

# 3관절 매니플레이터의 일반적 조합에 대한 역기구학적 폐형해 Closed Form Inverse Kinematic Solutions for General Combination of Three-Joint Manipulator

한규범 (연세대 대학원 기계공학과), 백운수 (연세대 기계설계학과)  
K.B.Han (Yonsei Univ.), Y.S.Baek (Yonsei Univ.)

## ABSTRACT

A general method of solving inverse kinematics of three-joint manipulator composed of revolute joints or prismatic joints or combinations of those joints is presented in this study. In completing real-time control, it is very important to obtain the closed form solutions of inverse kinematics rather than iterative numerical solutions, because iterative numerical solutions are generally much slower than the corresponding closed form solutions.

If it is possible to obtain the inverse kinematic solutions for general cases of considering twist angles and offsets, the manipulator work space can be designed and enlarged more efficiently for specific task.

Moreover, in industrial manipulators, the effect of main three joints is larger than that of the other three joints related to orientation in the view of work space. Therefore the solutions of main three-joint are considered. Even The inverse kinematic equations are complicatedly coupled, the systematical solving process by using symbolic calculation is presented.

Key Words : Manipulator(매니플레이터), Inverse Kinematic Solution(역기구학적 해),  
Revolute joint(회전 조인트), Prismatic joint(병진 조인트)

## 1. 서론

많은 6자유도 산업용 로봇 매니플레이터는 일반적으로 처음 3자유도가 로봇 끝단의 위치에, 그리고 나머지 3자유도는 로봇 끝단의 자세에 크게 영향을 주는 비연성된 시스템이다. 매니플레이터의 각각의 조인트는 회전 조인트와 병진 조인트로 이루어지며 주어진 직각 좌표계에서 원하는 매니플레이터의 끝단의 위치와 자세가 주어졌을 때 각 조인트의 변수들을 계산하는 역기구학적 해를 얻는 것이 필요하다.

역기구학적 해를 얻는 방법은 수치 해석 방법과 해석적인 폐형해를 얻는 방법 등이 있는데 고속 작업시 실시간 세이팅하기 위해서는 계산에 필요한 시간이 줄이기 위하여 해석적인 폐형해를 얻는 것이 유리하다. 또한 실제 산업용 로봇에서는 링크의 비틀림각을 0° 또는 90°로 하며 음셋 거리도 0인 경우가 대부분이다. 그 이유는 이러한 매카니즘이 역기구학에 대한 폐형해를 쉽게 주기 때문인데 이로부터 매니플레이터의 작업 공간은 많은 제약을 받게 된다. 따라서 비틀림각이나 음셋 거리를 고려한 일반적 경우에 대한 역기구학적 해를 구할 수 있다면 사용자의 요구 또는 작업상 요구되는 매니플레이터의 작업 공간을 보다 더 효율적으로 설계 또는 확장시킬 수 있다. 특히 작업 공간의 관점에서 매니플레이터 끝단의 위치를 결정하는 주 3관절의 영향이 로봇 매니플레이터의 대부분의 작업 공간을 결정하므로 자세를 결정하는 나머지 3관절의 영향보다 크다. 따라서 주 3관절에 대한 해석적인 폐형해를 결정하는 것

이 중요하다. 만약 주 3관절에 대한 역기구학적 해가 결정되면 자세에 관련된 나머지 3관절의 좌표계의 원점이 한 점에 일치하는 경우에 대하여 오일러 각 변환 또는 고정각 변환으로부터 자세에 대한 3관절의 역기구학적 해를 결정하는 것이 가능하다.

회전 조인트와 병진 조인트의 조합으로 이루어진 주 3관절의 모델 수는 총 2<sup>3</sup>개이며 본 연구에서는 심볼 연산을 이용하여 8가지의 모델에 대한 폐형해를 체계적으로 구하는 방법과 공간상에서 각 모델의 해에 대한 기하학적 해석을 제시하고 각 모델에 대해 해를 구하는 과정상의 공통점을 제시한다.<sup>[1][2]</sup>

## 2. 해석과정

### 2.1 기구학적 방정식

로봇 매니플레이터의 링크에 대한 기하학적 형상을 표현하는 방법으로는 여러 가지<sup>[3][6]</sup>가 있으나 여기에서는 Denavit-Hartenberg<sup>[3]</sup>의 표시법을 이용한다.

D-H의 표시법에 의하면 Fig.1의 i-1번째의 링크는 링크의 길이가 a<sub>i-1</sub>과 비틀림각 α<sub>i-1</sub>로 기술이 되며, i번째 링크와 i-1번째의 링크 사이의 변위는 선형 변위 d<sub>i</sub>와 각 변위 θ<sub>i</sub>로 설명될 수 있다.

