

# 사각형 유한요소법을 이용한 부영양화 모형의 개발

김 준현\*, 이 윤석\*\*, 한 영한\*

\* 강원대학교 공과대학 환경공학과

\*\* 고려대학교 자연과학대학 환경공학과

## 1. 서론

본 연구에서는 댐 방류량에 의한 유입하천의 유량의 변화가 크고, 수심이 얕으며, 지형이 복잡하여, 하천형 호수인 팔당호의 특성에 적합하고 수치해석상 보다 발전된 유한요소법을 이용한 수질관리모형을 개발하기 위하여, 수질예측모형의 수질 및 수치이론을 해석하고, 정확도 및 적용성 여부를 판단하고, 모형의 우수성을 검증하기 위하여 기존 모형과 비교, 평가하였다.

## 2. 연구방법

### 2.1 상류 가중 유한요소법

본 연구에서 개발하는 수질관리모형(FEMWASP, Finite Element Model based upon WASP)에 적용될 지배식은 물질변환 및 오염 부하를 포함하는 다음의 물질이동식이다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C - \vec{V}\nabla C - kC + S$$

위의 식에 가중잔차식을 구성한 수, 부분적분과 가우스의 정리를 이용하여, 이차미분항이 없어지고, 유출경계조건과 결합한 후, 기저함수를 이용하여 이산화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum \sum \langle W_i, N_j \rangle \frac{\partial C_j}{\partial t} + \vec{V} \langle W_i, \nabla N_j \rangle C_j + D \langle \nabla W_i, \nabla N_j \rangle C_j \\ + k \langle W_i, N_j \rangle C_j - \langle W_i, N_j \rangle S_j = \int W_i D \nabla C \cdot \vec{n} \, dB \end{aligned}$$

여기서,  $N_j$ 는  $j$  절점에서의 기저함수,  $W_i$ 는  $i$  절점에서의 가중함수이다.

기저함수는 각 요소의 형상에 의해서만이 결정되므로 기저함수의 평가는 계산시간을 크게 감소시킬 수 있도록 요소행렬 평가 이전에 각 절점의 좌표 및 요소내 가우스점을 사용하여 계산되어야 한다. 요소 행렬을 이용하여 공간영역에 대하여 이산화된 식을 시간영역에 대한 도함수를 이산화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + \epsilon([EV] + [ED] + k[ET]) \right\} \{C^{n+1}\} \\ = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [ET] + (\epsilon-1)([EV] + [ED] + k[ET]) \right\} \{C^n\} - [ET]\{S\} + \{f\} \end{aligned}$$

본 알고리즘의 최종 행렬의 좌측행렬은 각 절점에서의 기저의 변수와 기저함수에 의해 평가되는 값으로 각각의 요소행렬별로 계산되어 떠행렬의 형태로 전체 행렬식에 조합된다. 또한 우측 부하벡터도 각각의 요소별로 평가된 이후에 부하벡터행렬로 조합된다. 따라서 우측행렬과 좌측행렬은 선형연립방정식이 되어 이 행렬식을 풀면 각 절점별 농도가 구해진다.

### 2.2 생화학적반응항 및 오염부하항의 선택적 모델링 기법

위의 유한요소식에서 생화학적 반응에 의한 변환항을 선택적으로 구성함으로써 모형의 계산 항목을 축소하거나 확대할 수 있다. 가장 간단한 수질관리모형으로써 BOD와 DO를 계산하기 위해서 이미 잘 알려진 Streeter-Phelps 모형을 적용할 수 있고, 이 모형에 질산화과정 및 부영양화과정을 더함으로써 모형은 여러 경우의 문제를 해석할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 WASP5 모형과 마찬가지로 본 모형에 선택적으로 4가지 경우를 계산할 수 있도록 하였다 (Streeter-Phelps 모형, 수정된 Streeter-Phelps 모형, 완전 선형 DO 평형 모형, 단순 부영양화 반응 모형).

