

진부화 제품의 단일 생산 재고 모델에 관한 연구

A Study on a Single Production Inventory Model with Decaying Items

소재영, 윤덕균

한양대학교 산업공학과

Abstract

In this paper, an attempt has been made to revise Raafat's(1985) results on an inventory model for decaying raw materials and the finished product at a constant rate which was based on Goyal's integrated inventory model for a single product system.

This paper is concerned with scheduling the frequencies of order quantity of several different raw materials on a production inventory model. The purpose of this paper is to present a simple method of deciding the frequencies of order quantity of raw materials, in the sense of minimizing the average total cost of the system.

We describe on iterative procedure for directly determining near optimal frequencies of order quantity for the raw materials and the associated fundamental cycle time, which can be used for constructing the production duration of the finished product.

In cases where feasible schedules cannot be constructed using the values from the iterative procedure, the procedure provides a basis for changing the order quantity frequencies and the fundamental cycle time to obtain feasible schedules. An example is given to illustrate the derived results.

1. 서론

본 연구는 다수의 원재료와 단일 완제품이 부패하는 생산-재고모형에서 원재료의 기본주문주기를 이용해 완제품의 생산주기를 구하는 논문이다. 일찍이 Goyal[1]은 부패하지 않는 품목의 통합된 생산-재고모형을 만들었고, Park[2]은 Goyal의 통합된 재고모형을 기초로 원재료만이 일정한 비율로 부패하는 생산-재고모형을 연구했다. 또, Raafat[3]은 Park의 모델을 더욱 확장해서 원재료와 단일 완제품이 모두 일정한 비율로 부패하는 생산-재고모형을 제시했다.

본 논문은 Raafat의 연구를 기본으로 한다. Raafat는 전체 비용방정식에서 완제품의 최적 생산주기를 구해 각각 독립적인 원재료의 주문 빈도수를 최적 생산주기에 맞춰 단 한번으로 하고, 이때의 총비용을 계산했다.

그러나 본 연구는 완제품의 최적 생산주기안에서 Doll & Whybark[4]에서 착안한 발전적인 접근법을 사용하여 독립적인 원재료들의 기본주기와 주문 빈도수를 구해 새로운 완제품의 생산주기를 결정하고 총비용을 찾는다. 즉, 반복해법 절차로 원재료들의 최적 주문 빈도수를 계산해 완제품의 새로운 생산주기를 결정하고, 총비용이 최소가 되는 경제적이고 현실적인 생산-재고모형을 제시한다.

2. 수리적 모형

2.1 모형의 가정과 기호

본 논문에서 사용하는 기호는 다음과 같이 정의한다.

1. 완제품에 대하여

d = 단위시간당 수요량

p = 단위시간당 생산량

h_0 = 단위시간당 재고 유지비

s_0 = 주기당 생산준비 비용

c_0 = 단위당 완제품의 부패손실비용(제조비용 - 처분비용 - 잔가)

θ_0 = 완제품의 부패율

D_0 = 재고주기동안 부패하는 완제품의 단위수량

Q_0 = 완제품의 생산로트크기(EPQ)

T = 재고주기시간

T_1 = 완제품의 생산주기

T_1^* = 완제품의 최적생산주기

$K(T_1)$ = 전체 비용함수

2. 각각의 원재료에 대해서 $j = 1, 2, \dots, m$

r_j = 한단위의 완제품을 만드는데 요구되는 원재료의 양

h_j = 단위시간당 재고유지비용

s_j = 주기당 주문비용

c_j = 단위당 원재료의 부패손실비용 (제조비용 + 처분비용 + 잔가)

θ_j = 원재료 j 에 대한 부패율

d_j = 원재료 j 의 단위시간당 수요량

D_j = 재고주기동안 부패하는 원재료 j 의 단위 수.

Q_j = 원재료 j 의 경제적 주문량(EOQ)

$T_{(j)}^*$ = 원재료 j 의 최적주기

$C_j(n_j)$ = 원재료 j 의 비용함수

본 논문에서 고려되는 생산-재고 시스템의 수학적 모형은 다음과 같은 가정에 의한다.

