

# 타원형 경계치 문제에 대한 다중격자법의 적용

## Application of Multigrid Method for Elliptic Boundary Value Problems

이 중 설\*, 허 준 행\*\*, 조 원 철\*\*\*

### 1. 서 론

유체 동역학 및 수공학 분야에서 수치계산을 위한 지배방정식으로 사용되는 정상 열전달방정식, 비압축성 속도포텐셜 방정식, 비점성흐름, 흐름함수방정식등은 Poisson 방정식과 Laplace 방정식으로 대별되는 타원형 방정식계이다. 이러한 지배방정식을 풀기위한 수치기법에는 직접해법과 반복해법이 있으며, 수공학분야의 경우 적용대상영역이 광범위하고 수치격자의 수가 많아 직접해법을 적용하기 어렵기 때문에 통상 반복해법이 주로 사용되어 왔다. 그러나 기존의 반복법은 격자의 수와 반복횟수가 증가함에 따라 수렴속도가 현저히 저하되며 아주 많은 계산시간과 컴퓨터 기억용량을 필요로 하게 되어 비효율적이다.

다중격자법(multigrid method)은 수치격자의 간격이 다른, 즉 일련의 성긴격자(coarse grid)와 조밀격자(fine grid)로 구성되는 격자망을 구성하여 성긴격자와 조밀격자간의 정보교환을 통하여 계산을 수행하고, 계산하고자 하는 가장 조밀한 격자상에서 근사해를 구하는 수치기법이다. 기존의 수치기법은 해석하고자 하는 실제 대상영역에 하나의 계산 격자망만을 구성하여 계산을 수행하기 때문에 고주기(high-frequency) 범위의 오차항은 몇 번의 반복에 의해 쉽게 제거되지만 저주기(low-frequency) 범위의 오차항을 내재한 근사해는 정확해에 느리게 수렴하게 되어 반복횟수가 많아지고 계산시간이 길어지는 원인이 된다. 그러나 다중격자법에서는 조밀격자상에서 고주기 성분의 오차항을 몇 번의 반복에 의해 빠르게 제거하고 조밀격자상에서는 제거속도가 느린 저주기 성분의 오차항을 성긴격자상에서 제거함으로써 보다 빠르게 수렴시키게 된다.

다중격자법은 Fedorenko(1962)에 의해 Poisson방정식과 같은 타원형 편미분 방정식의 해를 구하기 위한 방법으로 개발되었으나, Brandt 등에 의해 체계화되어 최근 Euler방정식 및 Navier-Stoke 방정식의 해법으로도 널리 이용되고 있다. Charles등에 의하면 반복해법 중, 다중격자법이 가장 효율적인 반복해법으로 알려져 있다.

본 연구는 다중격자법의 기본이론을 소개하고, 비등방성 타원형 편미분 방정식(anisotropic elliptic P.D.E.) 형태로 표현되는 사각형 관내 완전점성흐름에 대해 기존의 반복해법과 다중격자법을 적용하는 알고리즘을 구성하여, 구성된 다중격자법 알고리즘과 기존의 수치기법들에 대해 소요되는 계산시간과 수렴율 등의 비교를 통하여 그 안정성, 수렴성을 검증하고, 아직까지 국내에서는 생소한 다중격자법의 기본개념을 소개하고자 하는데 그 목적이 있다.

\* 연세대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 연세대학교 토목공학과 조 교수

\*\*\* 연세대학교 토목공학과 교수

## 2. 다중격자법(Multi-Grid Method)

다중격자법은 선형문제를 풀기위한 Correction Scheme(CS)과 비선형문제를 해석하기 위한 Full Approximation Scheme(FAS)로 대별된다.

