통합 생산 시스템의 성능 및 작업 부하의 최적배분에관한 연구

A Study on a Optimizing the FMS Performance and Load Distribution

황 홍 석*
동의 대학교, 산업공학과

ABSTRACT

본 연구는 폐쇄형 대기행렬망(CQN : Closed Network of Queue)으로 표시되는 FMS 시스템의 최적 성능을 산정하는 방법과 각 작업장의 작업 부하(Workload)를 최적화하기 위한 방법에 관한 연구이다.

FMS 생산 시스템의 성능(Performance)을 기존의 생산률(Production Rate)외에 기대생산률(Expected Production Rate), 평균 대기작업량(Mean Queueue Length), 및 기대 투자이용률(Expected Investment Utilization Rate)과 이들 각각의 분산(Variance)들을 고려하였다. 이러한 성과측정 문제를 수리 모델링하고 이를 이용하여 각 작업장에서의 가공 장비의 그룹(Machine Group)별 최적 작업배분(Workload) 조건을 보였다.

또한 위의 과정을 최근의 FMS 전용 Simulator인 FACTOR/AIM을 이용한 분석 결과와 비교하여 보였다.

1. 서론

본 연구는 폐쇄형 대기행렬망(CQN:Closed Queueing Network)을 이용한 통합 생산 시스템에서의 성능(Performance)의 최적화를 위하여 일반적으로 유사 작업이 가능한 머신으로 Group을 나누어 Pooling 시스템으로 운영할 경우, 시스템 성능 향상을 기할 수 있다.

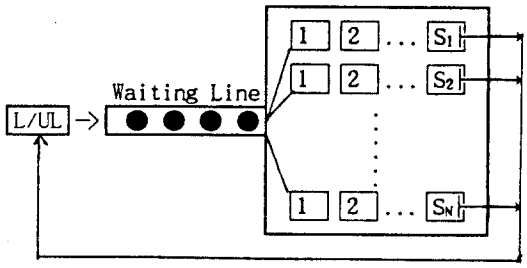
각 Machine Group에서의 작업 부하(Work Load)를 각 Machine에 최적 배분하는 문제를 CQN 방법으로 접근하였다. 이를 위하여 먼저 CQN Model에 의한 시스템 성능 산출 수식을 전개하고, 이로부터 시스템 기대생산 함수, 시스템의 효율, 및 시스템 사용률을 산정하는 방법을 보이고, 기대생산률의 최적화를 위하여 각 Machine Group의 Group 수 및 Machine의 수를 고려한 작업 부하를 최적화하는 과정을 보였다. 이를 이용한 실 예를 들어 보였다.

2. CQN Model의 시스템 성능 산정

<그림 1>와 같이 CQN네트워크으로 표시된 통합생산시스템에서 각 S_i개로 구성된 N개의 Machine Group을 갖는 시스템을 Gordon과 Newell(1967)은 CQN에서 N개의 Part가 시스템 내에 있을 경우 각 M/C Group에서의 대기 숫자를 n_i라고 하면 집합 $\bar{n}$의 확률을 다음과 같이 표시하였다.

$$p(\bar{n}) = p(n_1, n_2, \cdots, n_M)$$
$$= G(M,N)^{-1} g_1(n_1) \cdot g_2(n_2) \cdots g_M(n_M)$$

여기서 $\bar{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_M)$



<그림 1> CQN으로 표시된 통합 생산 시스템

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N \qquad ,0 \le n_i \le N$$

$g_i(n_i)$: M/C-Group i에서 대기하는 Part 숫자의 함수

$$g_i(n_i) = \begin{cases} x_i^{n_i} & , \ s_i = 1 \text{ , 단일 } M/C \text{ } Group \\ \dfrac{x_i^{n_i}}{n_i!} & , \ n_i \le S_i \text{ , 다 } M/C \text{ } Group \\ \dfrac{x_i^{s_i}}{s_i!\, s_i^{n_i - s_i}} & , \ n_i > s_i \text{, 무한 } M/C \text{ } Group \end{cases}$$