- 1) 생산에 따른 수요량은 시간에 따라 일정하다.
- 2) 완제품에 대한 생산비율은 유한하다.
- 3) 원재료를 구입하는 조달기간은 0이다.
- 4) 원재료 또는 완제품의 품질은 허용되지 않는다.
- 5) 원재료의 수량할인은 없다.
- 6) 원재료와 완제품은 각각 일정한 비율로 부패한다.
- 7) 부패된 재고의 교환은 허용되지 않는다.
- 8) 완제품과 원재료의 주문주기는 동일하다

2.2 Raafat 모형

Figure 1과 같이 Raafat는 완제품의 최적 생산주기를 구하고, 각각 독립적인 원재료의 주문 빈도수를 최적 생산주기에 맞춰 단 한번으로 하고, 이때의 총비용을 계산했다. 그러나 본 연구는 원재료의 기본주기를 이용해 완제품의 생산주기와 각각의 원재료의 최적 주문빈도수를 구해 총비용이 감소함을 보이는데 있다.

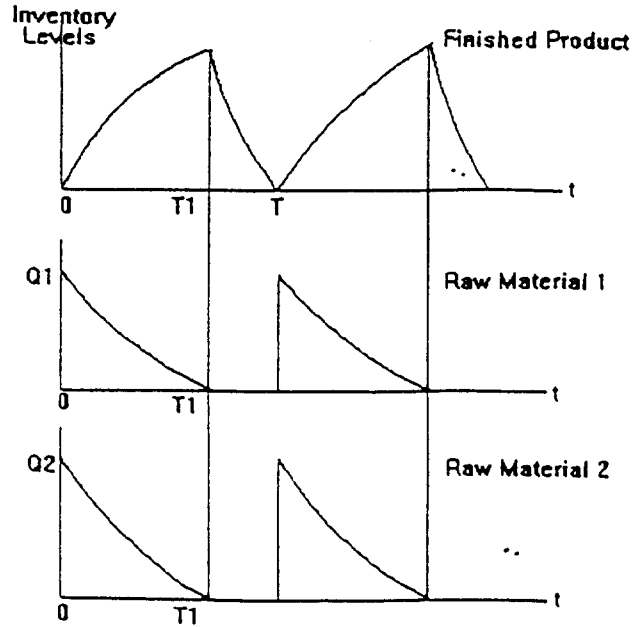


Figure 1. Behaviour of the production-inventory system

2.3 수리적 모형 전개

완제품에 대해서 $I_{10}(t_1)$ 과 $I_{20}(t_2)$ 은 시간 t 에서 재고 수준을 나타낸다. (각각 $0 \leq t_1 \leq T_1$, $T_1 \leq t_2 \leq T$) 생산-재고모형은 Figure 2와 같다. 이때 각각의 재고 주기동안에 완제품의 재고 수준 변화를 나타내는 미분방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다[5][6][7].

$$\frac{d}{dt} I_{10}(t_1) = -\theta_0 I_{10}(t_1) - d + p, \quad 0 \leq t_1 \leq T_1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} I_{20}(t_2) = -\theta_0 I_{20}(t_2) - d, \quad T_1 \leq t_2 \leq T \quad (2)$$

식 (1),(2)의 미분 방정식 해를 구하면 다음과 같다[8].

$$I_{10}(t_1) = \frac{(p-d)}{\theta_0} [1 - \exp(-\theta_0 t_1)] \quad 0 \leq t_1 \leq T_1 \quad (3)$$

$$I_{20}(t_2) = \frac{d}{\theta_0} \{ \exp[\theta_0 (T - t_2)] - 1 \} \quad T_1 \leq t_2 \leq T \quad (4)$$

식 (3),(4)은 $t_1=0$ 과 $t_2=T$ 일때 재고수준은 $I_{10}(0)=0$ 과 $I_{20}(T)=0$ 에 의해 구해진다. 또, $t_1=T_1$ 과 $t_2=T_1$ 일때 $I_{10}(T_1)=I_{20}(T_1)$ 이므로 위의 방정식에 의해 T_1 과 T 의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$T_1 = \frac{1}{\theta_0} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{d}{p} \right) [\exp(\theta_0 T) - 1] \right\} \quad (5)$$

$$T = \frac{1}{\theta_0} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{p}{d} \right) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \right\} \quad (6)$$

