韓國精密工學會 '95年度 春季學術大會論文集 pp.256~261

유연링크 로봇의 특이섭동 모델 최적 제어

한 기 봉* (부산대 대학원) 이 시 복(부산대 기계설계공학과)

Abstract

To improve the performance of the robots they must be built ever lighter, which will lead to flexibility of the links. The full order of the flexible link manipulator dynamic system does not allow the determination of a feedback linearization control as for flexible link manipulator regard low mode.

In this paper, this drawback is overcome by LQG/LTR controller which is designed by a corrected reduced model based on the singular perturbation method.

1. 서 론

고기능, 고속, 고정밀를 추구하는 현 생산 시스템에 로보트의 활용 범위를 확대시키려면 로보트 운동의 정확성, 고속성, 안정성을 더욱 연구 개선 해야 한다. 매니퓰레이터 고속 운동에 대한 정확성을 유지하기 위해서는 여러 가지 동적 특성들을 고려하여야 한다.

최근 유연 링크 매니퓰레이터의 제어에 관한 많은 연구가 진행되고 있다.[1] 링크를 강체와 같이 제작하려면 큰 강성을 얻기 위해서 무게가 커지게 되고, 작동하는데 많은 동력이 소요되며, 또한 동작이 느려지게 된다. 이런 단점들을 보완하기 위해서 링크를 경량화 할 필요가 있다. 그러나 경량화된 링크 매니퓰레이터는 고속으로 작동하는 동안 굽힘 변형으로 인한 링크의 진동 때문에 기존의 강체 매니퓰레이터보다 복잡한 동적 특성을 갖는다. 또한 유연 링크 매니퓰레이터는 분포 파라미터계로서 구동점에 적당한 토크를 가하여 끝단의 운동을 제어하는 데는 많은 어려움이 있다. 이런 문제점들을 해결 하기 위하여 유연 링크 모델링 및 전달함수에 관한 연구가 진행 중이고,[1],[2] 구동기와 측정 위치가 동일하지 않은 유연 링크 매니퓰레이터의 궤적을 제어하기 위해서 시간역에서 역 동역학을 이용하는 기법과[3] 과 최적 제어 기법을 이용한 LQG/LTR방법에[4],[5] 이르기까지 제어 성능을 향상시키기 위해 연구 중이다. 그러나 기존 방법은 연속계에서 고차항 모드를 보상하지 않고 저차항 모드만을 이용하여 제어기를 구성함으로써 제어기의 안정성과 성능면에서 문제가 된다.

본 연구에서는 유연 링크의 모델에 특이 섭동이론을 도입하여 시스템내의 변수들을 빠른 시간 척도및 느린 시간 척도로 구분하였다.[6],[7],[8] 느린 시간 척도에 고차 모드 효과를 가진 빠른 시간 척도인 섭동매개변수를 포함시켜 수정된 저차 모델을 구하였다. 여기서 느린 부분 시스템의 상태는 관절 각도와 유연 링크의 1차 모드이고, 빠른 부분 시스템의 상태는 2차와 3차 모드이다. 그 이상 고차 모드는 너무 높기 때문에 무시하였다. 그리고 1차 모드까지 고려한 매니퓰레이터와 수정된 저차 모델 각각에 대해 모델링 오차를 비교하였고, 이들 시스템을 대상으로 LQG/LTR 제어기를 설계하여 성능을 평가하였다.

2. 동역학적 모델링및 수정된 저차모델

그림. 1은 탄성적 거동을 고려하여 1관절 유연링크 매니퓰레를 모델링 하였다. 이 시스템의 입력은 암관절 O에서 서보 모터에 의해서 발생되는 토크이고, 출력 값은 관절각도 θ 와 매니퓰레이터의 끝점의 처짐 w(t)이다.