여기서 x_i : M/C Group i 할당된 Work_Load

s_i : M/C Group i 의 M/C 수,

$$G(M,N) = \sum_{S(M,N)} g_1(n_1) \cdot g_2(n_2) \cdots g_M(n_M)$$

S(M,N): 각 M/C의 대기 중인 Part의 가능한 조합

$$S(M,N) = \{ \bar{n} \mid n_i \ge 0 \ , \ \sum_{i=1}^{M} n_i = N \}$$

위 식으로부터

$$p(\bar{n}) = \frac{g_1(n_1) \cdot g_2(n_2) \cdots g_M(n_M)}{\sum_{S(M,N)} g_1(n_1) \cdot g_2(n_2) \cdots g_M(n_M)}$$

i) 단일 M/C M-G의 경우

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{G(M,N)} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_M^{n_M}$$
$$= \frac{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_M^{n_M}}{\sum_{S(M,N)} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_M^{n_M}}$$

ii) 다 M-C 및 M-G의 경우

$$P(\bar{n}) = \frac{1}{G(M,N)} \frac{X_1^{n_1}}{n_1!} \frac{X_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{X_M^{n_M}}{n_M!}$$

$$G(M,N) = \sum_{s(M,N)} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_M^{n_M}$$

여기서 통합 생산 시스템의 성능 측정식을 CQN Model에서 표시하면 다음과 같이 G(M,N-1)/G(M,N)의 같은 비율로 됨을 알 수 있다. 이를 기대 생산 함수(Expected Production Function)로 정의하고 CQN시스템 성능 평가에 활용하였다. CQN Model에서의 통합 생산 시스템의 성과 측정을 위하여 다음과 같이3가지의 수식을 전개하였다.

1)작업 중인 M/C의 기대 비율 :

i번째 M/C Group의 M/C이 작업 중일 M/C의 기대 수를 B_i라 두면

$$B_i = \sum_{k=0}^{s_i} kP_{i(k)} + \sum_{k=s_i+1}^{N} s_i P_i(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_i g_i(k) \frac{G_i(M-1, N-k)}{G(M,N)}$$

$$= x_i \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)}$$

즉 각 M/C Group에서의 작업 중일 기대 M/C의 수는 그 M/C Group의 Work Load에 비례함을 알 수 있으며 다음 식이 성립된다.

$$\frac{G(M,N-1)}{G(M,N)} = \frac{B_1}{x_1} = \frac{B_2}{x_2} = \cdots = \frac{B_M}{x_M}$$

2) 시스템의 효율(Eff.of the System)

시스템 효율을 단위 시간당 기대 생산량과 시스템내의 전 M/C이 항상 작업 중일 경우의 생산량과의 비율을 표시한다.

$E_{ff} = P_E/P_I$

P_E : 기대생산률

P_I : 최대생산률(이상적인 경우)

$$P_I = \frac{1}{[\sum_{i=1}^{M} q_i t_i / \sum_{i=1}^{H} q_i]} = \sum_{i=1}^{H} q_i / \sum_{i=1}^{M} q_i t_i$$

$$P_E = \sum_{s(M,N)} P(\bar{n}) \cdot P_E(\bar{n})$$

여기서 $P_E(\bar{n}) = P_I \cdot U(\bar{n})$

$$P_E = \sum_{s(M,N)} P(\bar{n}) \cdot P_I \cdot U(\bar{n})$$

$$\therefore \frac{P_E}{P_I} = \sum_{s(M,N)} P(\bar{n}) \cdot U(\bar{n})$$

$$= (\text{작업중일} M/C \text{의 비율의 기대값})$$

$$= \frac{B}{m}$$

$$= \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)}$$

3) 시스템 사용률

각 M/C Group에서의 대기수 $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_M)$의 확률 $P(\bar{n})$을 고려한 기대값으로 계산한다.

$$U = \sum_{s(M,N)} P(\bar{n}) \cdot U(\bar{n})$$

$$= (\text{작업중일 } M/C \text{ 의 비율의 기대값})$$

$$= \frac{B}{m} = \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)}$$

위에서와 같이 시스템 성능의 3가지 표시 방법 모두 $\frac{G(M,N-1)}{G(M,N)}$ 의 같은 비율로 표시됨을 알 수 있다.