이러한 D-H 표시법으로 나타내어진 2개의 조인트간의 동차 변환 행렬(Homogeneous transformation matrix)은 다음과 같다.<sup>[1][2]</sup>

$${}^{i-1}T_i = R_x(\alpha_{i-1}) D_x(\alpha_{i-1}) R_z(\theta_i) D_z(d_i) \quad (1)$$

즉,

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & \alpha_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1}d_i \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서

$$C\theta_i = \cos \theta_i, \quad S\theta_i = \sin \theta_i, \\ C\alpha_{i-1} = \cos \alpha_{i-1}, \quad S\alpha_{i-1} = \sin \alpha_{i-1}$$

이다.

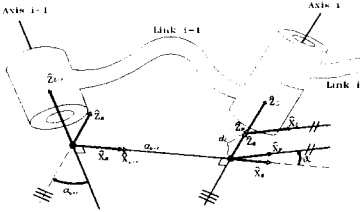


Fig. 1 Link parameters

식(1)에서  $R_x, R_z$ 는 각각 x축과 z축에 대한 회전 변환 행렬을 나타내고  $D_x, D_z$ 는 각각 z축과 x축에 대한 선형 변환 행렬을 나타낸다.

Fig.2에서와 같이 3관절 매니퓰레이터에 대하여 3번째 링크의 끝점을 기초 좌표계(base frame)와 3번째 좌표계에 의하여 표현하면 식(3)을 얻는다.

$${}^0P = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P \quad (3)$$

위 식에서  ${}^0P$ 와  ${}^3P$ 는 기초 좌표계와 3번째 좌표계에서 표현한 3번째 링크의 끝점을 나타내고  ${}^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3$ 는 각 좌표계간의 동차 변환 행렬을 나타낸다.

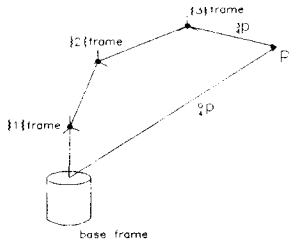


Fig. 2 Graphical expression of eqn(3).

식(3)은 비선형적이고 각 조인트의 변수들이 복잡하게 인성되어 있다. 회전 조인트의 경우에는 각 변위  $\theta$ 가 변수가 되며, 병진 조인트의 경우에는 선형 변위  $d$ 가 변수가 되므로 식(3)을 좀 더 간략화 시키기 위하여  ${}^0T_1$ 에서의 파라미터중 주이진 변수와 미지의 변수( $\theta$  또는  $d$ )만을 분리시킨다. 따라서 식(3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$${}^0P = {}^0T_c {}^cT_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P \quad (4)$$

식(4)는 첫번째 조인트가 회전 조인트, 또는 병진 조인트인 경우에 따라 다른 기구학적 식을 준다. 첫번째 조인트가 회전 조인트의 경우에 식(4)는 다음과 같다.

$${}^0P = {}^0T_c(d_1, \alpha_0, a_0) {}^cT_1(\theta_1) {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P \quad (5)$$

또한 병진 조인트의 경우에는 다음과 같다.

$${}^0P = {}^0T_c(\theta_1, \alpha_0, a_0) {}^cT_1(d_1) {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P \quad (6)$$

식(4)에서  ${}^0T_c$ 의 역행렬을 양변에 전치시키면 다음식을 얻게 된다.

$${}^cP = {}^cT_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3P \quad (7)$$

첫번째 조인트가 회전 조인트인 경우에는 식(5)와 식(7)로부터 x,y,z 성분에 대하여 다음의 세 식을 얻을 수 있다.

$${}^cP_{4x} = f_1(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, d_2, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (8)$$

$${}^cP_{4y} = f_2(a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, d_2, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (9)$$

$${}^cP_{4z} = f_3(a_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_2, \theta_3, d_2, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (10)$$

위 식들의 우변에서  $d_1, \alpha_0, a_0$ 는 나타나지 않는다.

또한 첫번째 조인트가 병진 조인트의 경우에는 식(6)과 식(7)로부터 x,y,z 성분에 대하여 다음의 세 식을 얻게 된다.

$${}^cP_{4x} = g_1(a_1, a_2, \alpha_2, \theta_2, \theta_3, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (11)$$

$${}^cP_{4y} = g_2(a_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_2, \theta_3, d_2, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (12)$$

$${}^cP_{4z} = g_3(a_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_2, \theta_3, d_1, d_2, d_3, {}^3P_{4x}, {}^3P_{4y}, {}^3P_{4z}) \quad (13)$$

위 식들의 우변에서  $\theta_1, \alpha_0, a_0$ 는 나타나지 않는다.

## 2.2 해의 결정 과정과 기하학적 해석

앞 절에서 언급한 바와 같이 조인트에서의 변수는 회전 조인트의 경우에는 각 변위  $\theta$ 가 되고 병진 조인트의 경우에는 선형 변위  $d$ 가 된다. 식(7)로부터 3개의 변수가 형성된 3개의 식을 얻을 수 있으며 각 모델에 대하여 식(8)~(13)에 포함되어 있는 미지의 변수는 Table 1,2와 같이 정리된다.