본 연구에서는 Lagrange 방정식을 이용하여 탄성적 동특성을 포함한 유연링크 매니퓰레이터의 운동방정식을 유도한다. 감쇠에 의한 소실 에너지를 d 라고 하면 운동방정식은 다음 식에 의해서 유도된다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = Q_i - \frac{\partial d}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1)$$

여기서, Q_i는 일반좌표계에 대한 일반 힘을 나타내며 가상일의 원리에 의해서 구해진다. 링크의 임의의 x위치를 $\vec{R}(x,t)$라 하면 다음과 같다.

$$\vec{R}(x,t) = (x\cos\theta - w\sin\theta)\vec{i} + (x\sin\theta + w\cos\theta)\vec{j} \qquad (2)$$

$\vec{R}(x,t)$의 속도는

$$\dot{\vec{R}}(x,t) = (-x\dot{\theta}\sin\theta - \dot{w}\sin - w\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + (x\dot{\theta}\cos\theta + \dot{w}\cos\theta - w\dot{\theta}\sin\theta')\vec{j} \quad (3)$$

와 같다.

여기서, w(t)는 위치와 시간의 함수로 나타내고, 이 방정식을 풀기 위해서 보의 탄성과 경계 값을 고려하여야 한다. 경계조건은 한쪽 단을 고정하고, 다른 한쪽을 자유단으로 하는 외팔보로 가정하였다.[9] 탄성적 거동의 운동방정식의 해는 $\phi(x)$인 형태함수(shape function)와 q(t)인 시간에 따라 변하는 모드의 진폭으로 구성된다. w(x,t) 는 다음과 같다.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\phi_i(x) \quad (4)$$

운동에너지를 T, 위치에너지를 V라 하면 운동 에너지와 위치 에너지는 아래와 같이 유도된다.

$$T = \frac{1}{2} I_h + \frac{1}{2}\rho\int_0^l \vec{R}(x,t)\cdot\vec{R}(x,t)dx + \frac{1}{2} m_p \vec{R}(l,t)\cdot\vec{R}(l,t) \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2} EI\int_0^l [\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}]^2 dx \quad (6)$$

여기서 링크의 강성은 EI이고, 이때 유연링크 매니퓰레이터의 x지점의 처짐 w(x,t) 는 작다고 가정하고 중력의 영향은 무시했다.

매니퓰레이터의 운동방정식을 구하기 위해서 링크에 저장된 위치에너지와 운동에너지를 이용하여 Lagrangian L을 나타내면 다음과 같다.

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_h + \frac{1}{2}\rho\int_0^l \vec{R}(x,t)\cdot\vec{R}(x,t)dx + \frac{1}{2} m_p \vec{R}(l,t)\cdot\vec{R}(l,t) - \frac{1}{2} EI\int_0^l [\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}]^2 dx \quad (7)$$

손실 d는 모터의 감쇠 D 와 링크에 분포되어 있는 감쇠비 ζ의 함수이다. Lagrnagian L과 각각의 감쇠에 의한 소실된 총에너지 d를 이용하여 방정식을 구한다. 유연링크 매니퓰레이터의 운동방정식은 아래와 같다.

$$(I_h + \rho\int_0^l x^2 dx + m_p l^2)\ddot{\theta} + (\rho\int_0^l x\phi_{1(x)}dx + m_p l\phi_1(l))\ddot{\theta} + (\rho\int_0^l \phi_1^2(x)dx + m_p\phi_1^2(l))\ddot{q}_1 + EI\int_0^l [\frac{(\partial\phi_1(x)}{\partial x^2}]^2 dx \cdot q_1 = 0$$

$$(\rho\int_0^l x\phi_2(x)dx + m_p l\phi_2(l))\ddot{\theta} + (\rho\int_0^l \phi_2^2(x)dx + m_p\phi_2^2(l))\ddot{q}_2 + EI\int_0^l [\frac{(\partial\phi_2(x)}{\partial x^2}]^2 dx \cdot q_2 = 0$$

$$(\rho\int_0^l x\phi_3(x)dx + m_p l\phi_3(l))\ddot{\theta} + (\rho\int_0^l \phi_2^2(x)dx + m_p\phi_3^2(l))\ddot{q}_3 + EI\int_0^l [\frac{(\partial\phi_3(x)}{\partial x^2}]^2 dx \cdot q_3 = 0 \quad (8)$$

식 (8)을 간단히 나타내면 다음과 같다.

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = T \quad (9)$$

식(9)를 상태방정식으로 표현하면

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \ddot{X}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I_n\\ -M^{-1}K & -M^{-1}C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ \dot{X}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ M^{-1}\end{bmatrix} u \quad (10)$$

과 같다.

