

Chaos에 의한 강우자료의 Fractal Dimension 결정

유병찬*, 안경수**, 최계운**

1. 서론

지금까지 아주 복잡해 보이는 자연현상일지라도 그 현상속에 숨겨져있는 근본원리를 파악하고 그에 대한 수학적인 해석을 실시 하므로써 자연현상을 예측하려고 시도하여 왔었다. 그러나, 자연 현상이 복잡해지면 복잡해 질수록 비선형항을 포함하는 방정식들은 반복계산해야하는 양이 많았기 때문에 해석에 상당한 시간을 소비할수 밖에 없었다. 이와같은 문제를 해결하기 위한 시도로 Chaos이론이란 새로운 개념이 사용되기 시작하였다. Chaos이론은 어떤 시스템속에서 쉽게 예측할수 없는 복잡성속에 있지만 chaos동력계에서는 그 계만이 가지고 있는 규칙성(order)을 찾아낼수 있으며 이와 같이 찾아낸 규칙성을 다른 계에 응용하고자 시도하는 이론으로 추계학적이라기 보다는 확정론적으로 해를 구하는 과정이다. 이러한 chaos이론의 본격적인 연구는 Mandelbrot (1982)에 의해 fractal dimension이 소개되면서 부터이다. 이와 같은 이론이 수자원에 적용되기 시작한것은 1900년대 중반이후이며 유역내에서 하천형태학분야, 강수현상이나 기후변화분야, 다공매질분야, 유출분야등에 주로 적용하려는 시도가 이루어져 왔다. 하천형태학 분야에서는 La Brabera 와 Rosso(1987, 1989), Talboton 등(1988), Feder(1988) 등이 Cantor's Set 또는 Sirpinsky's carpet 등의 이론을 이용하여 유역형태 해석을 시도하였으며, Rosso(1991)는 면적비(area ratio)와 유로길이의 비(stream & length ratio)에 의하여 fractal dimension을 구하였다. 강수현상에 대한 적용으로는 Gabriel 등(1988)이 인공위성 영상자료에서, Kurths 등(1987)이 관측된 태양복사파동에서 attractor에 대한 연구를 수행하였으며, Rodriguez 등(1989)은 강우자료에서, Sharifi 와 Georgakakos(1989)는 폭우에서 단시간에 발생하는 attractor에 관하여 연구하였다. 다공매질에서의 적용부분에 있어서는 Jacquin 등(1987)은 토립자의 공극에서, Krohn(1988)은 몇 종류의 다공매질에서 fractal dimension을 구하였으며, 유출부분에서는 Wilcox 등(1991)이 24년간의 일용설 유출자

* 인천대학교 토목공학과 석사과정

** 인천대학교 토목공학과 교수

료를 이용하여 유출현상이 갖는 한정된 차원을 구하려는 시도가 있었지만 수문학 분야중에서 가장 중요한 분야임에도 불구하고 실제 적용사례가 드문편이다. 국내의 경우 chaos에 관한 연구는 상당히 드물고 초보적인 단계에 머물고 있는 실정이며, 이 중에서 김형수와 윤용남(1994)은 짐작성 유사의 응집과 응결과정을 모의하고 fractal dimension에 관하여 연구하였으며, 이제수(1994)는 물수지 방정식에 대한 chaos적 특성에 관하여 연구하였다. 또한, 조원철과 서규우(1994)는 chaos 이론의 수문학 적용을 위한 기본이론 소개와 아울러 연구동향을 소개하였다. 선우중호와 이두환(1994)은 시계열 자료를 분석하여 유량자료의 카오스적 성질을 분석하고 기존의 자료를 이용하여 fractal dimension을 계산하였다. 본 논문에서는 비선형적이고 비주기적인 형태인 강우자료를 이용하여 fractal dimension을 구하는 것을 그 목적으로 하고 있으며 추후 강우예측 모형과의 연관관계 정립을 위한 기초자료로 이용하고자 한다.