Table 1 Unknown variables in eqn(8)~(10)

Eqn No	model	RRR	RRP	RPR	RPP
(8)		$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\theta_1, \theta_2, d_3$	$\theta_1, d_2, \theta_3$	$\theta_1, d_2, d_3$
(9)		$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	$\theta_1, \theta_2, d_1$	$\theta_1, d_2, \theta_3$	$\theta_1, d_2, d_3$
(10)		$\theta_2, \theta_3$	$\theta_2, d_3$	$d_2, \theta_3$	$d_2, d_3$

Table 2 Unknown variables in eqn(11)~(13)

Eqn No	model	PRR	PRP	PPR	PPP
(11)		$\theta_2, \theta_3$	$\theta_2, d_3$	$\theta_3$	$d_3$
(12)		$\theta_2, \theta_3$	$\theta_2, d_3$	$d_2, \theta_3$	$d_2, d_3$
(13)		$d_1, \theta_2, \theta_3$	$d_1, \theta_2, d_3$	$d_1, d_2, \theta_3$	$d_1, d_2, d_3$

회전 조인트와 병진 조인트로 이루어진 총 8개의 조합의 모델을 고찰하면 첫번째 조인트의 종류에 따라 식(7)의 기하학적 방정식의 형태가 달라지므로 풀이 과정이 달라지게 된다. 이는 식을 간략화하는 과정에 의해서  $T_1$ 이 병진 조인트와 회전 조인트에 따라 다르기 때문이다.

첫번째 조인트가 회전 조인트인 경우에  $T_1$ 은 다음식과 같다.

$${}^cT_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

한편, 첫번째 조인트가 병진 조인트의 경우에  $T_1$ 은 다음식과 같다.

$${}^cT_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

따라서 식(7)의 결과로부터 첫번째 조인트의 종류에 따라 각 모델의 풀이 과정을 나누어서 고찰한다.

### 2.2.1 첫번째 조인트가 회전 조인트인 경우

첫번째 조인트가 회전 조인트로 이루어진 경우 식(7)의 우변에는  $T_1$ 의 도입으로 링크 파라미터  $d_1$ 이 나타나지 않는다. Table 1 에서 보듯이 공통적으로 포함되고 있는 변수  $\theta_1$ 은 식(8),(9)에만 포함되어 있다.

세개의 조인트가 모두 회전 조인트로 이루어진 RRR 모델에 대해서는 식(8),(9),(10)을 이용하여  $\theta_1$ 을 소거시킨다. 식(8),(9)는  $A \sin \theta_1 + B \cos \theta_1 = C$  와  $A \sin \theta_1 - B \cos \theta_1 = C'$ 의 형태로 정리되며 위와 같이 정리된 식(8),(9)와 식(10)을 각각 제곱하여 더함으로써  $\theta_1$ 이 소거된다. 이의 결과적인  $\theta_1$ 이 소거된 식, 즉  $\theta_2$ 와  $\theta_3$ 를 포함한 식과  $\theta_1$ 을 포함하지 않은 식(10)을 모두  $\cos \theta_3$ 와  $\sin \theta_3$ 로 정리한 후 cramer의 법칙과 삼각함수의 성질  $\cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3 = 1$ 을 이용하여  $\theta_3$ 를 소거시킨다. 다음으로  $\theta_3$ 이 소거된 식으로부터  $\theta_2$ 를 구한다. 이 때  $\theta_3$ 이 소거된 식을  $\cos \theta_2 = x, \sin \theta_2 = \sqrt{1-x^2}$ 으로 치환하면

결과식은  $x$ 에 대한 4차 다항식의 형태로 되며 이로부터  $x$ 에 대하여 풀 수 있다.

$\theta$ 를 치환하는 과정에서 위의 방법 외에 탄젠트 반각 공식  $x = \tan(\theta/2)$ 을 이용할 수도 있으나 이 경우 탄젠트 함수의 특성상 불연속점이 생기므로 계산상의 오차를 얻을 수도 있다. 따라서 본 연구에서는 코사인 함수와 사인함수를 이용하여 위와 같이 치환하고 삼각함수의 조건을 만족시키는 실근만을 선택하였다.  $\theta_2$ 가 결정되면  $\theta_3, \theta_1$ 을 소거시키기 전의 식으로 돌아가 나머지 변수  $\theta_3, \theta_1$ 값들을 차례로 결정할 수 있다.

부록에서 RRR 모델에 대한 구체적인 풀이 과정을 설명한다.

