韓國精密工學會 '97年度 秋季學術大會論文集 pp.957~960

B-spline 곡면보간을 위한 parameter 결정에 관한 연구
Parametrization in B-spline Surface Interpolation

정 형 배 (목포대 공대)
Hyung-Bae Jung (Mokpo National Univ.)

ABSTRACT

A new method is introduced for the parametrization in B-spline surface interpolation. This method uses the basis functions to assign the parameter values to the arbitrary set of geometric data. This method gives us several important advantages in geometric modeling.

Key Words : Interpolation, B-spline surface, basis function

1. 서 론

B-spline 곡면보간은 주어진 설계 data를 통과하는 곡면함수를 정의하기 위하여 B-spline을 통제하는 control point net을 구하는 방식으로서, 그동안 이 분야에 대한 많은 연구가 이루어져 수학적인 완전해를 구할 수 있는 여러 방법들이 소개되었다[1,3]. 근본적으로 함수의 차수가 한정된다 하드래도 주어진 설계 data를 통과하는 B-spline 곡면은 무한히 많으므로 완전해는 무한히 많다[3,4]. 이와같은 이유는 각 설계 data에 parameter value를 어떻게 할당하느냐에 따라 전혀 다른 곡면이 생성되기 때문이다. 즉, 설계 data에 어떻게 parameter 값을 결정하느냐에 따라 여러방법이 구별될 수 있는 데, 설계 관점에서 좋은 방법의 판별기준은 설계 특성에 맞는 얼마나 효율적인 곡면을 생성할 수 있느냐에 달려있다. 지금까지의 방법들은 각 설계점간의 거리에 기준을 두고 parameter들을 결정하였는 데, 불행히도 이러한 방법들은 자동차, 선박 등 일반적인 물체의 설계에서 자주 나타나는 불균일한 배열의 설계 data들에서 효율적인 곡면을 생성하는 데 여러가지 어려운 문제점들을 발생시키고 있어 초기설계에 까지도 이용되지 못하고 있다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 문제점들을 개선할 수 있는 새로운 해결 방법을 모색하고자 한다. 본 연구에서는 각 설계점간의 거리에 기준을 두지않고 새로운 개념에 의해 parameter value들을 구하고, 이를 이용하여 control net을 계산하는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

2. B-spline Interpolation

B-spline 곡선의 vector-valued polynomial 일반식은 다음과 같다[5,6].

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i \, \mathbf{N}_{i,p}(u) \text{----------(1)}$$

여기서, $\mathbf{P}_i$: control points
$\mathbf{N}_{i,p}(u)$: normalized B-spline basis functions (degree: p)

설계 data를 $\mathbf{Q}_i$라고 하면, 이 설계 data를 B-spline curve가 통과하기 위해서는 (1)의 식에의해 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \mathbf{N}_{i,p}(u_0) & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \mathbf{N}_{i,p}(u_1) & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \mathbf{N}_{i,p}(u_n) & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \bullet \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \bullet \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix} \text{--(2)}$$

여기에서 u_0, u_1, ..., u_n은 각 $\mathbf{Q}_i$점에 할당된

parameter value이다. control point $\mathbf{P}_i$는 (2)식에서 $\mathbf{N}_{i,p}(u_i)$ 행렬을 식의 오른쪽으로 이동시키기 위하여 역행렬을 구하면 된다. $\mathbf{N}_{i,p}(u_i)$ 행렬을 확정하기 위해서는 knot vector, degree 및 parameter value를 확정하여야 한다. degree는 설계의 여러 특성을 중시하여 설계자의 선택에 맡기고, knot vector는 parameter value와 연관하여 구하면, 결국 어떻게 parameter를 결정하여 (2)의 식을 완성시키느냐가 숙제로 남는다. 매개변수값 u를 구하는 방법은 수없이 많은 연구가 이루어지고 있으나 효율적인 결과치를 고려하여 일반적으로 다음의 3가지가 사용된다[1,4].