식 (10)의 상태방정식은 다음과 같이 두개의 시간척도로 표현된다.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u \quad (11)$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u \quad (12)$$

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (13)$$

여기서 x_1과 x_2는 다음과 같다.

$$x_1 = [\theta \quad \dot{\theta} \quad q_1 \quad \dot{q_1}]^T$$

$$x_2 = [q_2 \quad \dot{q_2} \quad q_3 \quad \dot{q_3}]^T$$

특이 섭동 이론에 입각하여 수정된 저차 모델을 구성하기 위해서 식(11),(12)은 다음 조건을 만족해야 한다.[6][7]

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

$$det[A_{22}] \neq 0 \quad (14)$$

$\varepsilon = 0$ 로 놓으면 식(12)은 다음과 같다.

$$x_2 = -A_{22}A_{21}x_1 - A_{22}B_2u \quad (15)$$

식(15)을 식(11),(12)에 대입하면 다음과 같은 수정된 저차 모델이 된다.

$$\dot{x}_s = A_o x_s + B_o u_s \quad x_s(t_o) = x_1^o$$

$$y_s = M_o x_s + N_o u_s \quad (16)$$

여기서 A_o, B_o, M_o, N_o는 다음과 같다.

$$A_o = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$B_o = B_1 - A_{22}^{-1}B_2 \qquad M_o = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$N_o = -C_2A_{22}^{-1}B_2$$

3. LQG/LTR 제어기 설계

LQG/LTR 보상기의 구조는 모델기준 보상기(model based compensator:MBC)의 구조와 같다. 그림. 2에서 MBC는 두개의 피드백 루프를 가진 실제플랜트 모델의 복사된 구조로 이루어졌다. 두개의 피드백 루프는 각각 이득행렬 G 와 H를 포함하고 있고 행렬 G와 H는 MBC의 설계변수로서 요구되는 시스템의 강인성을 고려하여 선정한다. MBC구조는 고유값의 분리특성을 가지고있다. 그러므로 LQG/LTR보상기 설계시 설계변수 H와 G를 분리해서 선정할 수 있다. LQG/LTR 에서 루프전달회복을 위해 LQR 제어칙을 사용하기 때문에 LQR에 대한 제어 방법을 먼저 고찰한다.

3.1 LQR 설계방식에 의한 제어

LQR 설계에 필요한 성능지수 J 는 다음과 같다

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (y_s^T y_s + u_s^T R u_s)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_s^T M_o^T M_o x_s + 2u_s^T N_o^T x_s + u_s^T R_o u_s)\,dt \quad (17)$$

이다.

여기서 R_o는 다음과 같다.

$$R_o = R + N_o^T N_o$$

성능지수를 최소화 할 수 있는 LQ제어 법칙은 다음과 같다.

$$u_s = -G x_s \quad (18)$$

여기서, 제어계인 G는

$$G = R_o^{-1}(N_o^T M_o + B_o^T K_s) \quad (19)$$

이고, K_s는 다음의 제어대수 리카티식의 해이다.

$$0 = K_s(A_o - B_o R_o^{-1}N_O^T M_o) + (A_o - B_o R_o^{-1}N_O^T M_o)^T$$

$$K_s - K_s B_o R_o^{-1} B_o^T K_s + M_o^T(I - N_o R_o^{-1}N_o^T)M_o \quad (20)$$

3.2 목표필터 설계

목표필터 루프설계는 가상적인 외란과 센서잡음을 고려하고 주파수역 등가를 이용하여 필터 계인 행렬 H를 선정한다. 상태 공간 모델 식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_s(t) = A_o x_s(t) + B_o u_s(t) + L\zeta(t)$$

$$y_s(t) = M_o x_s(t) + \theta(t) \quad (21)$$

여기서 $\zeta(t)$와 $\theta(t)$는 각각 강도가 I 와 μI인 0 평균 백색잡음 벡터이다. 설계행렬 H를 선정하기 위하여 가상적인 측정 잡음에 대한 칼만 필터링 문제를 해결해야 한다. 필터 이득행렬 H는 다음과 같이 표현된다.

$$H = PM_o/\mu \quad (22)$$

여기서 P는 다음 필터대수 리카티식에서 구한다.

$$A_s P + PA_s^T + LL - PM_oM_oP/\mu = 0 \quad (23)$$

설계파라미터 μ 는 요구되는 교차주파수를 만족하도록 선정한다.

