1 = \frac{p_{p1}}{a_1^2 a_2^2}, \quad p_2 = p_{p2} \frac{a_2}{a_1} \quad (21)$$

식(17-1), (17-2), (18)은 필터계수 a_{ij} , c_i , d , p_i 와 상태변수 $x_i(k)$ 가 주어진 스칼라량으로 스케일된 형태이며, 원래 대상과 동일한 출력치를 갖는다. 입력벡터의 원소중 0이 있다면 적용필터의 그에 해당하는 계수도 0으로 고정시킨다. 이러한

방법으로 적용필터는 귀환행렬 A , 출력 계수벡터 C , 전향계수 d , 비선형계수 벡터 p 만 개신하게 되어 계산량이 감소된다 [3].

2.2.2 경사 계산의 근사화

근사화된 경사 계산법은 널리 사용되고 있으며 ANRSS필터에도 이 방법을 적용할 수 있다. 만일 실제 대상의 비선형 항 크기가 선형 항에 비해서 작다면(10%이하) 경사 계산에서 비선형 항을 다음과 같이 제외시킬 수 있다[5].

$$R_i(k+1) = A^T R_i(k) + C x_i(k) \quad (22)$$

$$S_i(k+1) = A^T S_i(k) + C u(k) \quad (23)$$

$$T_i(k+1) = A T_i(k) + \left(\frac{\partial g(p, u(k), x(k))}{\partial p} \right) e_i \quad (24)$$

여기서 $R_i(k)$ 와 $S_i(k)$ 의 i번째 행은 각각 $\frac{\partial y(k)}{\partial a_{ii}}$, $\frac{\partial y(k)}{\partial b_i}$

이며 $\frac{\partial y(k)}{\partial p_i} = C^T T_i(k)$ 이고 $T_i = \frac{\partial x(k)}{\partial p_i}$ 이다.

2.3 필터의 안정성과 국소 최저점 문제

일반적으로 IIR 필터가 많이 사용되지 못한 것은 적용과정도중 필터의 극점이 안정영역 밖으로 나가서 생기는 불안정성 문제와 국소 최저점의 존재 때문이다. 이를 해결하기 위해 여러 가지 방법이 제시되어 있지만 일반적인 해결책은 아직 존재하지 않는다. 간단한 방법으로 작은 스텝사이즈를 사용하는 방법이 있다. 또 식 (2-1), (2-2)를 반환하여 다음과 같은 선형화된 식을 구성하는 방법이 있다[1].

$$x(k+1) = A^*(x(k), u(k)) x(k) + B u(k) + g^*(u(k)) \quad (25-1)$$

$$y(k) = C^T x(k) + d u(k) \quad (25-2)$$

여기서 A^* 행렬은 (2-1)식의 g 항에서 상태의 비선형항이 포함된 모든 항을 결합하여 구성한 것이고 g^* 항은 입력치의 비선형 항만으로 구성된다. 위의 식 (25-1)에서 $B u(k) + g^*(u(k))$ 항은 입력치로 볼 수 있고 적용필터의 극점은 A^* 항에 의해서 결정되므로 A^* 행렬의 특성치를 계수를 갱신 순간마다 감시하여 극점이 불안정 영역으로 빠지면 그 계수를 갱신시키지 않고 이전의 계수를 이용하는 방법으로 안정성을 보장한다[2]. 극점의 감사는 일반적 대상에 대해서는 많은 계산량이 요구되지만 비교적 간단한 대상에 대해서는 적은 계산량으로 행할 수 있다. 1차 또는 2차 상태방정식으로 표현되는 비교적 간단한 대상에 대해서는 실행면(performance surface)이 복잡하지 않으므로 계수가 국소 최저점에 빠지는 확률도 적다. 계수의 최적치를 어느 정도 예측 할 수 있는 예에서는 이 위치부터 계수를 적용시키면 국소 최저점에 빠질 확률이 줄어든다[3].