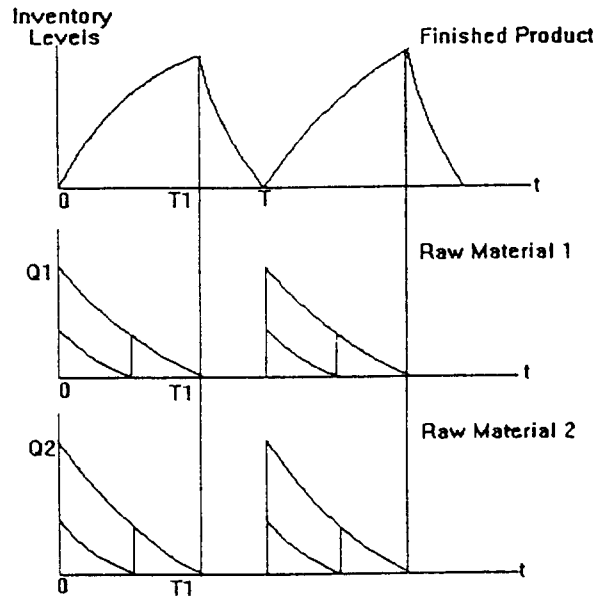


Figure 2. New behaviour of the production-inventory system

생산량은 일정한 비율 p 로 발생하기 때문에 재고주기동안에 완제품의 생산 로트크기와 부패되는 수량과 창고에 운반된 완제품의 전체 수량은 다음과 같다.

$$Q_0 = pT_1 = \frac{p}{\theta_0} \ln(1 + (d/p) [\exp(\theta_0 T) - 1]) \quad (7)$$

$$D_0 = Q_0 - dT = \frac{p}{\theta_0} \ln(1 + (d/p) [\exp(\theta_0 T) - 1]) - dT \quad (8)$$

$$= pT_1 - \frac{d}{\theta_0} \ln(1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1])$$

$$I_0 = \int_0^{T_1} I_{10}(t) dt + \int_{T_1}^T I_{20}(t) dt \quad (9)$$

$$= (pT_1 - \frac{d}{\theta_0} \ln(1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1])) / \theta_0$$

각각의 원재료 j 에 대한 방정식은 아래와 같은데, 먼저 일정한 부패율을 가진 간단한 EOQ의 재고주기에 대한 방정식[9]은 다음과 같다.

$$\frac{d_j h_j}{2} + \frac{d_j h_j \theta_j T_{(j)}}{2} + \frac{c_j d_j \theta_j}{2} - \frac{s_j}{T_{(j)}^2} = 0 \quad (10)$$

원재료 j 의 최적주기 $T_{(j)}^*$ 은 식 (10)를 해결함으로써 얻어진다.

$$T_{(j)}^* = \sqrt{\frac{s_j}{\frac{d_j \theta_j c_j}{2} + \frac{d_j h_j}{2} + \frac{d_j h_j \theta_j T_{(j)}^*}{2}}} \quad (11)$$

Raafat(1985)의 식 (12)-(14)로부터 새로운 Q_j, D_j, I_j 의 방정식은 다음과 같다. 여기서, n_j 는 원재료 j 의 주문 빈도수를 나타내는 정수이다.

$$Q_j = n_j \frac{p r_j}{\theta_j} \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - 1 \right] \quad (12)$$

$$D_j = Q_j - d r_j T_1 \quad (13)$$

$$= n_j \frac{p r_j}{\theta_j} \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - 1 \right] - r_j \left(\frac{d}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right)$$

$$I_j = n_j \frac{p r_j}{\theta_j^2} \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - \theta_j \frac{T_1}{n_j} - 1 \right] \quad (14)$$

원재료 j 에 대한 비용방정식은 다음과 같다.

$$C_j(n_j) = \left\{ \left[n_j s_j \right] + n_j p \left(\frac{c_j r_j}{\theta_j} \right) \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - 1 \right] \right. \\ \left. - d \left\{ \frac{1}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right\} c_j r_j \right. \\ \left. + n_j p \frac{r_j h_j}{\theta_j^2} \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - \theta_j \frac{T_1}{n_j} - 1 \right] \right\} / \\ \left\{ \frac{1}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right\} \quad (15)$$