RRR 모델의 해에 대한 기하학적 해석을 하기 위하여 Fig.3 과 같이 세번째 조인트 부분을 분리하고 세번째 링크의 끝단 (c점)을 공간상의 주어진 좌표에 위치시키면 이것은 그 주어진 점에서 볼 조인트로 기초 좌표계에 연결된 것으로 생각할 수 있다. 이로부터 RRR 모델은 링크 시스템 A와 링크 시스템 B로 나누어 생각할 수 있다. 한개의 회전 조인트를 포함하는 링크 시스템 B는 조인트 E'의 회전축에 수직인 평면상의 c점을 중심으로 한 원의 궤적을 만들며, link 1과 link 2, 그리고 2개의 일반적인 형상을 갖는 회전 조인트 a,b로 이루어진 링크 시스템 A의 끝점 E는 공간상에서 도넛 모양의 궤적을 이루게 된다. 따라서 RRR 모델에 대한 해는 공간상에서 도넛 모양의 궤곡면상의 점 E와 원 위의 점 E'의 교점으로 해석될 수 있다.

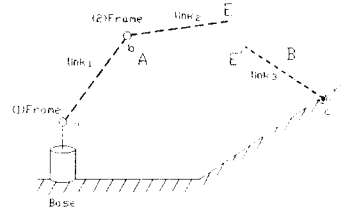


Fig. 3 Geometric analysis of RRR model

Fig.4는 RRR 모델의 해에 대한 기하학적 해석이다.

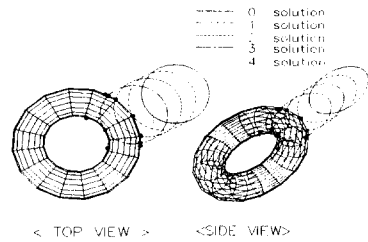


Fig. 4 Geometric interpretation of RRR model solution

RRR 모델에서는 식(8),(9),(10)을 이용하여 RRR 모델에서와 같은 방법으로  $\theta_1$ 을 소거하고,  $\theta_1$ 이 소거된 결과식과 식(10)을

이용하여  $\theta_3$ 을 소거시켰을 때 그 결과는 나머지 변수  $d_1$ 에 대한 4차식으로 정리되므로 이로부터  $d_1$ 를 구하고 소거되기 전의 식들로부터  $\theta_3$ 과  $\theta_1$ 을 차례로 구할 수 있다.

이 경우에도 Fig.3과 같이 유사한 기하학적 해석을 할 수 있으며 Fig.5에서 보듯이 원기둥 또는 원뿔대 모양의 폐곡면과 원과의 교점에서 해가 존재한다.

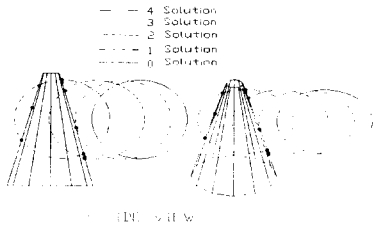


Fig. 5 Geometric interpretation of RPR model solution

RRP 모델의 경우에는 식(8),(9),(10)으로부터 위에서 언급된 바와 같은 방법으로  $\theta_1$ 이 소거된 식과 식(10)을 이용하여  $\theta_2$ 가 소거된다.  $\theta_2$ 가 소거된 식은  $d_3$ 에 대한 4차식으로 정리되며  $d_3$ 를 구한 후 나머지 변수가 소거되기 전의 식으로부터  $\theta_2, \theta_1$ 을 차례로 결정한다. 이 경우 Fig.6에서 보듯이 도넛 모양의 폐곡면과 직선과의 교점에서 해를 얻게 된다.

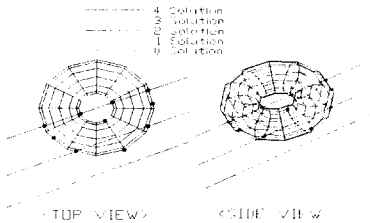


Fig. 6 Geometric interpretation of RRP model solution

마지막으로 RPP 모델에 대하여는 식(8),(9),(10)으로부터  $\theta_1$ 이 소거된 식과 식(10)에 의하여  $d_2$ 와  $d_3$ 의 연립 방정식을 얻을 수 있으며  $d_2$ 를 소거시킴으로써  $d_3$ 에 대한 2차식을 얻게 된다. 이 경우 Fig.7에서 처럼 원기둥 또는 원뿔대 모양의 폐곡면과 직선과의 교점에서 해를 얻는다.

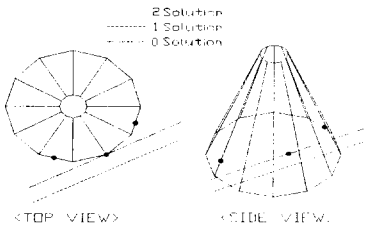


Fig. 7 Geometric interpretation of RPP model solution

Fig.8은 위의 네가지 모델에 대한 풀이과정을 나타낸다.