3. Variable step (VS) 알고리즘

적용필터에서 계수 갱신 방법으로는 최소 평균 자승법 (least mean square)이 널리 쓰이고 있는데[6], 이 방법은 계수 갱신식에서 오차자승의 평균을 그 순간의 오차자승으로 근사화시켜서 계산하는 방법이다. 따라서 최적 계수 방정식(normal equation)을 풀기 위한 행렬의 역변환과 같은 계산이 불필요하다. LMS 알고리즘은 계산이 간단하고 여러 가지 용도에서 강인함을 나타내는데[6], LMS 알고리즘의 계수 갱신식은 다음과 같다.

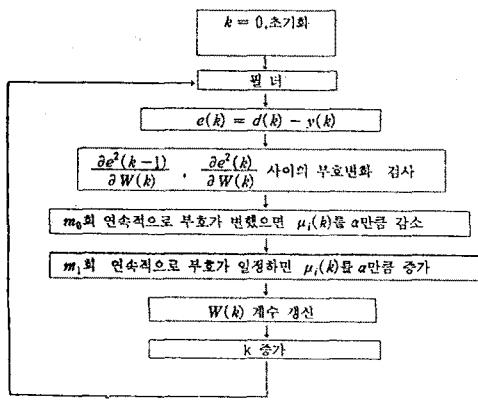
$$W(k+1) = W(k) + 2 M(k) e(k) \frac{\partial y(k)}{\partial W(k)} \quad (26)$$

여기서 $W(k)$ 는 식 (3)-(7)의 계수 $a_{ii}(k)$, $b_i(k)$, $c_i(k)$, $d(k)$, $p_i(k)$ 를 일반적으로 나타낸 이며, 또

$$M(k) = \begin{bmatrix} \mu_1(k) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3(k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_m(k) \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 m 은 필터의 모든 계수항의 갯수들의 합을 나타내고,

스텝 사이즈 $\mu_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)는 계수들의 수렴 시간과 수렴이 어느 정도 이루어지고 난 후의 오차에 영향을 미친다. 수렴 시간은 $\mu_i(k)$ 에 반비례하므로 큰 $\mu_i(k)$ 를 취할 경우 빠른 수렴이 가능하다. 그러나 수렴 후의 오차도 커진다. 이러한 LMS 알고리즘의 단점은 보완하기 위하여 가변적인 스텝 사이즈를 이용하는 연구가 진행되어 왔다[6]. 즉, 적용 초기에는 큰 스텝 사이즈를 사용하여 수렴을 빠르게 하고 최적치에 가까워졌을 때는 적절한 만큼 스텝 사이즈를 감소시키는 방법이다. 이 방법을 가변스텝(Variable Step) 알고리즘이라 한다[4]. 스텝을 가감시키는 방법은 오차 자동의 경사 값에 터인 $-2e(k) \frac{\partial e^2(k)}{\partial W(k)}$ 의 각 원소들의 부호변화를 적절한 횟수만큼 기억하여 이 값에 따라 정해진 값을 곱하거나 나누어서 스텝을 증감시키는 것이다. 예를 들어 3회 연속으로 경사 부호 변화가 있으면 이는 최적치를 향해 같은 방향으로 계수를 재생산한다는 뜻에서 스텝을 2배로 만들고 2회 연속으로 경사 부호가 변하면 계수 재생산 중에 최적치를 지나쳤다는 의미에서 스텝을 1/2배로 만드는 방법이 있다. $\mu_{i,max}$ 를 스텝 사이즈의 상한, $\mu_{i,min}$ 을 스텝 사이즈의 하한이라 하면, 스텝을 증감시킬 때 $\mu_{i,max}$ 는 안정성을 고려해서 결정해야 하고 $\mu_{i,min}$ 은 수렴 후 오차를 고려해서 결정해야 한다. VS 알고리즘의 장점은 LMS와 거의 유사한 계산량(하드웨어로 구성할 경우 계산량이 15% 증가)으로 빠른 수렴과 적은 오차를 보장한다는 점이다[4]. VS 알고리즘의 요약한 형태는 표1에 제시되어 있다.