### 2.1 선형 다중격자법(Linear Multigrid Method)

본 절에서는 선형문제를 풀기 위한 CS다중격자법의 기본적인 알고리즘인 Coarse Grid Correction(CGC)과 2중격자법(two-grid method)에 대해 알아보기로 한다. 이를 위해 격자크기가  $h$ 이고, 계산영역  $\Omega_h$ 인 조밀격자상에서 Poisson방정식을 고려하면, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L_h u_h = f_h(\Omega_h) \quad (\text{여기서, } L_h \text{ 는 Laplace 연산자}) \quad (2.1)$$

#### 2.1.1 Coarse Grid Collection

식 (2.1)의 정확해  $u_h$ 의  $j$ 계산단계에서의 근사해를  $u_h^j$ 라 두면,  $u_h^j$ 의 오차  $v_h^j$ 는 식(2.2)와 같고,

$$v_h^j = u_h - u_h^j \quad (2.2)$$

$u_h^j$ 의 잔차(residual or defect)  $d_h^j$ 는 식 (2.3)으로 나타낼 수 있다.

$$d_h^j = f_h - L_h u_h^j \quad (2.3)$$

식(2.2)와 식(2.3)으로 부터 식 (2.4)와 같은 잔차방정식의 형태가 된다.

$$L_h v_h^j = d_h^j \quad (2.4)$$

CGC는 잔차와 잔차방정식을 이용하여 계산을 수행하게 되는 데, 조밀격자에서 성긴격자로 잔차를 전달하여 성긴격자에서 잔차방정식을 풀고, 이 잔차방정식의 오차를 조밀격자로 전달함으로써 조밀격자상에서 새로운 근사해를 구하는 것이다. 즉, 식 (2.3)으로 부터 조밀격자상에서 잔차를 구한 다음, 이 잔차를 성긴격자로 전달한다. 이 과정을 restriction이라 하며, 식 (2.5)와 같다.

$$d_H^j = I_H^j d_h^j \quad (2.5)$$

여기서,  $d_H^j$ 는 성긴격자상에서의 잔차를 나타내며,  $I_H^j$ 는 restriction 연산자이다. 식 (2.5)의 잔차를 식 (2.6)과 같은 성긴격자상의 잔차방정식을 정확하게 풀어서 성긴격자상에서의 오차를 구한다.

$$L_H v_H = d_H^j \quad (2.6)$$

식(2.6)으로 부터 구한 오차  $v_H$ 를 조밀격자로 전달한다. 이 과정을 prolongation 또는 interpolation이라 한다. 식 (2.7)은 prolongation 을 표현한 식이며, 식(2.7)로 부터 전달된 오차로 부터 식(2.8)에 의하여  $j+1$  단계의 새로운 근사해를 구한다. 이 과정을 CGC 라 한다.

$$v_h^j = I_H^j v_H \quad (2.7)$$

$$u_h^{j+1} = u_h^j + v_h^j \quad (2.8)$$

#### 2.1.2 Restriction 연산자와 Prolongation 연산자

2.1.1절의 식(2.5)에서  $I_H^j$ 를 restriction 연산자라고 하는데, 이는 조밀격자상의 잔차분포를 성긴격자상의 잔차분포로 전달하는 역할을 한다. 이러한 restriction 에는 조밀격자의 잔차분포를 성긴격자의 잔차분포와 동일하게 두는 injection과 성긴격자점의 잔차분포를 조밀격자의 잔차분포로 부터 전달하는 데 9점과 5점을 이용하는 full weighting과 half weighting이 있다. injection은 strongly elliptic 문제에서는 계산상 효율적이고 안정하나, weakly elliptic 비선형 문제에서는 9점 연산자나 5점 연산자를 이용하는 것이 보다 효율적이고 안정하다. 5점 연산자와 9점 연산자에서 가중계수의 합은 적합성(consistency)을 유지하기 위하여 1이 되어야 한다. Full weighting 연산자와 half weighting 연산자를 행렬의 형태로 표현하면 식 (2.9)와 같다.