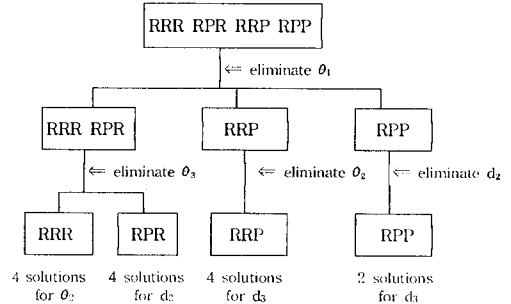


Fig. 8 Solving process of RRR,RPR,RRP,RPP models

### 2.2.2 첫번째 조인트가 병진 조인트인 경우

첫번째 조인트가 병진 조인트로 이루어진 경우 식(7)의 우변에는  $T_1$ 의 도입으로 링크 파라미터  $\theta_1$ 이 나타나지 않는다. Table 2에서 보듯이 공통적으로 포함하고 있는 변수  $d_1$ 은 단지 식(13)에만 포함되어 있다. 따라서 4가지 모델에 대해서 공통적으로 식(11)과 식(12)으로부터 두번째와 세번째 조인트의 변수값을 결정할 수 있으며 식(13)으로부터 공통적으로 가지고 있는 변수  $d_1$ 의 값을 결정한다.

이 경우에는 첫번째 조인트가 회전 조인트인 경우보다 기구학적 방정식의 형태가 비교적 간단하며 얻을 수 있는 해의 최대 개수도 일반적으로 적다.

PRR,PRP 모델의 경우 공통적으로 변수  $\theta_2$ 를 가지고 있으며 식(11),(12)를  $A \sin \theta_2 + B \cos \theta_2 = C$  와  $A \sin \theta_2 - B \cos \theta_2 = C'$ 의 형태로 정리한 후 각각 세곱하고 더하여  $\theta_2$ 를 소거시킨다.  $\theta_2$ 가 소거된 식은 PRR 모델의 경우  $\theta_3$ 만의 식으로 정리되며  $x = \cos \theta_3$ 의 삼각 함수 치환에 의하여  $x$ 의 4차식으로 정리된다. 또한 PRP 모델의 경우에는  $d_3$ 에 대한 2차 다항식으로 정리된다. 따라서 각 경우에 대하여  $\theta_3, d_3$ 의 값을 결정할 수 있으며 그 후  $\theta_2$ 를 소거시키기 전의 식으로부터  $\theta_2$ 를 구한후 최종적으로 식(13)을 이용하여  $d_1$ 을 구한다.

PRR 모델의 경우 원기둥 모양의 폐곡면과 원과의 교점에서 해를 주며 PRP 모델의 경우에는 원기둥 모양의 폐곡면과 직선과의 교점에서 해를 준다. Fig.9,10은 각각 PRR,PRP 모델에 대한 해의 기하학적 해석을 나타낸다.

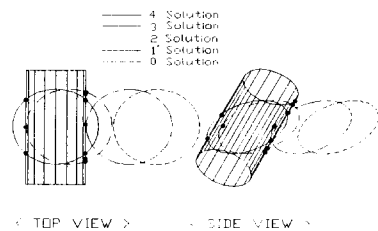


Fig. 9 Geometric interpretation of PRR model solution

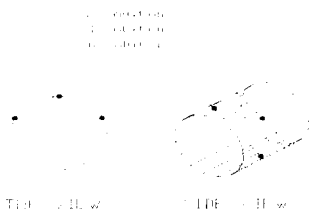


Fig. 10 Geometric interpretation of PRP model solution

PPR,PPP 모델의 경우 식(11)은 각각 단차  $\theta_3$ 와  $d_3$ 에 관한 식으로 정리되므로  $\theta_3, d_3$ 을 구할 수 있다.  $\theta_3, d_3$ 가 결정되면 식(12)는 두가지 모델에 대하여  $d$ 만의 식으로 되며 따라서  $d$ 가 결정된다. 마지막으로 (13)식으로부터 나머지 변수  $d_1$ 을 구할 수 있다.

Fig.11,12에서 보듯이 PPR 모델의 경우 두개의 병진 조인트의 축으로 이루어지는 평면과 세번째 링크의 끝점을 중심으로 하는 원과의 교점에서 해를 주며 PPP모델의 경우에는 두개의 병진 조인트의 축으로 이루어진 평면과 세번째 링크의 행정으로 이루어지는 직선과의 교점에서 해를 준다.

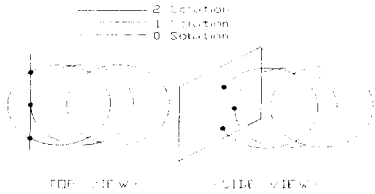


Fig. 11 Geometric interpretation of PPR model solution

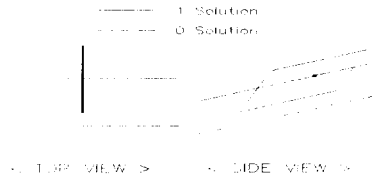


Fig. 12 Geometric interpretation of PPP model solution

Fig.13은 위의 네가지 모델에 대한 풀이과정을 나타낸다.