이러한 능력을 평가하기 위하여 팔당호의 676개 절점에 대한 방대한 모델링을 수행하기 이전에, 검증에 사용된 41개 요소에 대한 간단한 문제에 대한 모델링을 수행하여 수질항목에 대한 비교를 하였다. 수질자료는 팔당호 실측 수질의 범위를 참고하였다. 3가지 경우에 대하여 모델링을 수행하였다. (Streeter-Phelps 모형, 완전선형 산소 평형 모형, 부영양화 모형)

비교 결과, 본 모형은 이러한 선택적 모델링에 대한 충분한 능력을 가지고 있는 것으로 나타

났다. 또한, 본 비교에서는 팔당호의 수계와 마찬가지로 유속이 비교적 강한 관계로 수질항목간 상호반응에 의한 영향은 미미하였다. 부영양화 과정은 수질항목별로 다음과 같이 반응속도상수와 오염부하속도를 정의하였다.

$$S_{K1} = k_{71}\theta_{71}^{T-20}X_{PRC}C_7 - G_{p1}P_{NBS}C_4a_{NC} - k_{12}\theta_{12}^{T-20}\left(\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}\right)C_1 + D_{p1}C_4a_{NC}(1 - f_{ON})$$

(질산화) (사멸)

$$K_1 = -k_{12}\theta_{12}^{T-20}\left(\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}\right), \quad S_1 = k_{71}\theta_{71}^{T-20}X_{PRC}C_7 - G_{p1}P_{NBS}C_4a_{NC} - D_{p1}C_4a_{NC}(1 - f_{ON})$$

$$S_{K2} = k_{71}\theta_{71}^{T-20}\left(\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}\right)C_1 + G_{p1}(1 - P_{NBS})C_4a_{NC} - k_{12}\theta_{12}^{T-20}\times\left(\frac{K_{NCS}}{K_{N3} + C_4}\right)C_2$$

(암모니아의 질산화) (식물성플랑크톤의 성장) (질소제한을 고려한 탈질화)

$$K_2 = -k_{2D}\theta_{2D}^{T-20}\left(\frac{K_{NCS}}{K_{N3} + C_4}\right), \quad S_2 = k_{71}\theta_{71}^{T-20}\left(\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}\right)C_1 - G_{p1}(1 - P_{NBS})C_4a_{NC}$$

$$S_{K3} = D_{p1}(1 - f_{op})C_4a_{PC} - K_{83}\theta_{83}^{T-20}X_{PRC}C_8 - G_{p1}C_4a_{PC}$$

(식물성플랑크톤의 사멸) (탄소제한을 고려한 무기인화) (성장)

$$X_{PRC} = \frac{C_4}{K_{mPC} + C_4} : \text{식물성 플랑크톤의 제한, } K_{mPC} = \text{반속도 상수}$$

$$S_3 = D_{p1}(1 - f_{op})C_4a_{PC} - K_{83}\theta_{83}^{T-20}X_{PRC}C_8 - G_{p1}C_4a_{PC}$$

$$S_{M4} = (G_{p1} - D_{p1} - \frac{V_{S1}}{D})C_4, \quad K_4 = (G_{p1} - D_{p1} - \frac{V_{S1}}{D})C_4$$

(성장) (사멸) (침전)

$$S_{K5} = k_{1d}C_4a_{oc} - k_d\theta_d^{T-20}C_5\frac{C_6}{K_{BOD} + C_6} - \frac{V_{S3}(1 - f_{DS})}{D}C_5 - \frac{5}{4}\frac{32}{14}k_{2D}\theta_D^{T-20}\frac{K_{NCS}}{K_{N3} + C_6}C_2$$

(플랑크톤 사멸) (탄소성 BOD의 산화)(고형 BOD 침전)(질소성 BOD의 감소)

$$K_5 = k_d\theta_d^{T-20}\frac{C_6}{K_{BOD} + C_6} + \frac{V_{S3}(1 - f_{DS})}{D}, \quad S_5 = k_{1d}C_4a_{oc} - \frac{5}{4}\frac{32}{14}k_{2D}\theta_D^{T-20}\frac{K_{NCS}}{K_{N3} + C_6}C_2$$

$$S_{K6} = k_2\theta_2^{T-20}(C_5 - C_6) - k_d\theta_d^{T-20}C_5\frac{C_6}{K_{BOD} + C_6} - \frac{64}{14}k_{12}\theta_{12}^{T-20}\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}C_1$$