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_h^H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

2.1.1절의 식 (2.7)에서  $I_h^H$ 를 prolongation 또는 interpolation 연산자라 하며, 이는 성긴격자 상에  
 의 오차분포를 조밀격자상에 분포시키는 역할을 하는 연산자이다. Prolongation 연산자는 2차원  
 문제인 경우 보통 bilinear interpolation을 사용하며, 행렬의 형태로 표시하면 식(2.10)과 같다.

$$I_h^H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

### 2.1.3 이중격자법

이중격자법은 앞의 2.1.1절의 CGC와 이완법에 의한 평활화 단계(smoothing)를 결합한 것으로  
 다중격자법의 기본이 되는 알고리즘이다. 이중격자법은 다음의 3단계로 구성된다.

(1) CGC 이전의 평활화 단계 : CGC 이전에 평활성을 갖는 즉, 고주기 성분의 오차를 효율적으  
 로 줄일 수 있는 이완법을 이용하여 오차를 평활화한다. 이를 식으로 표시하면 식 (2.11)과 같다.

$$\overline{u}_h^i = \text{RELAX}^{\nu_1}(u_h^i, L_h, f_h; \omega) \quad (2.11)$$

식(2.11)에서  $\omega$ 는 이완상수를 나타내며,  $\nu_1$ 은 반복횟수를 나타낸다.

(2) CGC 단계 : 식(2.3)의  $u_h^i$ 대신에 (1)단계에서 평활화된 근사해  $\overline{u}_h^i$ 를 사용하여 CGC 과정을  
 수행한다. 평활화된 근사해에 의한 오차를  $\widehat{v}_h^i$ 라 하면, 결국 CGC 알고리즘으로부터 j단계에서의  
 근사해  $\overline{u}_h^i + \widehat{v}_h^i$ 를 조밀격자상에서 구하게 된다.

(3) CGC 이후의 평활화 단계 : (2)단계로 부터 구한 j단계에서의 근사해를  $\nu_2$ 번의 반복에 의해  
 j+1단계에서의 근사해를 구한다. 이를 식으로 표시하면, 식(2.12)로 나타낼 수 있다.

$$u_h^{i+1} = \text{RELAX}^{\nu_2}(\overline{u}_h^i + \widehat{v}_h^i, L_h, f_h; \omega) \quad (2.12)$$

위에서 언급한 선형 이중격자법은 뒤에 언급할 비선형문제의 해석을 위한 FAS와 구별하여 CS  
 라 한다.

### 2.1.4 선형 다중격자법

선형 다중격자법은 격자의 크기가  $h_m$  (여기서,  $h_m/h_{m-1} = 0.5, m=0,1,2, \dots$ )인 일련의 격  
 자상에서 2.1.3절의 CS 알고리즘을 응용하여 연속적으로 적용하는 것이다. 선형다중격자법의 기본  
 적인 알고리즘은 가장 성긴격자에 도달하기 이전 단계까지는 식(2.6)을 정확하게 구하지 않고, CS  
 (1)단계 평활화 과정에 의한 근사해를 구하고 이 근사해로 부터의 잔차를 restriction하는 과정만  
 을 반복한다. 이 과정이 가장 성긴격자에 도달하게 되면 식(2.6)을 정확하게 구하고, 이로 부터 구  
 해진 오차를 가장 조밀한 격자에 도달할 때까지 prolongation하여, 가장 조밀한 격자상에서 새로  
 운 근사해를 구하게 된다. 이와 같은 과정을 multigrid cycle 이라고 하며, 식(2.6)을 정확하게 구  
 하는 횟수를  $\gamma$ 라 하면,  $\gamma$ 에 따라 즉,  $\gamma = 1$ 인 경우를 V-cycle이라 하며,  $\gamma \geq 2$ 인 경우를  
 W-cycle이라 한다. W-cycle은 V-cycle보다 계산효율이 50%정도 떨어지지만 일반적으로 보다 안  
 정하며, 특히 민감한 문제의 해석을 위해서는 W-cycle을 사용하는 것이 보다 더 좋다.

## 2.2 비선형 다중격자법(Non-linear Multigrid Method)

다중격자법은 비선형문제인 경우, 선형화 과정을 통해서 적용하기도 하지만, 잔차 뿐만아니라  
 근사해 자체를 restriction과정에서 성긴격자로 전달함으로써 직접적으로 비선형문제를 해석할 수

있다. 그림 2.1은 이중격자 FAS을 나타낸다. 그림에서  $L_h$ 는 비선형연산자이다.