3. 기대 생산률의 최적화

기대 생산률(EPF)을 최대화하도록 각 M/C Group 에서의 Work Load 및 시스템 내의 작업 대기수 $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_M)$를 고려한 시스템 성능 계산을 위한 다음과 같은 수식을 전개할 수 있다.

기대생산률(Expected Production Rate : EPR)은 각 M/C Group의 대기 행렬($x_1, x_2, \ldots, x_M$)일 경우 $f(x_1, x_2, \ldots, x_M)$의 확률 분포가 주어진다면 기대생산률 $\bar{F}(M,N)$은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{F}(M,N) = \int_D \cdots \int_D \varphi(x_1, \ldots, x_{M)f(x_1}, x_M) dx_1 \ldots dx_M$$

여기서 영역 D는 다음과 같이 정의된다.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_M = m$,

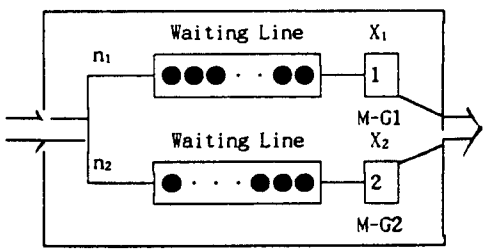
$x_i \geq 0, \quad i = 1, M$

$\bar{F}(M,N)$의 최대 및 최소값을 가지는 $x_1, \ldots, x_M$의 특정 집합 이론이 존재하며 다음 관계식이 성립된다.

$$\bar{F}_{min}(M,N) \leq \bar{F}(M,N) \leq \bar{F}_{max}(M,N)$$

이를 M/C Group의 수 및 각 M/C Group에서의 M/C 수에 따라 다음과 같이 3가지로 구분하였으며 각각의 경우의 기대생산률을(EPR)을 구하였다.

1) 1개의 M/C로 구성된 2개의 Group



<그림 2> 1개 M/C로 구성된 2개 Group 시스템

n1 + n2 = 2 , 즉 N=2 및 X1 + X2=2 인 경우, 기대 생산률(EPF)은 다음 식과 같이 주어진다.

$$P_r(x_1, x_2) = \frac{G(M,N-1)}{G(M,N)} = \frac{G(2,1)}{G(2,2)}$$

$$= \frac{\sum_{S(2,1)} g_1(n_1)g_2(n_2)}{\sum_{S(2,2)} g_1(n_1)g_2(n_2)}$$

$$= \frac{x_1^0 x_2^1 + x_1^1 x_2^0}{x_1^0 x_2^2 + x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^0}$$

$$= \frac{x_2 + x_1}{x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2}$$

여기서 $x_1 = 2$, $x_2 = 2 - x$ 로 두면,

$$\phi(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 4} \quad , \quad 0 \le x \le 2$$

여기서,

$$\phi'(x) = \frac{-4(x-1)}{(x^2 - 2x + 4)^2} \text{ 이 되므로}$$

$$\phi''(x) = \frac{12x(x-2)}{(x^2 - 2x + 4)^3}$$

$\phi(x)$는 Concave, 및 x=1에 대하여 대칭이며,
$x_1 = x_2 = x = 1$일 경우 최대값을 가진다.

위에서 $n_1 + n_2 > 2$, $x_1 + x_2 = 2$ 인 경우

$$\phi(X_1, X_2) = \phi(X, 2-X)$$

$$= \frac{X_N - (2-X)^N}{X^{N+1} - (2-X)^{N+1}} \quad , 0 \le X \le 2$$

X=1인 경우, $F_{max}(2, N) = N/(N+1)$

X =0 or 2인 경우 $F_{min}(2, N) = 1/2$

$$\overline{F}(2, N) = \int_0^2 \phi(X) f(X) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{X^N - (2-X)^N}{X^{N+1} - (2-X)^{N+1}} dx$$

예를 들면 N=2, 및 3인 경우 다음과 같다.

$$\overline{F}(2,2) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{(X-1)^2 + 3} dx = .0646$$

$$\overline{F}(2,3) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{4} \frac{X^2 - 2X + 4}{X^2 - 2X + 2} dx = 0.6427$$

$\overline{F}(2, N)$ 및 이의 최소, 최대 값을 구하기 위한 프로그램을 개발하고 그 응용 결과를 <표 1>과 같이 출력하였다.