(재포기) (산소제한을 고려한 탄소성 BOD의 분해) (산소제한을 고려한 질산화)

$$- \frac{32}{12}k_{ir}\theta_{ir}^{T-20}C_4 - \frac{SOD}{D}\theta_{is}^{T-20} + G_{p1}C_4\left(\frac{32}{14} + \frac{48}{14}\frac{14}{12}(1 - P_{NBS})\right)$$

(식물성플랑크톤의 호흡) (침전물 산소요구량) (식물성플랑크톤 성장)

$$K_6 = k_2\theta_2^{T-20}$$

$$S_6 = k_2\theta_2^{T-20}C_5 - k_d\theta_d^{T-20}C_5\frac{C_6}{K_{BOD} + C_6} - \frac{64}{14}k_{12}\theta_{12}^{T-20}\frac{C_6}{K_{NT} + C_6}C_1$$

$$- \frac{32}{12}k_{ir}\theta_{ir}^{T-20}C_4 - \frac{SOD}{D}\theta_{is}^{T-20} + G_{p1}C_4\left(\frac{32}{14} + \frac{48}{14}\frac{14}{12}(1 - P_{NBS})\right)$$

$$S_{K7} = D_{p1}C_4a_{NC}f_{ON} - k_{71}\theta_{71}^{T-20}X_{PRC}C_7 - \frac{V_{S4}(1 - f_{DN})}{D}C_7$$

(식물성플랑크톤의 사멸) (암모니아화) (침전)

$$K_7 = k_{71}\theta_{71}^{T-20}X_{PRC}C_7 - \frac{V_{S4}(1 - f_{DN})}{D}, \quad S_7 = D_{p1}C_4a_{NC}f_{ON}$$

$$S_{K8} = D_{p1}f_{op}C_4a_{PC} - k_{83}\theta_{83}^{T-20}X_{PRC}C_8 - \frac{V_{S3}}{D}(1 - f_{DS})C_8$$

$$K_8 = k_{83}\theta_{83}^{T-20}X_{PRC} - \frac{V_{S3}}{D}(1 - f_{DS}), \quad S_8 = D_{p1}f_{op}C_4a_{PC}$$

### 2.3 모형의 검증 및 적용

모형의 타당성을 검증하기 위하여 해석해가 존재하는 일차원 용존물질 이동문제에 대하여 여러가지의 유한요소기법(linear, quadratic, hermite, modified hermite FEM) 및 유한차분법(generalized finite difference method)을 활용한 일차원 모형과 본 모형의 계산결과를 비교하였다. 물질이동식의 수학적 해석에는 Boltzman 변환이나, Laplace 변환, 혹은 Fourier 급수를 사용하여 유도할 수 있다. 해석해는 error function을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{C(x,t) - C_0}{C_1 - C_0} = 0.5 \operatorname{erfc}\left[\frac{x - m}{2\sigma^{0.5}}\right]$$

여기서,  $m$ 은 표준분포함수에 있어서 1차 모멘트 즉 확률밀도함수의 평균점의 위치를 나타내고(=  $V_t$ ),  $\sigma$ 는 표준분포함수의 분산값(=  $(2D_t)^{0.5}$ )이다.

본 모형은 입력자료의 조건에 따라 선택적으로 모델링이 가능하므로 단순한 용질이동문제를 해석할 수 있었다. y방향에 대하여 물질이동이 없는 0 유출 경계조건을 사용하면, 이차원 요소를 사용하여 x 방향에 대한 일차원 문제를 해석할 수 있다.