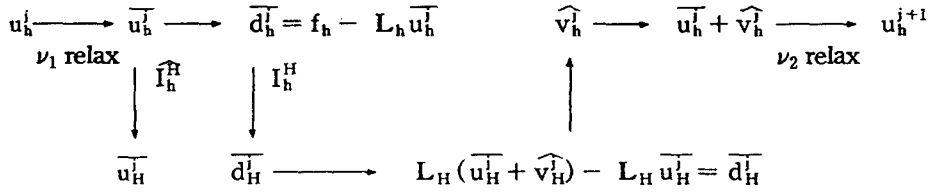


그림 2.1 이중격자 FAS

그림에서 relax는 적절한 평활성을 갖는 비선형 이완과정을 뜻하며, 선형의 경우와 마찬가지로  $\nu_1$ 번의 반복 후, CGC 과정을 거치고  $\nu_2$ 번의 반복으로 새로운 근사해를 구한다. 그러나 선형인 경우 잔차  $\overline{d}_h^b$ 만을 성긴격자로 전달하는 데 반해, 비선형인 경우는 이완시킨 근사해 자체도 성긴격자로 전달한다. 이러한 이중격자 FAS를 선형의 경우와 유사하게 multigrid cycle에 적용시키면, 다중 FAS 알고리즘을 구성할 수 있다.

### 2.3 단위 계산량(Work Unit)

다중격자법은 반복과정에 소요되는 계산량 이외에 restriction, prolongation과정과 defect equation을 푸는데 소요되는 계산량 등이 포함되어 있고, 일반적으로 대부분 반복과정에 의한 계산량만이 소요되기 때문에 두 방법간의 계산량을 비교하기 위해서는 다중격자법의 단위 계산량을 고려할 필요가 있다. 최대 조밀격자 상의 반복과정을 단위계산량으로 하면, 일반적인 반복해법은 최대 조밀격자만을 이용하여 계산을 수행하므로 한번의 반복과정 자체가 단위 계산량이 되며, 반복횟수가 곧 계산량으로 볼 수 있다. 최대 조밀격자의 크기가  $h_m$ 인 다중격자법의 단위 cycle당 계산량을  $W_m$ 이라 하면, 격자크기가  $h_k$ 인 격자상에서의 계산량은 다음과 같다.

$$W_1 = W_1^0 + W_0, \quad W_{k+1} = W_{k+1}^k + \gamma_k W_k \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.13)$$

여기서,  $\gamma_k$ 는 성긴격자 구성형태와 cycle의 형태에 따른 계산량의 비례상수를 나타내며,  $W_0$ 는 가장 성긴격자상에서 해를 정확하게 구하는 데 요구되는 계산량을 말하며,  $W_{k+1}^k$ 는  $h_k$  크기의 격자에서 defect equation을 푸는 데 요구되는 계산량을 제외한 이중격자 1 cycle당 요구되는 계산량을 뜻한다. 따라서,  $\gamma$ 가  $k$ 에 독립이라면, 다중격자 1 cycle 당 요구되는 계산량은 식(2.14)로부터 구할 수 있다.

$$W_m = \sum_{k=1}^m \gamma^{m-k} W_k^{k-1} + \gamma^{m-1} W_0 \quad (2.14)$$

### 3. 사각형 관내의 완전 점성흐름 해석

관내에서의 완전 점성흐름은  $z$  방향 운동량 방정식 (3.1)을 사용하여 해석할 수 있다.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

여기서,  $w(x,y)$ 는  $z$  방향(축방향) 유속,  $\mu$ 는 점성,  $\partial p/\partial z$ 는 주어진 압력경사를 나타낸다. 본 연구에서는 그림 3.1과 같이  $x$ 방향의 크기가  $2a$ 이고  $y$ 방향의 크기가  $2b$ 인 사각형 관내의 완전 점성흐름에 관한 문제에 기존의 반복해법과 2장에서 논의한 다중격자법을 적용하여, 형상비에 따른 각 기법들의 수렴성 및 계산시간을 비교하고자 한다.