2) 1개의 M/C으로 구성된 3개의 M-G의 경우

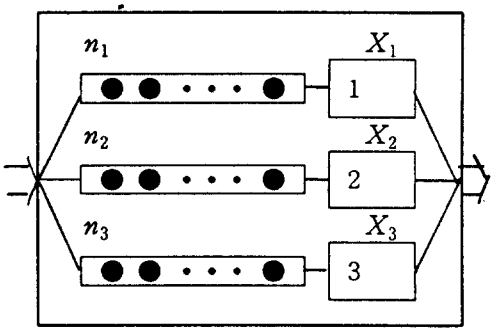
$$M = 3, \quad N = n_1 + n_2 + n_3$$
$$S_1 = S_2 = S_3 = 1,$$
$$X_1 = X, \quad X_2 = Y,$$
$$X_3 = 3 - X - Y$$

3개의 M-G인 경우 기대 생산 함수(EPF)는 다음과 같이 주어진다.

<표 1> 기대 생산률(EPR) : 단일 M/C 단일 M-G

N	F(2,N)	Fmax	Fmin	F/Fmax	Fmin/F(2,N)
1	.5000	.5000	.5000	1.0000	1.0000
2	.6046	.6667	.5000	.9069	.8270
3	.6427	.7500	.5000	.8569	.7780
4	.6607	.8000	.5000	.8258	.7568
5	.6705	.8333	.5000	.8046	.7457
6	.6765	.8571	.5000	.7892	.7391
7	.6804	.8750	.5000	.7776	.7349
8	.6830	.8889	.5000	.7684	.7320
9	.6849	.9000	.5000	.7611	.7300
10	.6864	.9091	.5000	.7550	.7285
Inf	.6931	.9990	.5000	.6938	.7214

Stop - Program terminated.



<그림 3> 단 M/C로 구성된 3개 M-G 시스템

$$\phi(x, y, z) = \frac{\sum_{S(3,N-1)} x^{n_1} y^{n_2} (3-x-y)^{n_3}}{\sum_{S(3,N)} x^{n_1} y^{n_2} (3-x-y)^{n_3}}$$

$$F_{max}(3, N) = N/(N+2)$$

$$F_{min}(3, N) = 1/3$$

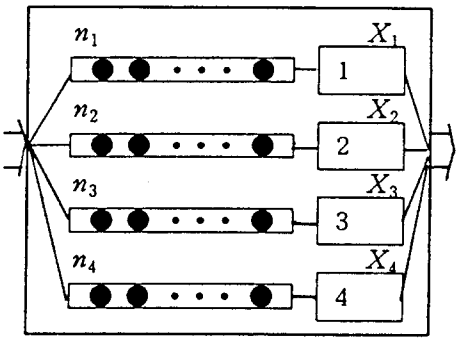
$$\overline{F}(3, N) = \frac{2}{9} \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \phi(x, y, 3-x-y) dy$$

이를 N의 값에 따라 계산하면 부록의 <표 2>와 같다.

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1$$
$$M = 4$$
$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

기대 생산 함수(EPF)는 다음과 같이 주어진다.

3) 1개의 M/C로 구성된 4개의 M-G 경우



<그림 4> 단일 M/C으로 구성된 4개 M-G시스템

$$\phi = \frac{\sum_{S(M,N-1)} X^{n_1} Y^{n_2} Z^{n_3} (4-X-Y-Z)^{n_4}}{\sum_{S(M,N)} X^{n_1} Y^{n_2} Z^{n_3} (4-X-Y-Z)^{n_4}}$$

$$F_{max}(4,N) = N/(N+3)$$

$$F_{min}(4,N) = 1/4$$

$$\overline{F}(4,N) = \frac{3}{32} \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dx \int_0^{4-x-y} \phi(x,y,z,4-x-y-z)dz$$

위 식의 N의 값에 따라 기대 생산률을 계산하면 부록의<표 3>과 같다.