물질이동 해석에 있어서 수치해석상의 오차와 진동은 유속에 의한 이동이 확산에 의한 이동보다 클 경우 많이 발생하게 된다. 본 모형의 이러한 문제에 대한 해석능력을 평가하기 위하여 유속에 의한 이동이 큰 경우(유속  $V=0.369\text{m/day}$ , 확산계수  $D=0.0001725\text{m}^2/\text{day}$ , 해석해), 확산에 의한 이동이 큰 경우(유속  $V=0.369\text{m/day}$ , 확산계수  $D=0.01725\text{m}^2/\text{day}$ ) 및 중간 경우(유속  $V=0.369\text{m/day}$ , 확산계수  $D=0.001725\text{m}^2/\text{day}$ )에 대하여 모델링을 한 결과, 이론해와 일치하는 결과를 얻을 수 있어서, 본 모형이 여러 물질이 상호 반응하는 비선형 문제에 있어서, 유동장이 급격한 경우에 해석 능력이 뛰어난 것을 입증할 수 있었다.

#### 2.4 모형의 예민도 분석

팔당호는 체류시간이 매우 작은 유동이 급격한 수체이기 때문에 반응계수에 의한 영향보다는 유속 및 확산에 의한 이동이 지배적이고, 점 및 비점오염원의 오염물질의 유입도 상수원 관리 측면에서 비교적 잘 관리되고 있기 때문에 북한강, 남한강, 경안천 등의 유입지류로부터의 경계 유입에 의한 영향이 지배적이다. 따라서, 본 모형을 팔당호에 적용하여 1991년도 수질에 대하여 보정하기 이전에, 이러한 파라미터에 대한 본 모형의 안정성 및 예민도를 분석하였다.

##### 1) 확산계수에 대한 모형의 예민도 분석

개발된 본 모형의 확산 및 유속의 비에 대한 모형의 해석능력은 가중계수(Weighting Factor)에 따라서 좌우되고, 적절한 가중계수의 선택이 매우 중요한 작업이다. 가중계수 0.5만 사용하였을 경우 유속에 의한 이동이 큰 경우에는 수치해가 진동하는 것을 알 수 있어, 적절한 가중계수의 선택이 필요하다고 판단된다.

##### 2) 모형의 시간 변동 자료에 대한 능력 평가

팔당호 수계는 북한강, 남한강 등의 유입지류의 유동장의 시간 변화 및 오염원의 년변화에 의한 자료의 시간적 변화가 심하다. 따라서, 팔당호 해석 모형은 이러한 시간적 변화에 대한 해석능력을 포함하여야 한다. 본 모형은 모든 입력 자료를 시간적 변화에 대하여 해석할 수 있도록 개발되었다. 이러한 능력을 평가하기 위하여 모형의 검증에 사용된 간단한 일차원 문제에 대하여 경계유입농도를 여러 시점에 대하여 변화하도록(팔당호의 계절별 수질변화의 양상과 흡사하도록) 입력자료를 구성하여, 모형 평가가능성을 높이기 위하여 부영양화 8개 항목에 대하여 모델링하였다. 결과는 최종 모델링 시간에 대하여 나타내었으며, 경계유입농도의 시간변화에 의한 영향이 break-through 곡선 형태로 잘 재현되고 있는 것을 알 수 있었다. 경계조건에 의한 시간별 변화에 의한 수치해석상의 불안정성은 나타나지 않았다.

#### 2.5 팔당호에 대한 개발 모형의 적용성 검토

팔당호에 대한 본 모형의 적용가능성을 검토하기 위하여 489개의 요소 및 676개의 절점수를 갖도록 <그림 1>과 같이 가변 사각형 유한요소망을 구성하였다. 각 격자망은 유한요소법을 사용하였기 때문에 임의의 사각형 모양이며, 격자마다 크기가 틀리나, 대개 가로방향(x 방향) 210m, 세로방향(y 방향) 150m의 크기를 가진다. 대상 유역은 북한강, 남한강, 경안천에 의한 경계유입농도의 영향을 고려하기 위하여 각 지류의 상당 부분을 포함하여 구성하였다. 격자망은 본 모형 개발시 같이 개발된 모형의 후처리 도시 시스템을 활용하여 나타낸 것이다. 이 도시 프로그램은 Fortran으로 개발되었기 때문에, 본 계산 프로그램과의 연계 운영능력이 뛰어나고, 확대 및 계산 결과의 수치나 등농도 곡선, 유속장 등을 나타낼 수 있는 능력을 가지고 있다.