L은 설계플랜트가 비 최소위상을 가지고 있기 때문에 다음과 같은 방법에 의하여 선정하였다. 설계 파라미터 L은 (4 ×1) 벡터로서 4개의 요소가 4개의 독립적인 설계 파라미터가 된다. 이 설계 파라미터 L을 선정하기 위하여 필터 개루프 전달함수 $G_{FOL}(s)$에 대하여 생각하기로 한다.

$$G_{FOL}(s) = M_o(sI + A_o)L \quad (24)$$

연속적으로 L의 각요소를 1로 하고 나머지 요소는 0으로하여 4개의 필터 개루프 전달함수를 구한다. 이 4개의 필터 개루프 전달함수의 영점다항식은 영점다항식을 얻기 위하여 선형결합을 할 수 있는 영점다항식의 요소가 된다. 이 성분 영점다항식의 계수를 이용함으로써, 다음과 같이 설계 파라미터 L를 선정할 수 있는 선형 방정식을 만들 수 있다.

$$Z_c L = z_d \quad (25)$$

여기서 Z_c는 전달함수의 성분 영점다항식의 계수가 열 벡터 요소가 되는 (4×4) 행렬이다. 식(21)에서 해 L이 유일하게 존재하기 위해서 $\mathrm{rank}(Z_c) = 4$ 이어야 한다. 이 때 설계 파라미터 L은 다음과 같이 선정된다.[10]

$$L = Z_c^{-1} z_d \quad (26)$$

3.3 루프 전달 회복

루프 전달 회복 단계는 보상된 플랜트의 전달함수를 목표필터 루프로 회복시키는 단계이다. LTR를 시도하기 위해서는 LQR분석을 이용한다. 설계행렬 G를 선정하기 위해 식

(19)을 풀어야한다. 반복에 의해 TFL로 잘 회복할 수 있는 $R = \rho I$ 에서 상수값 ρ을 선정한다.

4. 시뮬레이션 결과 및 고찰

특이 섭동이론에 입각하여 수정된 저차 모델과 1차모드만을 고려한 유연링크 매니퓰레이터 모델을 대상으로 각각 설계된 LQG/LTR 제어기의 성능을 평가하기 위하여, 3차모드까지 고려한 단일 유연링크 매니퓰레이터 모델 식을 이용하여 모델링오차에 대한 안정도-강인성과 성능을 비교하였다.

표1 은 시뮬레이션에 사용된 유연링크 매니퓰레이터의 시스템 매개변수를 나타내고 있다. 유연링크 매니퓰레이터의 1차, 2차, 3차모드값들은 각각 36.5rad/sec, 158 rad/sec, 446 rad/sec 이다.

제어기 설계시 교차주파수는 10rad/sec로 동일하게 하여고, 설계변수가 되는 L은 설계상 어려움 점을 감안해서 영점 다항식을 이용하여 구해진다. 그리고 루프전달회복을 위하여 가중치 ρ를 0.01 동일하게 하였다. 그림 3은 저차모델에 의해 설계된 제어기의 목표필터루프와 LQG/LTR루프의 bode선도를 나타낸다.

그림. 4는 유연링크 매니퓰레이터의 전달함수의 크기를 나타내고 있다. 1차 모드만을 고려한 모델에서는 1차 고유진동 주파수 부근에서 오차가 4 db정도 나타나고, 수정된 저차모델에서는 오차가 미소함을 알 수 있다.

그림 5와 그림 6는 수정된 저차모델과 1차모드만을 고려한 모델이 모델링 오차에 의한 제어기의 안정도-강인성을 보여준다. 각각은 LQG/LTR제어기 특성에 의해서 강인함을 나타낸다.