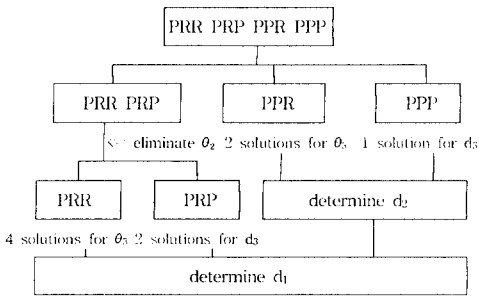


Fig. 13 Solving process of PRR,PRP,PPR,PPP models

구할 수 있는 해의 개수는 로봇 매니플레이터의 작업 공간 내에서 가능한 매니플레이터의 자세의 수와 일치하며, 작업 공간내에 원하는 매니플레이터의 끝단의 위치가 주어졌을 때, 가능한 최대 매니플레이터의 자세의 개수는 조인트의 조합에 따라 다르다. 조합 중 회전 조인트의 개수에 따른 최대의 해의 개수는 Table 3과 같다.

Table 3 No.of revolute joint Vs. No.of maximum solutions

No. of revolute joint	No. of maximum solutions
2 or more	4
1	2
0	1

이론적으로 얻을 수 있는 최대한의 해의 개수는 Table 3에서 보여주는 바와 같으나 실제적으로는 조인트의 기계적인 제한(회전 조인트의 경우 회전각의 제한 또는 병진 조인트의 경우 행정 길이의 제한)에 의하여 해의 개수가 줄어들 수 있으며 주어진 3번째 링크의 끝단의 위치가 작업 공간 외부에 존재하는 경우에는 해가 존재하지 않는다.<sup>11)12)</sup>

### 3. 결론

본 연구에서는 회전 조인트와 병진 조인트로 이루어진 비틀림과 오픈이 고려된 일반적인 기하학적 형상을 갖는 로봇 매니플레이터의 8가지 조합의 주 3관절 모델에 대하여 매니플레이터의 끝단의 위치가 주어졌을 때의 각 조인트에서의 변수 값을 구해내는 역 기하학적 해를 계획해의 형태로 결정하는 방법과 공통적인 풀이 과정에 대하여 논하였고 각 모델의 해에 대한 3차원 공간상의 기하학적 해석에 대하여 논하였다.

### 후기

본 연구는 연세대학교 교내 연구비의 지원으로 수행되었음.

### 참고 문헌

1. J.Craig, Introduction to Robotics, Addison Wesley, 1986.
2. K.S.Fu, et al., Robotics, McGraw-Hill, 1987
3. J.Denavit and R.S.Hartenberg, "A kinematic Notion for Lower-pair Mechanisms Based on Matrices", J.of Applied Mechanics, Vol 77, PP.215-221, 1955
4. Fichter, E.F and Hunt, K.H., " Mechanical Couplings - A general Geometrical Theory, Part 1- Theorems on Algebraic Loci and couplings", J. Engg. Industry, Trans ASME, Vol 99, Series B, PP.77-81, 1977
5. Fichter, E.F and Hunt, K.H., " Mechanical Couplings - A general Geometrical Theory, Part 2 - Examples and Applications of the Theorems.", J. Engg. Industry, Trans. ASME, Vol 99, Series B, PP.82-87, 1977
6. J.Duffy., Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, Edward Arnold, 1980

부 록

3개의 회전 조인트로 이루어진 RRR 보트에 대해서는  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 가 변수로 된다. 식(8),(9),(10)식으로부터 다음의 세 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E C\theta_1 + F S\theta_1 &= {}^2P_{4x} \\ E S\theta_1 - F C\theta_1 &= {}^2P_{4y} \\ Q_{11} S\theta_3 + Q_{12} C\theta_3 &= R_1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

위식에서

$$\begin{aligned} E &= a_1 - C\theta_2 (a_2 {}^3P_{1x} C\theta_3 - {}^3P_{1x} S\theta_3) + S\theta_2 S\theta_3 (d_3 {}^3P_{1z}) \\ F &= S\theta_2 C\theta_2 ({}^3P_{1x} S\theta_3 + {}^3P_{1y} C\theta_3) \\ &+ S\theta_1 d_3 S\theta_1 C\theta_3 (d_3 {}^3P_{2z}) \\ &+ {}^3P_{1x} C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + S\theta_1 S\theta_2 ({}^3P_{1x} S\theta_3 - {}^3P_{1y} C\theta_3) \\ &+ C\theta_1 ({}^3P_{1y} C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_2 S\theta_2 (a_2 {}^3P_{1x} C\theta_3)) \\ &+ C\theta_1 C\theta_2 ((d_3 {}^3P_{1z}) S\theta_2 - {}^3P_{1x} C\theta_2 S\theta_2) \\ Q_{11} &= k_1 C\theta_2 - k_2 S\theta_2 + k_3 \\ Q_{12} &= k_4 S\theta_2 + k_5 C\theta_2 + k_6 \\ R_1 &= k_7 C\theta_3 - k_8 S\theta_2 + k_9 \end{aligned} \tag{A.2}$$