위의 분석 결과 3가지의 M/C Group의 예를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 통합 생산 시스템에서 주어진 M/C Group의 수가 M일 경우, 시스템 내의 M/C의 수 N가 증가함에 따라, $\overline{F}_{max}(M,N)$은 증가하는 반면 $\overline{F}_{min}(M,N)$는 1/M로 일정하며, 또한 시스템 내의 가공품의 수 N가 주어진 경우 M/C Group의 수 M이 증가함에 따라 평균생산률 $\overline{F}(M,N)$, $\overline{F}_{max}(M,N)$ 및 $\overline{F}_{min}(M,N)$은 감소하며, 이들 모두의 경우 M가 무한히 커짐에 따라 M에 수렴한다.

4. Work-Load의 최적 배분

위의 2)항에서 1개의 M/C으로 된 3개의 M-G시스템의 경우 3개의 Machine Group에서의 각 Work load를 각각 X_1, X_2 및 X_3로 주어질 경우,

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

$$X_1 = X, \quad X_2 = Y \text{ 라 두면}$$

$$X_3 = 3 - (X + Y) \text{이다.}$$

여기서 각 Machine Group에서 Work L Computeroad를 이 시스템의 기대생산률(EPF)이 최대가 되도록 배분하려면 위의 식으로부터 $\phi(X,Y,3-X-Y)$를 미분하여 최적 조건의 X 및 Y을 구할 수 있으나 구한 수식이 매우 복잡한 수식이 되어 직접 구하기가 어렵다.
2)항의 경우 1 M/C으로 구성된 3 M-G의 경우 다음 3가지의 특수 경우를 위한 Computer-Program을 개발하고, $\phi(X,Y,3-X-Y)$를 최대화하는 X, Y 값을 구하였다.

$$\phi(X,Y,Z) = \frac{\sum_{S(3,N-1)} X^{n_1} Y^{n_2} (3-X-Y)^{n_3}}{\sum_{(3,N)} X^{n_1} Y^{n_2} (3-X-Y)^{n_3}}$$

여기서 $n_1 + n_2 + n_3 = N$

N :시스템 내의 Part수
N=5 경우, 식(3-2)에 의해서

$$S(3,N) = \left\{ \overline{n} \mid n_i \geq 0, \sum_{i=0}^{3} n_i = N \right\}$$

$$X + Y \leq 3$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 5$$

$$n_3 = 5 - n_1 - n_2$$

위의 S(M,N)의 모든 경우를 고려하여 N=5,7,10,12 경우 X, Y의 각 조합에 따른 기대생산률(EPF)을 계산한 결과를 다음 <표 4>와 같다. <표 4>의 값을 X, Y 및 EPF을 3차원 표로 표시하면 <그림 6> 및 <그림 7>과 같다. 여기서 역시 X=Y=1의 지점에서 EPF가 최대가 됨을 쉽게 볼 수 있다.

<표 4> 각 M-G의 Work Load에 따른 기대생산률 (N=5,7,10,12 M=3)