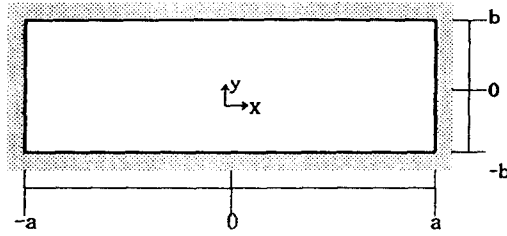


그림 3.1 사각형관내 점성흐름

식(3.1)을 그림 3.1 과 같은 계산영역에 적용할 경우, 계산편의상 다음 식 (3.2)의 관계를 이용하여 면 식(3.3)과 같은 무차원화된 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{w} = w \left( -\frac{\mu}{b^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

식 (3.3)에서는 표기상 편의를 위해 (-)를 생략하였다.

$$\left(\frac{a}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0 \quad (3.3)$$

무차원화된 (3.3)식의 경계조건은, 유체와 관이 접하는 경계를 no-slip경계로 가정하면, 다음과 같다.

$$w = 0, \quad \text{at } x = \pm a, \quad y = \pm b \quad (3.4)$$

식(3.3)은 비등방성 Poisson 방정식으로 식(3.4)의 경계조건과 함께 완전경계치 타원형 편미분방정 식으로서, 기존의 반복해법과 다중격자법을 쉽게 적용할 수 있다.

#### 4. 다중격자법과 기존의 반복해법과의 비교 분석

본 연구에서는 기존의 반복해법인 Jacobi방법, Gauss-Seidel방법, S.O.R.(successive over-relaxation), R.B.(red-black)방법, J.L.Z.(Jacobi line zebra)방법과 R.B.과 J.L.Z.방법을 평탄자(smooth)로 사용한 다중격자법(각각 M.G.(R.B.)과 M.G.(J.L.Z.)로 표시)을 적용하였다. 이 방법들 중 S.O.R.은 이완상수에 따라 수렴정도가 달라지며, 계산시간과 수렴성의 비교시 가장 적합한 이완상수를 사용하였다. 사각형관의 형상은 가로방향 대 세로방향의 비가 각각 1.0, 1.5, 2.0인 경우에 대해 적용하였으며, 0.5, 0.75의 형상비는 가로, 세로방향의 대칭성때문에 1.5, 2.0인 경우와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 각 방법들은 해석해와의 비교를 통해 잔차합의 제곱근(residual mean square)이 0.01에 도달할 때까지 반복하여, 계산시간 및 수렴에 소요되는 계산량을 구하였다. 표 4.1은 사각형 관의 형상비가 1.0일때의 계산시간(IBM PC 586 기준 사용)을 나타낸 것이다.

표 4.1 격자수에 따른 계산시간(형상비가 1일 때)  
(단위 : sec)

격자수 수치기법	17×17	33×33	65×65	129×129
Jacobi	0.76	10.38	162.09	N.C.
Red-Black	0.38	5.66	86.78	1438.22
Gauss-Seidel	0.44	5.33	81.79	1322.79
Jacobi Line Zebra	0.33	4.12	63.00	1041.72
S.O.R.	0.22	0.83	5.73	42.14
M.G.(J.L.Z.)	0.11	0.71	4.79	32.80
M.G.(R.B.)	0.11	0.60	2.75	15.21

표 4.2 형상비에 따른 S.O.R.법과 다중격자법의  
계산시간 비교

형상비 수치기법	1.0 (129×129)		1.5 (129×129)		2.0 (129×129)	
	CPU time	Work Unit	CPU time	Work Unit	CPU time	Work Unit
S.O.R.	42.14	202.00	30.76	177.00	36.02	157.00
M.G.(J.L.Z.)	32.80	130.00	28.78	97.98	24.56	79.32