그러므로

$$\begin{aligned} k_1 &= {}^2P_{4x} C\theta_2 S\theta_1 \\ k_2 &= {}^2P_{4y} S\theta_1 \\ k_3 &= {}^2P_{4x} S\theta_1 S\theta_2 \\ k_4 &= {}^2P_{4x} S\theta_1 \\ k_5 &= {}^2P_{4y} C\theta_2 S\theta_1 \\ k_6 &= {}^2P_{4y} C\theta_1 S\theta_2 \\ k_7 &= (d_3 {}^3P_{1z}) S\theta_1 S\theta_2 \\ k_8 &= a_2 S\theta_1 \\ k_9 &= {}^3P_{2z} d_2 C\theta_1 (d_3 {}^3P_{1z}) C\theta_1 C\theta_2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$\theta_1$ 을 소거시키기 위하여 식의 3식을 모두 제곱하여 더하면 다음의 식을 얻는다.

$$Q_{21} S\theta_3 - Q_{22} C\theta_3 = R_2 \tag{A.4}$$

위식에서

$$\begin{aligned} Q_{21} &= m_1 - m_2 S\theta_2 - m_3 C\theta_2 \\ Q_{22} &= m_4 - m_5 S\theta_2 - m_6 C\theta_2 \\ R_2 &= m_7 - m_8 C\theta_2 - m_9 S\theta_2 \end{aligned} \tag{A.5}$$

그러므로

$$\begin{aligned} m_1 &= 2 ({}^2P_{4x} d_2 S\theta_2 {}^3P_{4y} a_2) \\ m_2 &= 2 a_1 {}^2P_{4x} C\theta_2 \\ m_3 &= 2 a_1 {}^2P_{4y} \\ m_4 &= 2 (a_2 {}^2P_{4x} + d_2 {}^3P_{4y} S\theta_2) \\ m_5 &= 2 a_1 {}^2P_{4y} C\theta_2 \\ m_6 &= 2 a_1 {}^2P_{4x} \\ m_7 &= {}^2P_{4x} ({}^3P_{1x} {}^3P_{4x} + {}^3P_{1y} {}^3P_{4y} + {}^3P_{1z} {}^3P_{4z} - a_1^2 - a_2^2 - d_3^2) + 2 d_3 d_2 C\theta_2 \\ &- 2 d_2 {}^2P_{4y} C\theta_2 - 2 d_3 {}^2P_{4z} \\ m_8 &= 2 a_1 a_2 \\ m_9 &= 2 a_1 S\theta_2 (d_3 {}^3P_{1z}) \end{aligned} \tag{A.6}$$

식(A.1)의 세번째 식과 식(A.4)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{21} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S\theta_3 \\ C\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

Cramer's rule에 의하여 식(A.7)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S\theta_3 &= F_1 / \text{Det} \\ C\theta_3 &= F_2 / \text{Det} \end{aligned} \tag{A.8}$$

여기서

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_{22} R_1 - Q_{12} R_2 \\ F_2 &= Q_{11} R_2 - Q_{21} R_1 \\ \text{Det} &= Q_{11} Q_{22} - Q_{21} Q_{12} \end{aligned}$$

식(A.8)을 다시 써 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 &= Q_{22} R_1 - Q_{12} R_2 \\ &= (m_7 - m_8 S\theta_2 - m_9 C\theta_2) (k_7 - k_8 S\theta_2 + k_9) \\ &- (k_4 S\theta_2 + k_5 C\theta_2 + k_6) (m_1 - m_2 S\theta_2 - m_3 C\theta_2 - m_4 S\theta_2) \\ F_2 &= Q_{11} R_2 - Q_{21} R_1 \\ &= (k_1 C\theta_2 - k_2 S\theta_2 + k_3) (m_7 - m_8 S\theta_2 - m_9 C\theta_2) \\ &- (m_1 - m_2 S\theta_2 - m_3 C\theta_2) (k_7 C\theta_3 - k_8 S\theta_2 + k_9) \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned} &= n_{31} C\theta_2^2 + n_{32} S\theta_2^2 + n_{33} C\theta_2 + n_{34} S\theta_2 + n_{35} C\theta_2 S\theta_2 + n_{36} \\ \text{Det} &= Q_{11} Q_{22} - Q_{12} Q_{21} \\ &= (k_1 C\theta_2 - k_2 S\theta_2 + k_3) (m_7 - m_8 S\theta_2 - m_9 C\theta_2) \\ &- (k_4 S\theta_2 + k_5 C\theta_2 + k_6) (m_1 - m_2 S\theta_2 - m_3 C\theta_2) \\ &= n_{11} C\theta_2^2 + n_{12} S\theta_2^2 + n_{13} C\theta_2 + n_{14} S\theta_2 + n_{15} C\theta_2 S\theta_2 + n_{16} \end{aligned}$$