시스템의 전체비용은 생산준비비용, 구매주문비용, 원재료와 완제품의 부패비용과 재고유지비용으로 이루어져 있다. 시스템의 평균 전체비용은 다음과 같다. (단 $n_0 = 1$)

$$K(T) = \frac{1}{T} \left(\sum_{j=0}^m (n_j s_j + c_j D_j + h_j I_j) \right) \quad (16)$$

식 (16)를 사용하여 위의 방정식을 T_1 의 함수로써 다시쓰면 다음과 같다.

$$K(T_1) = \left\{ \left[s_0 + n_j \sum_{j=1}^m s_j \right] + \left[c_0 p T_1 - c_0 d \left\{ \frac{1}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right\} \right] \right. \\ \left. + n_j p \sum_{j=1}^m \left(\frac{c_j r_j}{\theta_j} \right) \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - 1 \right] \right. \\ \left. - d \left\{ \frac{1}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right\} \sum_{j=1}^m c_j r_j \right. \\ \left. + \left[\left(h_0 (p T_1 - \left(\frac{d}{\theta_0} \right) \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right) / \theta_0 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + n_j p \sum_{j=1}^m \frac{r_j h_j}{\theta_j^2} \left[\exp\left(\theta_j \frac{T_1}{n_j}\right) - \theta_j \frac{T_1}{n_j} - 1 \right] \right\} / \right. \\ \left. \left\{ \frac{1}{\theta_0} \ln\{1 + (p/d) [\exp(\theta_0 T_1) - 1] \} \right\} \right\} \quad (17)$$

이 방정식은 단일 변수 T_1 의 함수로만 나타나 있다. 컴퓨터 탐색기법인 Fibonacci 법[10]을 사용하면 직접 T_1 의 최적값을 구할 수 있다. T_1^* 의 결정 후에 다른 특성치는 적절한 방정식을 통해서 쉽게 결정된다.

3. 발견적 접근법을 이용한 해법

3.1 알고리즘 전개

원재료의 기본주기 $T_{(j)}^*$ 는 완제품의 최적주기 T_1^* 안에서 변화없이 비선형 정수배로 떨어지는 경우가 적어 발견적 접근법[4]을 사용한다. 알고리즘의 수행절차는 다음과 같다.

단계 1. $n_j = \{1, 1, \dots, 1\}$ 로 초기화하고 식 (17)로부터 T_1^* 를 구한다.

단계 2. 식 (11)를 이용해서 원재료 j에 대해 $T_{(j)}^*$ 를 구한다.

단계 3. T_1^* 를 $T_{(j)}^*$ 로 나뉜 몫의 정수를 n_j^- 로 하고, 하나를 더한 정수를 n_j^+ ($n_j^+ = n_j^- + 1$)로 한다.

$$n_j^- \leq T_1^* / T_{(j)}^* < n_j^+$$

단계 4. T_1^* / n_j^- 와 T_1^* / n_j^+ 을 원재료 j에 비용방정식 (15)에 대입해 작은 비용을 발생시키는 n_j 를 채택한다.

$$C_j(n_j^-) \leq C_j(n_j^+) \text{인 경우는 } n_j = n_j^-$$

$$C_j(n_j^+) < C_j(n_j^-) \text{인 경우는 } n_j = n_j^+$$

만약, $n_j^- = 0$ 인 경우는 $n_j = 1$ 로 한다(Raafat의 모델이 최적어 된다).

단계 5. 주어진 n_j 를 가지고 식 (17)로부터 새로운 T_1^* 를 구한다.

단계 6. 새로운 T_1^* 를 사용하여 새로운 n_j^- 와 n_j^+ 를 결정하기 위해

단계 3으로 간다. 이 과정은 $\{n_j\}$ 의 매개변수값이 반복될때 정지한다.

4. 수치예제

본 예제에 이용되는 데이터는 다음과 같다.