<표1> VS 알고리즘

4. 모의 실험

본 논문에서는 ANRSS 필터의 계수생산 알고리즘으로 VS 알고리즘을 이용한 방법을 제시하였는데 그 타당성을 보이기 위해 기존의 논문에 발표된 다음의 스피커 모델의 비선형 상태방정식[1]에 대하여 시스템 인식 모의실험을 행하였다.

$$\begin{bmatrix} x_{\mu}(k+1) \\ x_{\rho}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mu}(k) \\ x_{\rho}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.006x_{\mu}^2(k) + 0.03x_{\mu}^3(k) \end{bmatrix} \quad (28-1)$$

$$y(k) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_{\mu}(k) \\ x_{\rho}(k) \end{bmatrix} \quad (28-2)$$

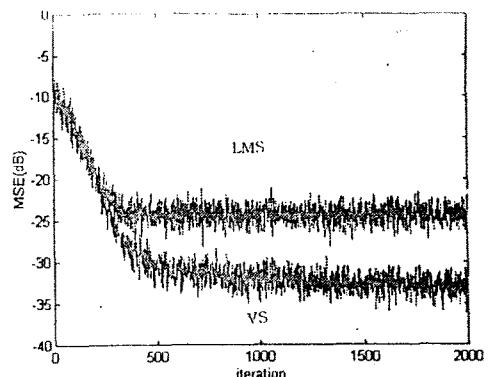
입력 신호로는 평균이 0이고 분산이 1인 가우시안 화이트 신호를 이용하였고 SNR이 각각 30dB, 20dB, 10dB인 측정 잡음의 경우를 설정하였다. 선형 및 비선형 계수의 정규화된 오차는 다음과 같이 정의한다.

$$\|V_L(k)\| = 10 \log \frac{\sum_{i=0}^n |L_i(k) - L_i^0(k)|^2}{\sum_{i=0}^n |L_i^0(k)|^2} \quad (29)$$

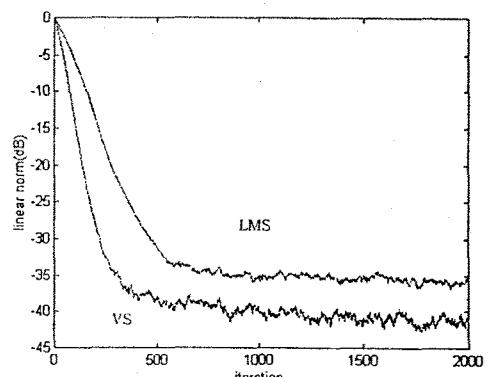
$$\|V_N(k)\| = 10 \log \frac{\sum_{i=0}^n |N_i(k) - N_i^0(k)|^2}{\sum_{i=0}^n |N_i^0(k)|^2} \quad (30)$$

식(29)에서 $L_i(k)$ 는 필터의 선형계수이고 $L_i^0(k)$ 는 실제 대상의 선형 계수이다. 식(30)에서 $N_i(k)$ 는 필터의 비선형 계수이고 $N_i^0(k)$ 는 실제 대상의 비선형 계수이고 α 는 반복횟수이고, i 와 j 는 각각 i 번째 선형 계수 및 j 번째 비선형 계수이며, n_1, n_2 는 각각 선형 계수의 개수, 비선형 계수의 개수이다. 그럼 1은 SNR이 20dB일 때 LMS와 VS 알고리즘의 출력오차가 MSE를 비교한 것이다. 특히 VS 알고리즘의 경우 출력오차가