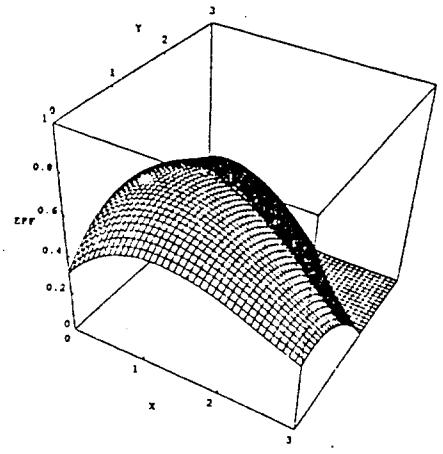
EPF VALUE :NO.OF M/C GROUP=3, N= 5

X	Y	PHI(X,Y)
0	0	.3333
0	1	.4921
0	2	.4921
0	3	.3333
1	0	.4921
1	1	.7143
1	2	.4921
2	0	.4921
2	1	.4921
3	0	.3333

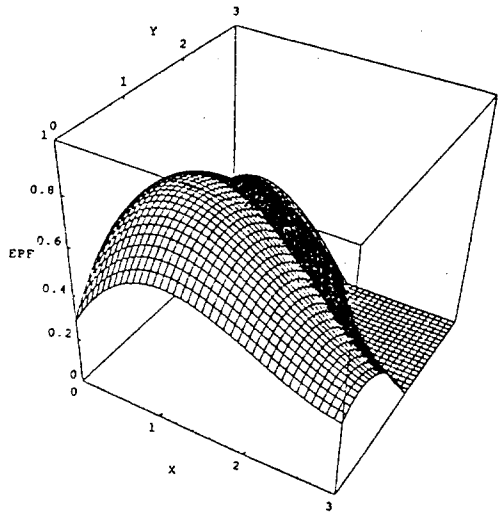
EPF VALUE :NO.OF M/C GROUP=3, N= 12

X	Y	PHI(X,Y)
0	0	.3333
0	1	.4999
0	2	.4999
0	3	.3333
1	0	.4999
1	1	.8571
1	2	.4999
2	0	.4999
2	1	.4999
3	0	.3333

Stop - Program terminated.



<그림 6> Machine Work Load의 최적 배치(N=5,M=3)



<그림 7> Machine Work Load의 최적배치(N=12,M=3)

5. 결 론

통합 생산 시스템의 성능의 최적화 작업 부하의 적정 배치를 위한 확정적인 모델로서 시스템이 고장이 없는 경우(A_0=1)를 가정하고, CQN모델을 응용하여 시스템 최적 구성 및 생산 능력을 산출하는 방법을 제시하고 각 Machine Group에서의 적정 작업 부하(Work load)를 배분하는 방법을 제시하였다.
이를 위하여 CQN Model에서 기대생산률을 산정하는 수식을 구하고 Machine의 Group과 각 Group의 machine수에 따른 기대 생산 능력을 산정하는 수식을 구하고 예제를 들어 계산 결과를 보였다. 또한 기대 생산률의 산정식을 이용하여 Machine Group별 Work Load를 최적 배분하는 방법을 예를 들어 보였다.
본 연구에서는 CQN Model을 응용한 확정적인 모델을 다루었으며, 이러한 Model의 실제 활용시 제한 사항들을 제시하고 이를 보완하기 위하여 RAM 및 LCC를 고려하고 최근의 FMS 전용 시뮬레이터들을 함께 고려하는 연구가 추가되어야 할 것이다.