2. Chaos 이론과 Fractal Dimension

2.1 Chaos 이론

복잡한 자연현상 해석을 위하여 비선형 해석방법 보다는 선형해석 방법이 많이 사용되어져 왔다. 그러나, 점차 정확하고 신뢰성 있는 해결 결과를 요구하게 되었고 이에따라 그동안 무시되었던 인자들을 다시 고려하고 자연현상의 복잡성 자체를 그대로 이해하려는 시도가 이루어지게 되었다. Chaos란 기존에 우리가 사용하여 왔던 방정식에서 무시해 왔던 부분들이 실제로는 무시하고 없어야 하는 잡음으로서가 아니라 그러한 무시되었던 부분이 그 현상을 더욱 잘 반영할 수 있는 특성이 된다는 인식으로부터 시작되었다. 즉, 그동안 예측을 불가능하게 했던 자연현상에서도 극히 단순한 수학방정식으로 자연의 동력학계의 현상을 제대로 모형화할 수 있다는 것을 서서히 인식하면서 chaos에 대한 관심이 급증되었다.

2.2 위상공간

유클리데스 기하학에서의 공간은 3개의 자유도를 갖는 공간만을 포함한다. 하지만 위상기하학에서는 자유도의 수는 무한이며 어떤 자유도는 정수차원이 아닌 실수형태를 갖기도 한다. 위상공간은 정수차원으로 구성된 실공간을 포함하는 실수의 차원형태를 가지는 공간을 의미한다. 위상공간상에서의 기하학은 실공간에서의 유클리데스 기하학을 포함하고 있으며 정수차원으로 표현할수 없는 실수형태의 자유도를 가지는 사상을 형성시킬수 있다. 위상공간은 수학자 리만에 의해 처음으로 공간의 표현을 (-)의 곡률을 가지는 곡률계수로서 표현한 것을 시점으로 여러 수학자들에 의해 실공간에서 상상할 수 없는 여러가지 공간적 개념을 정립하였다. 이러한 실공간을 포함하는 모든종류의 공간을 위상공간이라 한다.

2.3 Time delay embedding method

강우사상처럼 시간의 규모에 종속되어 각각의 Scalar양을 가지는 자연현상은 거리의 형태로만 표현되는 기하학으로는 해석하기 곤란하다. 그렇기 때문에 이러한 시계열 자료는 자료구성의 형태적 변형을 통하여 각각의 자료를 기하학의 형태로 바꾸어야 할 필요가 있다. 그러한 방법으로 "Time delay embedding method"라는 방법을 사용한다. 이 방법은 단순시계열자료를 위상공간으로 재구성하는 방법으로 Packard(1980)에 의해 제안되었으며 Takens(1981)에 의해 확고한 수학적 기초를 만들었다. Time delay embedding method의 일반식은 다음과 같다.

$$Y_i = \{x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}\} \quad (1)$$

여기서 τ 는 적절한 지연시간을 의미하며 Takens(1981)의 embedding 이론에 의하면 어느차원에 있는 attractor는 동력계의 특징으로 평가되는 $(m-1)$ 차원의 위상공간으로 구현할 수 있다. 이때 지연시간 τ 는 신중하며 적절한 선택을 하여야 한다. 만일 τ 가 지나치게 작다면 독립적이지 못하고 attractor구조의 특징과 정보의 손실이 생기게 된다. 만일 τ 가 크면 상태벡터사이의 상관이 존재하지 않게 되어 실제 계에서 일어나는 정보의 손실을 가져오게 하는 동기가 된다. τ 는 일반적으로 자기상관함수 또는 상호정보를 이용하여 선정할 수 있다.

2.4 Correlation Integral 과 Fractal Dimension

위상공간에서의 도형을 fractal 도형이라한다. Fractal은 1982년 미국에서 처음 Mandelbrot에 의해 소개되었고 대표적인 fractal 도형으로는 Koch곡선, Lorenz attractor, Peano 곡선등이 있다. Fractal 도형은 기존의 도형의 개념과는 달리 스스로의 변화에 의하여 "자기유사성"과 "자기복잡성"을 가진다. 이러한 fractal 도형은 변화의 횟수가 무한으로 접근하고, scale 규모를 달리하여도 동일한 복잡성을 나타낸다. 자연계에는 많은 형태의 fractal 도형들이 존재한다. Fractal도형은 자기복잡성 및 자기유사성을 하나의 차원으로 표현할 수 있으며 이러한 차원을 fractal dimension이라한다. fractal dimension을 계산하는 방법으로는 Mandelbrot에 의한 일반적인 fractal 도형의 차원인 hausdorff dimension을 계산하는 방법이 있고, 도형화되지 않은 자료들의 차원을 계산하기 위한 방법으로는 generalized dimension 계산방법과 Grassberger 와 Procaccia(1983)에 의한 correlation dimension 계산방법이 있다. 이중 generalized dimension과 correlation dimension은 time delay embedding method에 의해 재구성된 시계열의 해석에 사용된다.