표 4.1 에서 보는 바와 같이 M.G.(R.B.)이 등방성 타원형 편미분방정식 해석에 가장 효율적인 것으로 나타났다. 그러나, M.G.(R.B.)는 비등방성 편미분방정식인 경우, R.B.는 평활성을 갖지 못하기 때문에 해를 구하기 위한 방법으로서는 적합하지 못하다. 따라서, 비등방성 타원형 편미분방정식의 형태인 형상비가 1.0이 아닌 사각형 관내의 완전점성흐름에 대한 계산시간 및 수렴성의 비교는 M.G.(J.L.Z)만을 비교하기로 한다. 표 4.2는 형상비에 따른 계산시간을 비교한 것으로 형상비가 커짐에 따라서 계산시간 및 수렴속도에서 다중격자법이 월등히 뛰어난 것을 알 수 있다. 그림 4.1은 2.3절에서 언급한 단위계산량과 잔차합의 제곱근을 비교한 것으로 각각  $17 \times 17$ ,  $129 \times 129$  격자로 계산영역을 구성하였을 때의 수렴정도를 나타내는 것이다. 격자의 수가 증가할수록 기존의 S.O.R.법을 제외한 기존의 반복법은 그 수렴정도가 현저히 저하되기 때문에 그림 4.1(b)에서는 다중격자법과 기존의 반복법 중 그 수렴성이 뛰어난 S.O.R.법만을 비교하였다. 그림 4.1(b)에서 보는 바와 같이 적합한 이완상수를 사용한 S.O.R.법의 경우에도 다중격자법에 비해 그 수렴정도가 50% 정도에 불과함을 알 수 있다.

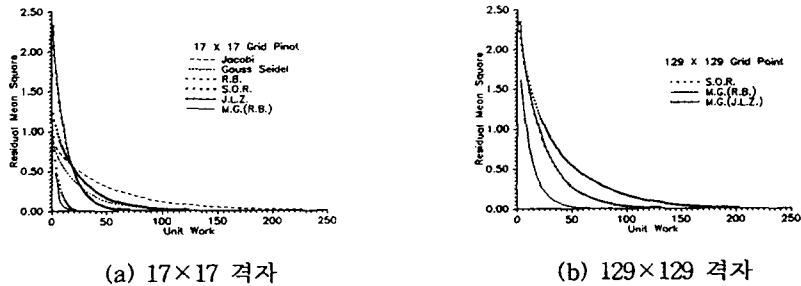


그림 4.1 형상비가 1일때의 수렴성 비교

## 5. 결론

본 연구로부터 얻어진 성과를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 사각형관내 완전점성흐름의 정확도에 대해 각 기법의 근사해가 동일한 근사정도내에 수렴하는 계산시간을 비교해 본 결과, 다중격자법이 기존의 반복해법보다 훨씬 우수한 것으로 나타났다.
- 2) 수렴성에 있어서도 다중격자법이 50% 정도 빠르게 정확도에 수렴하는 것으로 나타났다.
- 3) 비등방성 Poisson방정식에 대한 다중격자법의 평판자로는 J.L.Z.가 안정적이며, 형상비가 1.0인 등방성 Poisson방정식인 경우 R.B.이 보다 좋은 평판자인 것으로 나타났다.

본 연구에서는 비교적 간단한 선형 타원형 경계치문제에 다중격자법을 적용한 것으로, 지속적인 연구를 통하여 비선형 타원형 문제외에 포물선형 및 쌍곡선형의 편미분방정식에도 다중격자법을 적용하여, 보다 일반적인 유체흐름 분석을 위한 다중격자법 알고리즘개발이 이루어져야 할 것으로 생각된다.

## <참고문헌>

1. Stüben, K. and Trottenberg, U, "Multigrid Methods : Fundamental Algorithms, Model Problem Analysis and Applications", Multigrid Method. Proc. of the Conference Held at Köln-Porz, No 23-27, 1982.
2. Fletcher, C.A.J., Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Springer-Verlag, pp. 137~143, pp. 163~215, 1991.