모형에 사용된 파라미터는 <표 1>에 나타내었다. 대부분의 수질 파라미터는 WASP5 모형을 참조하여, 국내의 수질조사 현황과 비교하여 너무 복잡하지 않으면서 반응기작을 모두 포함할 수 있도록 수정하였다. 특히, 모형을 개발하기 위해서, 선택적 모델들의 논리적 확대 방법을 도출하여, 파라미터의 논리적 표현을 개발하여 입력자료의 용이성을 도모하였다. 요구 수질인자의 수를 결정하고, 주요 수질인자를 구하기 위하여 선택적 모델링 기법을 사용하여 점차적으로 복잡한 모형을 사용하여 모델링을 수행하였다. 모델링 시간은 일주일이었으며, 모델링 대상 시기는 1991년 하절기의 수질이 비교적 악화된 경우의 실측 수질을 바탕으로 입력자료를 구성하였다. 모델링 결과 모든 경우에 대하여 팔당호 실측 수질을 잘 재현하는 결과를 얻을 수 있었다.

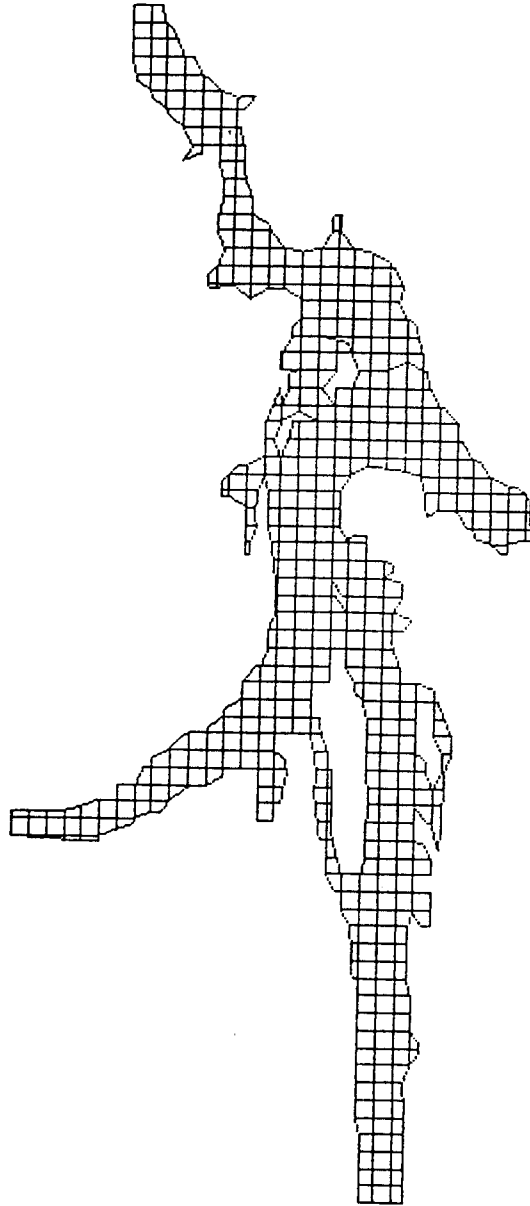
<표 1> FEMWASP 모형에 적용한 팔당호에 관련된 파라미터

Para	Value	Unit	Para	Value	Unit	para.	Value	Unit
vs3	Eq'n	m/day	3. Inorganic Phosphorus			7. Biochemical Oxygen Demand		
depth	5.0	m	rk0(i,6)	0.0	1/day	rko(i,1)	0.21-0.16	1/day
temp	25.0	℃	theta(i,6)	1.0		theta(i,1)	1.047	
vs4	Eq'n	m/day	fd(i,6)	0.75-0.80		fd(i,1)	0.5	
1. Phytoplankton			fop	0.5		aoc	32/12	mg O <sub>2</sub> /mg C
rk0(i,7)	Eq'n	1/day	4. Organic Nitrogen			kbod	0.5	mg O <sub>2</sub> /L
theta(i,7)	1.068		rko(i,2)	0.075	1/day	8. DO		
fd(i,7)		1/day	theta(i,2)	1.08		rko(i,8)	Eq'n	1/day
anc	0.1	mg N/mg C	fd(i,2)	1.0		theta(i,8)	1.028	
apc	0.025	mg P/mg C	fon	0.5		fd(i,8)	1.0	
k1c	2.0	1/day	5. Ammonia Nitrogen			thetas	1.0	
k1r	0.125	1/day	rko(i,3)	0.09-0.13	1/day			
xprc	0.25	mg N/mg C	theta(i,3)	1.08				
thtetac	1.068		fd(i,3)	1.0				
theta1r	1.045		pnh3	Eq'n				
gpl	0.1-0.5	1/day	6. Nitrate Nitrogen					
dpl	0.175	1/day	rko(i,4)	0.09	1/day			
2. Organic Phosphorus			theta(i,4)	1.045				
rk0(i,5)	0.22	1/day	fd(i,4)	1.0				