Table 1. Parameter values of the example problem

Parameters	Finished product	Raw Material 1	Raw Material 2
p	2500 unit/year	-	-
d	2000 unit/year	2500 unit/year	5000 unit/year
s_j	\$100	\$30	\$30
h_j	\$1/year	\$0.6/year	\$0.3/year
r_j	1 unit	1 unit	2 unit
c_j	\$5	\$2	\$1
θ_j	0.01-0.20/year	0.01/year	0.03/year

Table 2. Characteristics of the production-inventory model as a function of finished product decay rate

θ_0	T_1^*	T	Q_0	Q_1	Q_2	D_0	D_1	D_2	K	n_j
0.01	0.2866	0.3582	716.62	717.64	1439.41	0.26	1.28	6.69	892.48	1 1
0.02	0.2846	0.3555	711.45	712.47	1429.00	0.50	1.52	7.10	899.10	1 1
0.03	0.2826	0.3528	706.42	707.42	1418.85	0.75	1.74	7.50	905.66	1 1
0.04	0.2806	0.3503	701.52	702.50	1408.96	0.98	1.96	7.88	912.16	1 1
0.05	0.2787	0.3478	696.73	697.70	1399.31	1.21	2.18	8.25	918.60	1 1
0.10	0.2698	0.3361	674.45	675.36	1354.38	2.24	3.15	9.96	950.01	1 1
0.11	0.2681	0.3339	670.30	671.20	1346.00	2.44	3.33	10.28	956.14	1 1
0.15	0.2618	0.3257	654.54	655.40	1314.24	3.15	4.01	11.46	980.18	1 1
0.20	0.2546	0.3163	636.60	637.41	1278.08	3.95	4.76	12.78	1009.25	1 1

완제품의 부패율이 $\theta_0 = 0.01$ 인 경우와 원재료가 1, 2인 경우를 고려한다.

단계 1. $n_j = \{1, 1\}$ 로 초기화하고 식 (17)으로부터 T_1^* 를 구한다. $T_1^* = 0.2866$

단계 2. 식 (11)로부터 $T_{(j)}^*$ 를 구한다.

원재료 1: $T_{(1)}^* = 0.1966$ 원재료 2: $T_{(2)}^* = 0.1902$

단계 3. T_1^* 를 $T_{(j)}^*$ 로 나눠 n_j 를 구한다.

원재료 1: $T_1^*/T_{(1)}^* = 1.458$ $n_1^- = 1$, $n_1^+ = 2$

원재료 2: $T_1^*/T_{(2)}^* = 1.507$ $n_2^- = 1$, $n_2^+ = 2$

단계 4. T_1^*/n_j^- 와 T_1^*/n_j^+ 을 원재료 j의 비용 방정식 (15)에 대입해 n_j 를 결정한다.

원재료 1: $C_1(n_1^-) = 263.14$ $C_1(n_1^+) = 257.88$

원재료 2: $C_2(n_2^-) = 263.14$ $C_2(n_2^+) = 257.88$

$$n_j = \{2, 2\}$$

단계 5. 주어진 n_j 와 식 (17)로부터 새로운 T_1^* 를 구한다.

$$n_j = \{2, 2\} \text{일때 } T_1^* = 0.4388$$

단계 3. 새로운 T_1^* 를 다시 $T_{(j)}^*$ 로 나눠 n_j 를 구한다.

$$\text{원재료 1: } T_1^*/T_{(1)}^* = 2.232 \quad n_1^- = 2, \quad n_1^+ = 3$$

$$\text{원재료 2: } T_1^*/T_{(2)}^* = 2.307 \quad n_2^- = 2, \quad n_2^+ = 3$$

단계 4. T_1^*/n_j^- 와 T_1^*/n_j^+ 을 원재료 j의 비용 방정식 (3-4)에 대입해 n_j 를 결정한다.

$$\text{원재료 1: } C_1(n_1^-) = 247.84 \quad C_1(n_1^+) = 257.15$$

$$\text{원재료 2: } C_2(n_2^-) = 256.84 \quad C_2(n_2^+) = 263.10$$

$$n_j = \{2, 2\}$$

단계 6. $n_j = \{2, 2\}$ 가 반복되므로 정지한다. 이때 최적의 생산주기

$$T_1^* = 0.4388 \text{이 된다.}$$

부패율 $\theta_0 = 0.01$ 일때의 결과가 Table 3에 나타나 있다. 부패율이 증가할수록 생산주기는 감소하지만, 부패수량과 총비용은 단조적으로 증가함을 볼 수 있다.