참고문헌

1. Dallery, Y. and Stecke, K.E., "On the Optimal Allocation of Servers and Workloads in Closed Queueing Networks," Operations Research, Vol.38, No.4, pp. 694-703, July-August 1990.
2. Gordon, W. J. and Newell, G.F. "Closed Queueing Systems with Exponential Servers", Operations Research, Vol. 15, No.2, pp.254-265, March-April 1967.
3. Neuts, M. F., Lucanton, D. M., Geiszler, C., "The Optimal Planning Computerized Manufacturing Systems," u8126, Feb., 1981.
4. Pritsker, A. A. B. Modeling and Analysis Using Q - GERT Networks, Hatsted Press, New York, 1976.
5. Stecke, K.E. and Morin, T.L., "The Optimality of Balancing Workloads in Certain Types of Flexible Manufacturing Systems," European Journal of Operational Research, Vol. 20, No. 1, pp. 68-82 (1985).
6. Suri, R."An Overview of Evaluative Models for Flexible Manufacturing System", Annals of Operations Research, Vol. 3, pp. 13-21, 1985.
7. Wang, Pu, "A production planning model For Flexible Manufacturing Shops", Ph..D. Dissertation, ehigh University, Bethlehem, Pa, 1990.
8. Amayee, Z. and Sidedenblad, K., "A Computationally Efficient Optimal Maintenance Scheduling Method," IEEE Transactions on PAS, Vol.PAS-102,#2, pp.330-337, 1983.
9. Yao, D. D., and Buzacott, J. A., "Modeling a Class of State-Dependent Routing in Flexible Manufacturing Systems", Annals of Operations Research, 3, 153-67, 1985.
10. Yao, D. D., and Buzacott, J. A., "Modeling a performance of Manufacturing Systems", Int. J. Prod. Res., 23, 945-59, 1985.
11. Dallery, Y. and Stecke, K.E., "On the Optimal Allocation of Servers and Workloads in Closed Queueing Networks," Operations Research, Vol. 38, No.4, pp.694-703, July-August 1990.
12. Gordon, W. J. and Newell, G.F. "Closed Queueing Systems with Exponential Servers", Operations Research,Vol.5,No.2, pp.254-265, March-April 1967.
13. Neuts, M. F., Lucanton, D. M., Geiszler, C., "The Optimal Planning Computerized Manufacturing Systems," u8126, Feb., 1981.
14. Pritsker, A. A. B. Modeling and Analysis Using Q - GERT Networks, Hatsted Press, New York, 1976.
15. Stecke, K.E. and Morin, T.L., "The Optimality of Balancing Workloads in Certain Types of Flexible Manufacturing Systems," European Journal of Operational Research, Vol. 20, No. 1, pp.68-82 (1985).
16. Suri, R."An Overview of Evaluative Models for Flexible Manufacturing System", Annals of Operations Research, Vol. 3, pp. 13-21, 1985.
17. Wang, Pu, "A production planning model For Flexible Manufacturing Shops", Ph.D. Dissertation, Lehigh University, Bethlehem, Pa, 1990.
18. Yamayee, Z. and Sidedenblad, K., "A Computationally Efficient Optimal Maintenance Scheduling Method," IEEE Transactions on PAS, Vol.PAS-102, #2, pp. 330-337, 1983.
19. Yao, D. D., and Buzacott, J. A., "Modeling a Class of State-Dependent Routing in Flexible Manufacturing

Systems", Annals of Operations Research, 3, 153-67, 1985.
20. Yao, D. D., and Buzacott, J. A., "Modeling a performance of Manufacturing Systems", Int. J. Prod. Res., 23, 945-59, 1985.

부 록 :

<표 2> 기대생산률(단일 M/C 3 M-G경우)

N	F(3,N)	Fmax	Fmin	F/Fmax	Fmin/F(2,N)	Fmin/Fmax
1	.3333	.3333	.3333	1.0000	.9999	.9999
2	.4475	.5000	.3333	.8950	.7448	.6666
3	.4980	.6000	.3333	.8299	.6693	.5555
4	.5241	.6667	.3333	.7861	.6360	.4999
5	.5392	.7143	.3333	.7548	.6182	.4666
6	.5486	.7500	.3333	.7314	.6076	.4444
7	.5548	.7778	.3333	.7133	.6008	.4285
8	.5591	.8000	.3333	.6989	.5961	.4166
9	.5622	.8182	.3333	.6872	.5928	.4074
10	.5645	.8333	.3333	.6774	.5904	.4000
Inf	.5749	.9649	.3333	.5958	.5797	.3454

Stop - Program terminated.

<표 3> 기대생산률(EPR) (1 M/C 4 M-G 시스템)

N	F(4,N)	Fmax	Fmin	F/Fmax	Fmin/F(2,N)	Fmin/Fmax
1	.2500	.2500	.2500	1.0000	1.0000	1.0000
2	.3591	.4000	.2500	.8977	.6963	.6250
3	.4139	.5000	.2500	.8278	.6040	.5000
4	.4445	.5714	.2500	.7779	.5624	.4375
5	.4630	.6250	.2500	.7408	.5400	.4000
6	.4749	.6667	.2500	.7123	.5265	.3750