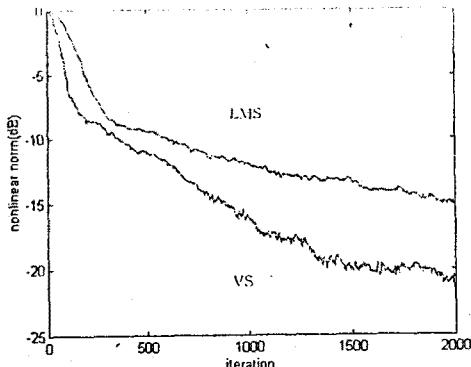
8-10dB 정도 감소되는 효과를 보인다. 그럼 2는 LMS와 VS 알고리즘의 선형 계수의 정규화된 오차를 비교한 것이다. VS 알고리즘의 경우 선형 정규화된 오차가 6dB 정도 감소하는 효과를 보인다. 그럼 3은 LMS와 VS 알고리즘의 비선형 계수의 정규화된 오차를 비교한 것이다. VS 알고리즘의 경우 비선형 정규화된 오차가 6dB 정도 감소하는 효과를 보인다. 그럼 4는 SNR이 각각 30dB, 20dB, 10dB인 측정 잡음에 대한 VS 알고리즘의 출력오차 MSE를 나타낸 것으로 매우 우수한 성능을 보인다.



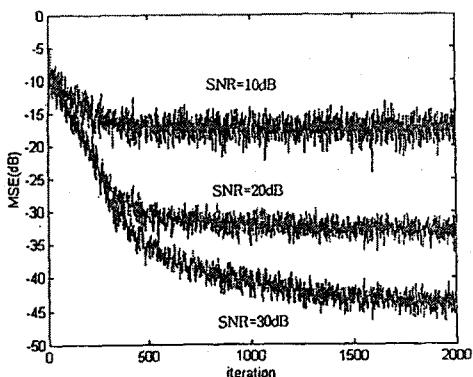
<그림 1> LMS 와 VS 알고리즘 적용시 출력오차 (SNR=20dB 경우)



<그림 2> LMS 와 VS 알고리즘 적용시 선형 정규화된 오차 (SNR=20dB 경우)



<그림 3> LMS 와 VS 알고리즘 경우 비선형 정규오차 (SNR=20dB 경우)



<그림 4> VS 알고리즘 경우 출력오차 (SNR=10dB, 20dB, 30dB 경우)

5. 결 론

본 논문에서는 비선형 적용필터인 ANRSS 필터에 VS 알고리즘을 결합하여 기존의 LMS 알고리즘에 의한 계수의 간신보다 빠른 수렴과 적은 오차를 나타낸 것을 보였다. LMS 알고리즘은 계산량이 적고 다양한 응용분야에서 강인함을 나타내는 반면 일반적으로 오차가 큰 단점이 있다. VS 알고리즘은 약간의 계산량 증가로 이러한 단점을 상당히 완화시켰다. 주 후 연구과제로는 ANRSS 필터에 가장 적합한 스텝사이즈 조절 상수를 구하는 문제가 있고 IIR 필터의 공통적인 단점인 불안정과 국소최저점을 피할 수 있는 방법을 구하는 문제가 있다.

참고 문헌

- [1] Frank X.Y. Gao, Adaptive Linear and Nonlinear Filters, Ph.D. dissertation, univ. of Toronto, 1991
- [2] J.J. Shynk, "Adaptive IIR Filtering," IEEE ASSP Magazine, pp.4-21, Apr. 1989
- [3] Frank X.Y. Gao and W. Martin Snelgrove, "Adaptive Nonlinear Recursive State-Space Filters" IEEE Trans. Circuit syst. vol. 41, pp. 760-764, Nov. 1994.
- [4] R.W. Harris, P.M. Chabries and F.A. Bishop, "A Variable step (VS) adaptive filter algorithm," IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Processing, vol. ASSP-34, pp. 309-316, 1986
- [5] D.A. Johns, W.M. Snelgrove, and A.S. Sedra, "Adaptive recursive state-space filters using a gradient based

- algorithm," IEEE Trans. Circuit syst., vol. 37, pp. 673-684, Jun. 1990
- [6] P.M.Charkson, "Optimal and adaptive signal processing," CRC Press Inc., 1993
- [7] W.M. Snelgrove and A.S. Sedra, "Synthesis and analysis of state-space active filters using intermediate transfer functions," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, pp. 287-301, Mar. 1986
- [8] M. Schetzen, The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear systems: New York, Wiley, 1980