그림 7과 8은 1차모드 만을 고려한 제어기와 수정된 저차모델에 대한 제어기의 시간역 성능을 나타내고 있다. 단위 스텝 응답으로서 매니퓰레이터의 끝점의 위치는 모두가 1에 수렴하고, 오버슈트는 거의 미소하다고 볼 수 있다.
그러나 1차모드만을 고려하여 설계한 제어기로 제어된 매니퓰레이터 끝점의 동적 처짐은 0.7sec에서 5 mm 임을 알 수 있다. 저차모델에 대하여 설계된 제어기는 0.7sec에서 끝점의 동적 처짐은 0에 수렴함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 유연링크 매니퓰레이터에 대해 특이 섭동이론을 기초로한 수정된 저차모델과 1차모드만을 고려한 모델을 대상으로 설계된 LQG/LTR 제어기의 제어성능을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 비교 하였다.

1) 유연링크인 연속계를 3차모드까지 포함해서 모델링한 것과 1차모드만을 고려하여 모델링한 시스템사이에는 고 주파수역 뿐만 아니라 관심 주파수인 1차모드 주파수 부근에서도 모델링 오차에 영향을 준다.

2) 특이섭동 이론을 기초로한 수정된 저차모델은 관심주파수 부근에서는 오차가 작고, 고주파수역에서도 어느 정도 오차 보상이 된다.

3) 수정된 저차모델을 대상으로 설계된 LQG/LTR제어기는 1차 모드만을 고려하여 설계한 제어기 보다 시간역 성능면에서 우수하다.

4) 유연링크 매니퓰레이터는 구동부와 측정위치가 다르기 때문에 LQG/LTR제어기는 설계변수가 되는 L을 영점다항식을 이용하여 구할 수 있다.

참고 문헌

1) F. Rakhsha & A. A. Goldenberg," Dynamics modelling of a Single-link Flexible Robot " , IEEE. PP. 984, 1985.

2) David Wang & M. Vidyasagar, " Transfer Functions of a Single Flexible Link " , IEEE, PP.1042-1047, 1989.

3) Dong-Soo Kwon & Wayne J. Book, "A time-domain inverse Dynamic Tracking Control of a Single-link Flexible Manipulator" , ASME, Vol. 116, PP.193-200, 1994

4) 하영균와 3명, "유연 단일링크 로봇 조작기의 최적기환제어" 대한기계학회 논문집 11권 6호, PP. 923-934, 1987.

5) 한기봉&이시복, " 유연링크 매니퓰레이터의 LQG/LTR제어" 대한기계학회 춘계학술대회 논문집(I),PP.611-615, 1992.

6) P.Kokotovic,"Singular Perturbation Methods in Control" ACADEMIC PRESS, 1986.

7) A.Haddad & p. Kokotovic,"Stochastic control of linear singularly perturbed system," IEEE Trans. Auto. contr. ,vol AC-22, PP. 815-821, 1977.

8) A. J. CALIS, J. V. R.PRASAD,& B. SICILIANO, " Design of optimal output feedback compensators in Two-time scale Systems," IEEE Trans. Auto. contr. VOL.35, NO.4, 1990.

9) W. J. Book, "Feedback control of Two Beam Joint System with Distributed Flexibility," ASME Trans. PP.425, DECEMBER 1975.

10) 한성익외 1명, "LQG/LTR 제어를 위한 루프형성 기법에 관한 연구" 한국 자동 제어 학술회의 논문집, 1992.

표 1. 시스템 매개 변수

링크 길이 (l)	0.5 m
허브 의 관성(I_h)	0.020 kg m^2
링크의 단위길이 당 질량(ρ)	0.15 kg/m
강 성(EI)	0.5 N m^2
pay load 질량(m_p)	0.005 kg
모터 감쇠 (D)	0.01 N. S /rad
링크의 감쇠비(ζ)	0.0005