Table 3. Characteristics of the proposed production-inventory model as a function of finished product decay rate

θ_0	T1	T	Q0	Q1	Q2	D0	D1	D2	K	n_j
0.01	0.4388	0.5482	1096.92	1098.12	2201.07	0.60	1.80	8.44	802.09	2 2
0.02	0.4335	0.5413	1083.87	1085.05	2174.80	1.17	2.35	9.40	812.05	2 2
0.03	0.4285	0.5348	1071.35	1072.50	2149.61	1.71	2.86	10.32	821.87	2 2
0.04	0.4237	0.5286	1059.33	1060.45	2125.41	2.23	3.35	11.20	831.54	2 2
0.05	0.4191	0.5225	1047.77	1048.87	2102.14	2.72	3.81	12.03	841.08	2 2
0.10	0.3984	0.4955	995.94	996.93	1997.84	4.86	5.86	15.69	886.96	2 2
0.11	0.2681	0.3339	670.30	671.20	1346.00	2.44	3.33	10.28	956.14	1 1
0.15	0.2618	0.3257	654.54	655.40	1314.24	3.15	4.01	11.46	980.18	1 1
0.20	0.2546	0.3163	636.60	637.41	1278.08	3.95	4.76	12.78	1009.25	1 1

5. 결과

Table 4. Comparison of results

θ_0	Raafat' model			Proposed model		
	T_1^*	Cost	$\{n_j\}$	T_1	Cost	$\{n_j\}$
0.01	0.2866	892.48	{1,1}	0.4388	802.09	{2,2}
0.05	0.2787	918.60	{1,1}	0.4191	841.08	{2,2}
0.10	0.2698	950.01	{1,1}	0.3984	886.96	{2,2}
0.15	0.2618	980.18	{1,1}	0.2618	980.18	{1,1}
0.20	0.2546	1009.25	{1,1}	0.2546	1009.25	{1,1}

Table 4의 결과에서 $\theta_0=0.01$ 경우에 Raafat 모형의 총비용은 $T_1^*=0.2866$ 일 때 $n_j=\{1, 1\}$, \$892.48이 되는데, 제안된 모형의 비용은 $n_j=\{2, 2\}$, $T_1^*=0.4388$ 일 때 \$802.09으로 비용이 감소함을 볼 수 있고, $\theta_0=0.15$ 인 경우는 두 방법 모두가 $n_j=\{1, 1\}$ 일때가 가장 작은 비용을 가짐을 알 수 있다.

6. 차후의 연구과제

부패성 제품을 생산하는데 있어서, 각 제품의 생산주기가 각기 다른 경우에 생산 공통주기를 각 제품에 따라 어떻게 변화시키면 생산 관리비용을 최소화할 것인가 하는 모형 개발이 차후 연구과제이다.

참고문헌

1. Goyal, S. K., "An Integrated Inventory Model for a Single Product System," *Opl. Res. Q.*, Vol. 28, pp. 539-545, 1977.
2. Park, P. S., "An Integrated Production-Inventory Model for Decaying Raw Materials," *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 14, No. 7, pp. 801-806, 1983.
3. Raafat F., "A Production-Inventory Model for Decaying Raw Materials and a Decaying Single Finished Product System," *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 16, No. 8, pp. 1039-1044, 1985.
4. Doll, C. L., and Whybark, D. C., "An Iterative Procedure for the Single-Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem," *Management Science*, Vol. 20, No. 1, pp. 50-55, 1973.
5. Raafat F., "An Inventory Model for Deteriorating Items," *Computers Ind. Engng.*, Vol. 20, No. 1, pp. 89-94, 1991.
6. Misra, R. B., "Optimum Production Lot-Size Model for a System with Deteriorating Inventory," *Int. J. Prod. Res.*, Vol. 13, No. 5, pp. 495-505, 1975.
7. Mak, K. L., "A Production Lot Size Inventory Model for Deteriorating Items," *Computers Ind. Engng.*, Vol. 6, No. 4, pp. 309-317, 1982.
8. Boyce, W. E., and Di Prima, R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Problems* (New York: John Wiley & Sons), 1977.
9. Ghare, P. M., and Schrader, G. F., "A Model for Exponential Decaying Inventory," *Int. J. Ind. Engng.*, Vol. 14, No. 5, pp. 238-243, 1963.
10. Kuester, J.L., and Maiz, T.A., *Optimization Techniques with Fortran* (New York: McGraw-Hill, Inc), 1973.