Correlation Integral은 위상공간상에서 쿼적을따라 존재하는 각각의 점에서 일정거리에 의해 생성시킨 구(球) 속에 포함되는 점의 갯수를 표준화시킨 값이며 그 계산식은 다음과 같다.

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N H(r - \|Y_i - Y_j\|), \quad i \neq j \quad (2)$$

여기에서,

H : Heaviside step function

N : 모든점의 갯수

$\| Y_i - Y_j \|$: Norm (구역)

이와 같은 correlation integral 은 추계학적 과정과 결정론적 계를 구별할수 있는 척도로 사용되며 위상공간이 2 차원이면 $C(r)$ 이 r^2 에 비례하고, 3차원이면 $C(r)$ 이 r^3 에 비례한다. 이와 같은 성질은 위상공간에서는 r^v 로 표현할수 있다. 그러나, 위상공간의 차원이 어느 이상이되면 무한히 비례하지는 않고 v 의 값이 더이상 커지지 않으며 이와 같은 값은 $\ln r$ 과 $\ln C(r)$ 과의 그래프상에서 구할수 있다. 이와 같은 correlation integral을 이용하여 구한 값 v 를 fractal dimension이라한다.

3. Fractal Dimension의 결정

본 연구에서는 모의지역의 일자로 1000개를 사용하여 fractal dimension을 계산하였다. τ 에 의해 지연된 각각의 위상공간에서 계산된 correlation integral 과 위상공간상에서의 반지름 r 에 각각 자연 log를 취하여 구한 관계는 그림 1과 같이 나타난다. 이때 그림 1에서 m 은 각각의 위상공간을 나타내며 이때의 기울기는 각각의 fractal dimension을 의미한다. 그림 2는 그림 1과 같은 correlation integral에 의하여 계산된 fractal dimension을 위상공간 차원에 따라 표현한 값을 보여 주고 있다.