위식에서

$$\begin{aligned} n_{11} &= k_1 m_6 + k_2 m_5 \\ n_{12} &= k_3 m_5 + k_4 m_6 \\ n_{13} &= k_1 m_7 + k_3 m_6 + k_5 m_7 + k_6 m_5 \\ n_{14} &= k_4 m_7 + k_5 m_6 + k_6 m_7 + k_7 m_5 \\ n_{15} &= k_1 m_5 + k_6 m_7 + k_7 m_6 \\ n_{16} &= k_5 m_7 + k_6 m_5 \\ n_{21} &= k_7 m_6 + k_8 m_5 \\ n_{22} &= k_8 m_5 + k_9 m_6 \\ n_{23} &= k_7 m_4 + k_9 m_6 + k_5 m_7 - k_5 m_7 \\ n_{24} &= k_6 m_6 + k_7 m_7 - k_8 m_7 - k_9 m_6 \\ n_{25} &= k_6 m_6 + k_7 m_7 - k_8 m_6 - k_7 m_5 \\ n_{26} &= k_9 m_7 + k_8 m_6 \\ n_{31} &= k_7 m_7 - k_1 m_8 \\ n_{32} &= k_2 m_9 - k_8 m_2 \\ n_{33} &= k_1 m_7 - k_3 m_8 - k_7 m_7 + k_9 m_3 \\ n_{34} &= k_8 m_7 - k_2 m_7 - k_3 m_9 + k_9 m_2 \\ n_{35} &= k_2 m_8 - k_1 m_9 + k_7 m_2 - k_8 m_3 \\ n_{36} &= k_3 m_7 - k_9 m_1 \end{aligned} \tag{A.10}$$

a,d,a,θ,값들을 대입하면 식(A.9)는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\begin{aligned} F_1 &= n_{13} C\theta_2 + n_{14} S\theta_2 + G_1 \\ F_2 &= n_{23} C\theta_2 + n_{24} S\theta_2 + G_2 \\ \text{Det} &= n_{33} C\theta_2 + n_{34} S\theta_2 + G_3 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= n_{16} + n_{11} \\ G_2 &= n_{36} + n_{21} \\ G_3 &= n_{36} + n_{31} \end{aligned} \tag{A.12}$$

식(A.8)으로부터

$$F_1^2 + F_2^2 - \text{Det}^2 = 0 \tag{A.13}$$

따라서 식(A.11),(A.12)의 값들을 대입하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$z_1 C\theta_2^2 + z_2 S\theta_2^2 + z_3 C\theta_2 S\theta_2 + z_4 C\theta_2 + z_5 S\theta_2 + z_6 = 0 \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= n_{23}^2 + n_{33}^2 - n_{34}^2 \\ z_2 &= n_{24}^2 + n_{34}^2 - n_{14}^2 \\ z_3 &= 2(n_{23} n_{34} + n_{33} n_{34} - n_{13} n_{14}) \\ z_4 &= 2(n_{23} G_2 + n_{33} G_3 - n_{13} G_1) \\ z_5 &= 2(n_{24} G_2 + n_{34} G_3 - n_{14} G_1) \\ z_6 &= G_2^2 + G_3^2 - G_1^2 \end{aligned} \tag{A.15}$$

식(A.14)에서  $C\theta_2 = x, S\theta_2 = (1-x^2)^{1/2}$  로 치환하면 다음식을 얻는다.

$$z_1 x^4 + z_8 x^3 + z_9 x^2 + z_{10} x + z_{11} = 0 \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} z_7 &= z_1^2 + z_2^2 - 2 z_1 z_3 + z_3^2 \\ z_8 &= 2(z_1 z_4 + z_3 z_5 - z_2 z_4) \\ z_9 &= z_4^2 + z_5^2 - z_3^2 - 2 z_2^2 + 2 z_1 z_2 - 2 z_2 z_6 + 2 z_{12} \\ z_{10} &= 2(z_2 z_4 + z_4 z_6 - z_3 z_5) \\ z_{11} &= z_2^2 + z_6^2 + 2 z_2 z_6 - z_5^2 \end{aligned} \tag{A.17}$$

식(A.17)에 의하여  $\theta_2$ 가 결정되면 식(A.8),(A.1)에 의하여 차례로  $\theta_3, \theta_1$ 이 결정된다.