theta(i,5)	1.08		aon	22/14	mg O <sub>2</sub> /mg N			
fd(i,5)	1.0	1/day	knit	2.0	mg O <sub>2</sub> /L			
kmpc	1.0	mg C/L	kno3	0.1	mg O <sub>2</sub> /L			

### 3. 결론

본 모형의 팔당호의 적용 타당성 및 현재 상태의 팔당호 수계의 특성 및 경안천 인접 유역의 퇴적물 용출 현상을 규명하기 위하여, 1991년도 수질항목중 T-P를 중심으로 Chl-a, T-N, BOD, DO 등의 수질을 재현할 수 있도록 모델링 파라미터를 조절하였다. 기존의 모델링 결과와 비교하기 위하여 1991년 7월 하절기 실측 수질 및 WASP5 모형의 결과와 비교하였다.

모델링 요구 시간을 구하기 위하여, 팔당호 체류시간에 기초하여 3일, 5일, 7일 모델링한 결과 5일이 제일 좋은 결과를 나타내었다. 실측 지점의 수가 모델링 격자망에 비하여 매우 적으나, 팔당호 수질의 공간적인 변화가 경안천 유역을 제외하고는 변화가 심하지 않은 점을 고려하면, 실측 지점 부근의 격자망은 이 수질을 나타낼 것으로 판단된다. 따라서, 모델링 결과 등농도 곡선 도로부터 읽은 수질과 실측수질과를 비교하면 BOD, T-N, T-P, Chl-a, DO 등의 항목에 대하여 경안천 인접 부근을 제외한 전 지점에 대하여 매우 좋은 재현성을 나타내고 있는 것을 알 수 있다. 모델링 결과 경안천 인접 부근을 제외한 팔당호 수체의 대부분의 수질은 북한강 및 남한강으로 부터의 유입 농도에 좌우되는 것으로 나타났으며, 팔당호내의 수질항목간의 부영양화 반응기작에 의한 공간적인 수질 변화는 미미한 것으로 판단된다. 이러한 현상에 대한 이유는 유입 유동장이 강하기 때문에, 주요 오염 기작이 유입 오염원인 것으로 추정되고, 체류시간이 적은 관제로 수체내에서 반응에 의한 오염현상이 심화될 수 있는 기회가 적기 때문이다. 그러나, 영양염류가 수질을 결정하는 중요한 요소이므로, 공간적인 반응기작의 변화가 적다하여도, 모델링은 반드시 이러한 영양염류를 포함하는 부영양화 모형을 사용하여야 한다. 경안천 인접 유역도 경안천 유역으로 부터의 유입농도가 지배적인 영향을 미치지만, 과거의 오염이 축적된 영향에 의한, 퇴적물에 의한 오염 및 현재 악화된 수질에 의한 영향도 고려하여야 할 것이다. 본 모형은 T-N, T-P, Chl-a에 대한 현재의 농도를 잘 재현하고 있으므로, 팔당호의 부영양 정도를 판정하는 데 있어서 본 모델링의 결과를 직접 이용하면, 팔당호는 이미 부영양화된 상태이며, 특히 경안천 유역은 팔당호 유동장의 특성 때문에 수질이 매우 악화될 것으로 생각된다.



<그림 1> FEMWASP 모형에 적용한 필당호의 유한 요소망  
(Finite Element Grids of FEMWASP for Lake Paldang)