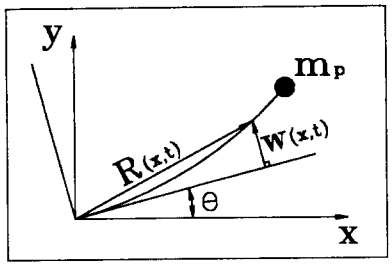

그림. 1 유연 링크 매니퓰레이터

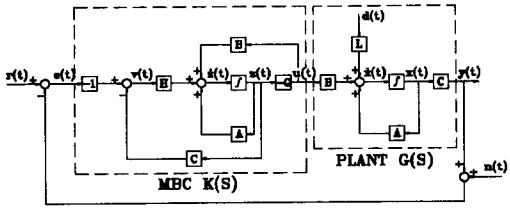

그림. 2 MBC를 이용한 출력 피드백 제어시스템

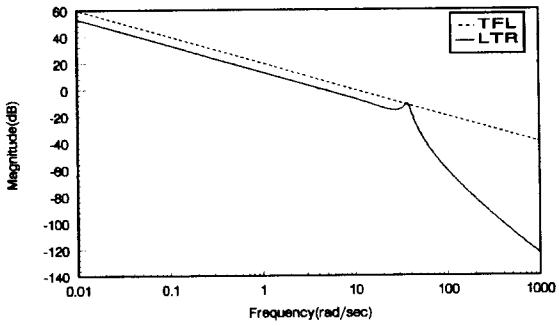

그림. 3 수정된 저차모델에 대한 목표필터와
LQG/LTR 루프의 bode 선도

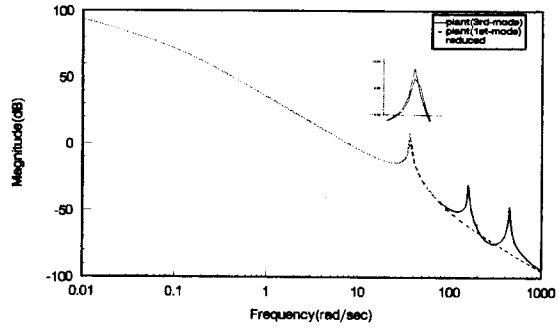

그림. 4 플랜트의 bode 선도