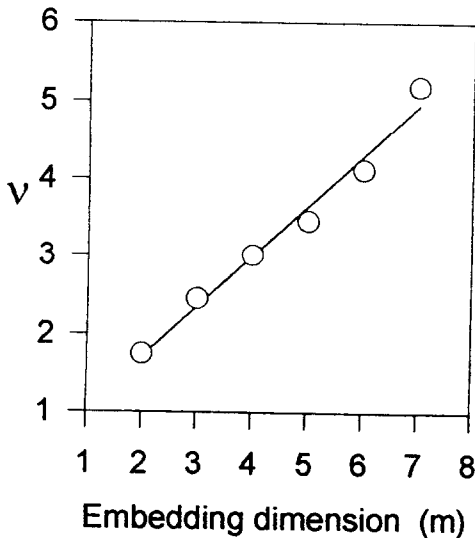


그림 1 위상공간 구성에 따른 correlation integral

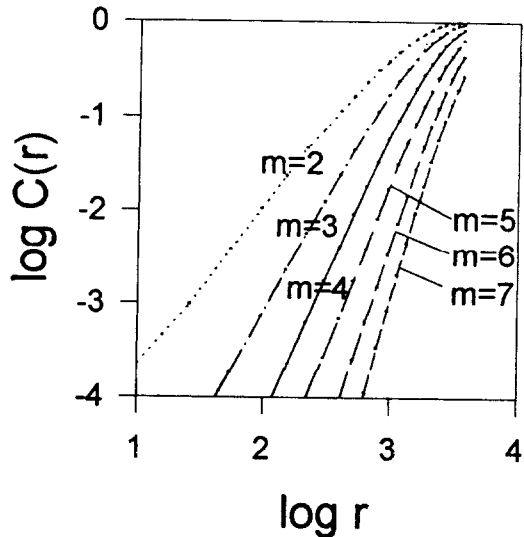


그림 2 위상공간 구성에 따른 fractal dimension

4. 결론

기상학자 Lorenz(1963)가 대류에 관한 모형에서 attractor를 발견한이후 연구자들에 의해 chaos이론을 연구하고 자연현상의 chaotic한 정도를 계산하기 시작하였다. 그후 각 분야에서 본격적인 Chaos에 대한 연구가 시작되었으며 수문학의 여러분야에도 적용하게 되었다. 본 논문에서는 correlation integral을 사용하여 모의지역의 강우자료에 대한 fractal dimension을 계산하였다. 이때 chaos 위상공간 구성을 위하여는 2차원부터 7차원의 위상공간이 이용되었으며 스칼라양인 강우자료를 위상공간에 표현하기위하여 time delay embedding method를 사용하였다. 계산된 fractal dimension은 제시된 2개의 그림에서 보여지고 있으며 이와같이 계산된 fractal dimension은 적절한 차원의 강우예측모형의 선정등에 기초자료로 크게 도움이 될것으로 사료된다.

참고문헌

- 1 Feder, J., (1988), Fractals, New York.
- 2 Gabriel, P., Lovejoy, S., Schertzer, D., and Austin, G. L., (1988), "Multifractal Analysis of Resolution Dependence in Satellite Imagery", Geophys. Res. Lett, 15, pp. 1373~1376.
- 3 Geoffrey, H.(1981), "Fractal Enhancement of Cartographic Line Detail", The American Cartographer vol. 8, pp. 23-40.
- 4 Grassberger, P. and Procaccia, I.(1983), "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica 9D, pp.189-208.
- 5 Hediger, A.P.T. and Gollub, M.(1989), "Fractal Dimension and Local Intrinsic Dimension", Physical Review (A), pp. 3640-3645.
- 6 Jacquin, C. G., and Alder, P. M., (1987), "Fractal Porous Media, II, Geometry of Porous Geological Structures", Trans, Porous Media, 2, pp. 571~596.
- 7 Krohn, C. E. (1988), "Fractal Measurements of Sandstones, Shales, and Carbonates", J. Geophys. Res., 93(B4), pp. 3286~3296.
- 8 Kurths, J. and Herzog, H.(1987), "An Attractor in a Solar Time Series", Physica 25D , pp. 165-172.
- 9 LaBarbera, P., and Rosso, R., (1987), "The fractal geometry of river networks", EOS Trans.AGU, Vo. 68(44), p1276.
10. LaBarbera, P., and Rosso, R., 1989, "On the fractal dimension of stream networks", WRR, Vol.25,

No. 4, pp. 735-741.

- 11 Mandelbrot, B. B., 1982, *The fractal geometry of nature*, Freeman, Cooper, San Francisco, Ca, p461.
- Sharifi, M.B. and Georgakakos, K.P.(1989), "Chaos in Rainfall", WRR, pp. 1667-1675.
- 12 Rodriguez-Iturbe, I., de Power, B. F., Sharifi, M., and Georgakakos, K. P., 1989, "Chaos in Rainfall", WRR, Vol.25, No.7, pp. 1667~1675.
- 13 Rosso, R., Bacchi, R., and La Barbera, P., 1991, "Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks, WRR, Vol.27, No.3, pp. 14~17.
- 14 Tonis, A.A. and Elsner, J.B.(1988), "The Weather Attractor Over Very Short Timescales", Nature vol. 333. pp. 545-547.
- 15 Warren, C. (1991), "Turbulent Combustion Data Analysis Using Fractals", AIAA Journal, pp. 409-417.
- 16 Wilcox, B. P., Seyfried, M. S., and Matison, T. H., 1991, "Searching for chaotic dynamics in snowmelt runoff", WRR, Vol. 27, No.6, pp. 1005~1010.
- 17 Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A.,(1985), " Determining Lyapunov Exponent from a Time Series", Physica 16D, pp. 285-317.
- 18 김형수,윤용남, "모의유사의 쪽거리 차원", 한국수문학회지, 1994.9, pp. 115~121.
- 19 선우중호, 이두환, "카오스 이론을 이용한 시계열 자료의 분석 및 예측", (1994)94년대한토목학회 논문집(II), pp. 225~228.
- 20 이계수, "물수지 방정식의 카오스적 분석", 한국수문학회지, 1994.9, pp. 45~54.
- 21 조원철, 서규우,(1994) "Chaos Theory(혼돈이론)의 수문학에의 적용", Vol.27, No.1, pp. 20~32.