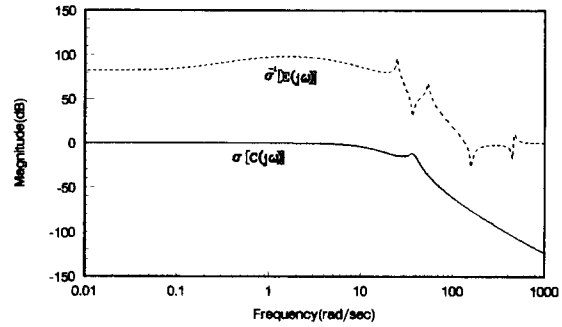

그림. 5 수정된 저차모델을 대상으로 설계된
제어기의 안정도-강인성

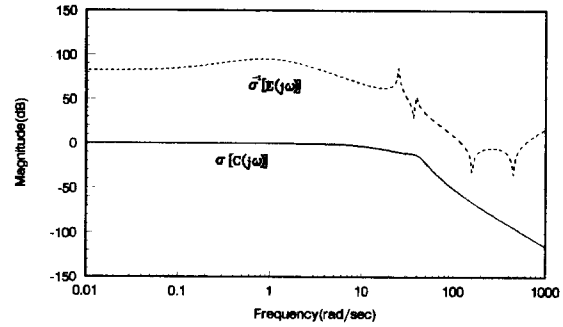

그림. 6 1차모드만을 고려하여 설계된
제어기의 안정도-강인성

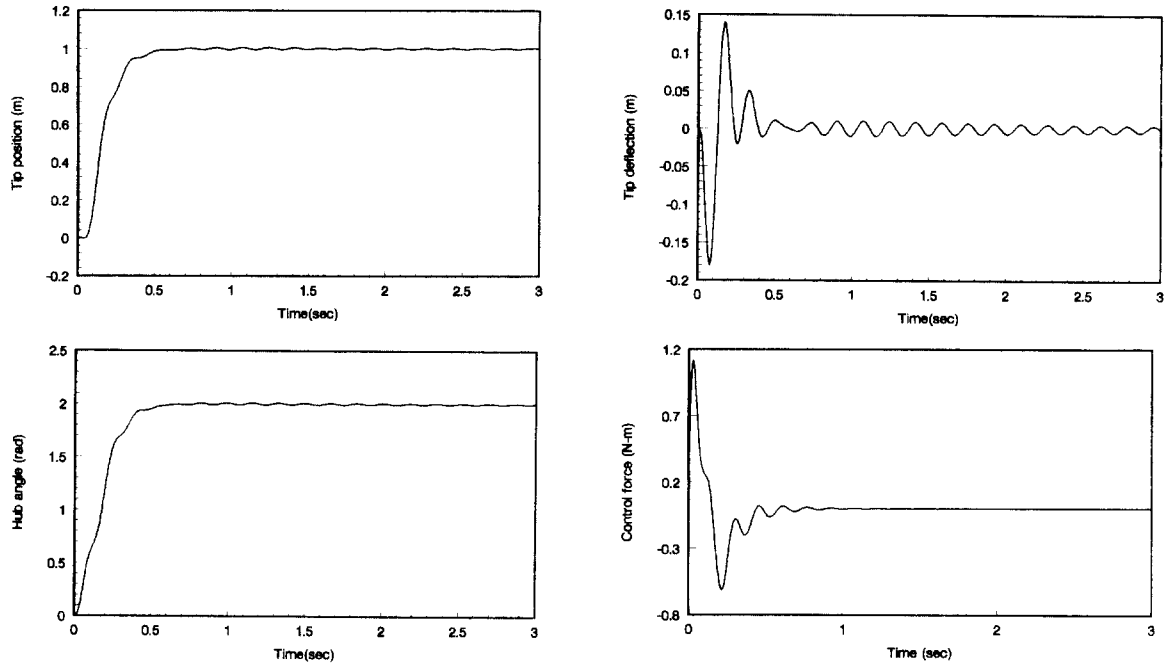

그림. 7 1차모드만을 고려하여 설계된 제어기의 단위 계단응답

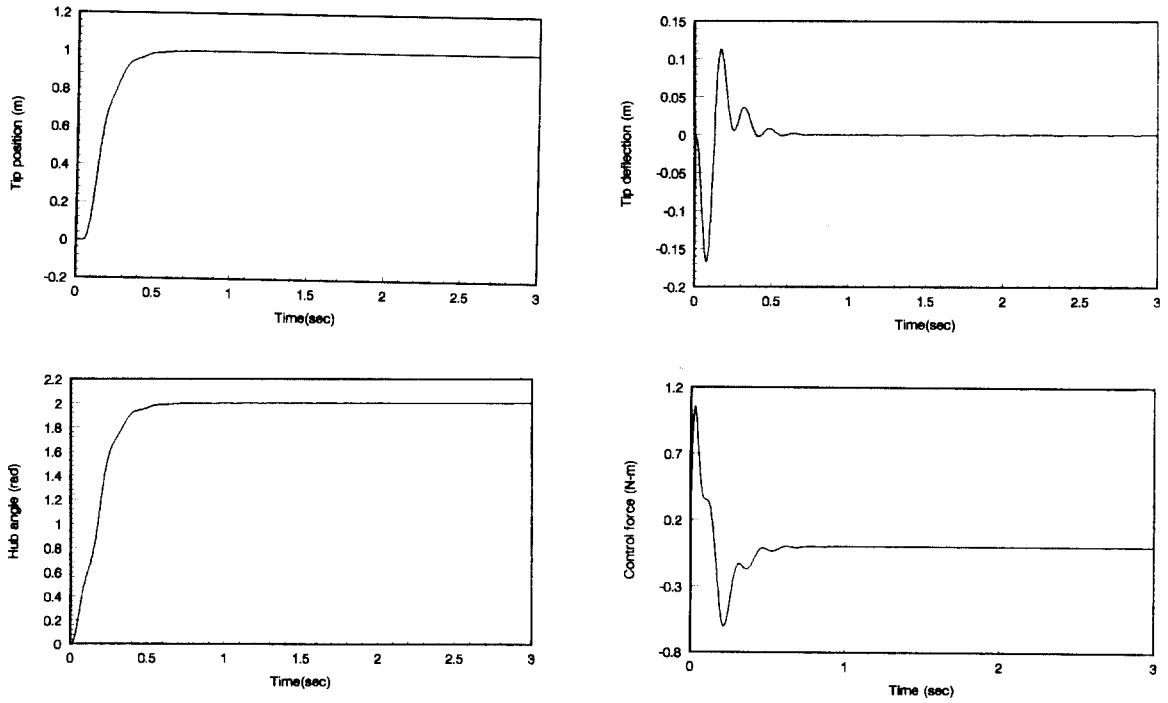

그림.8 수정된 저차모델을 대상으로 설계된 제어기의 단위 계단응답