① equally spaced:

$$u_0 = 0, \quad u_n = 1$$
$$u_k = k/n \quad k = 1,\ldots\ldots,n-1 \quad \text{---------(3)}$$

② chord length:

$$u_0 = 0, \quad u_n = 1$$
$$u_i = u_{i-1} + \frac{|\mathbf{Q}_i \quad \mathbf{Q}_{i-1}|}{\sum_{j=1}^{n-1} |\mathbf{Q}_j \quad \mathbf{Q}_{j-1}|} \quad \text{----(4)}$$

③ centripetal method:

$$u_0 = 0, \quad u_n = 1$$
$$u_i = u_{i-1} + \frac{|\mathbf{Q}_i \quad \mathbf{Q}_{i-1}|^{1/2}}{\sum_{j=1}^{n-1} |\mathbf{Q}_j \quad \mathbf{Q}_{j-1}|^{1/2}} \quad \text{------(5)}$$

B-spline Surface의 보간은 첫번째 매개변수를 사용하여 윗식들에 의한 각 control data들을 구하고 이들을 다시 설계 data로 이용하여 두번째 매개변수로 또한번 윗식을 적용하여 최종 control data를 구한다. 이 때 매개변수의 값은 구해진 매개변수의 값들에서 평균값을 택한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{k,l} &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{i,j}\, \mathbf{N}_{i,p}(u_k)\, \mathbf{N}_{j,q}(v_l) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{i,j}\, \mathbf{N}_{i,p}(v_l) \right] \mathbf{N}_{j,q}(u_k) \quad \text{---(6)} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \mathbf{C}_i(v_l)\, \mathbf{N}_{j,q}(u_k)\end{aligned}$$

3. 새로운 방법

본 연구에서는 다음과 같은 새로운 방법을 개발하였다:

"각 설계점에 parameter value를 해당 basis function이 최대가 되는 값으로 결정한다."

이 방법은 다음과 같은 중요한 장점들을 가지고 있다.

① knot value의 선택이 자유롭다.
② 설계 data의 중복 사용이 가능하다.
③ data point와 control point net 및 생성되는 곡면 사이의 affine transformation이 가능하다.
④ 설계 곡면이 안정적이다.

지금까지 발표된 방법들은 식 (3)에서 보여주는 equally spaced 방법을 제외한 대부분이 거리에 기준을 두고 parameter value를 결정한다. 이와같은 거리에 기준을 둔 방법들은 역행렬의 존재여부 때문에 knot value를 parameter value와 연관하여 결정한다. 이와같은 방법들은 사용자의 자유러운 knot value 선택을 불가능하게 한다. 본 연구에서 개발된 새로운 방법은 역행렬의 존재에 문제가 없어 knot value의 선택이 자유롭다.

control points net $\mathbf{P}_{i,j}$를 계산하기 위해서는 주어진 설계 data를 가지고 (6)식과 같은 $\mathbf{Q}_{k,l}$을 형성시켜야 하는데, $\mathbf{Q}_{k,l}$은 정방행렬이다. 주어진 설계데이타를 정방행렬꼴로 정리하기 위해서는 보통의 경우 u, v 방향에서 주어진 데이터의 수가 같지 않으므로 데이터의 생성에 의하여 같게 만드는 조작이 필요하다. 거리에 기준을 둔 방법들은 설계데이타의 중복사용이 허용되지 않지만은 새로운 방법에서는 전혀 문제가 없다. 이와같은 데이터의 중복사용의 허용은 실제 설계자에게 편리함을 주고 algorithm의 확장에 positive한 영향을 준다.

Geometric modeling에서 affine transformation의 가능여부는 중요한 인자중의 하나이다. 거리에 기준을 둔 방법들은 affine transformation 되지 않으나 새로운 방법은 가능하다[4].

다음절 실용예에서 보는것처럼 새로운 방법은 curve에서나 surface에서나 대단히 효율적이다. 또한

curve에서는 거리에 기준을 둔 centripetal method보다도 효율성에서 떨어지나 곡면에서는 다른 방법에 비해 대단히 효율적이다. 거리에 기준을 둔 방법들은 식 (6)에서 처럼 해를 구할 때 각 curve의 같은 행이나 열의 parameter value의 평균값을 사용해야하므로 거리에 기준을 두고 할당한 parameter value의 의미가 희석되므로 curve에서와 같은 효율성을 기대할 수 없다.

4. 실용 예

새로운 방법의 효율성을 보이기 위하여 이 방법을 equally spaced, chord length 및 centripetal method와의 비교를 일반적인 비균일 데이터를 가지고 curve와 surface에 대하여 행하였다.

4-1 curve interpolation

같은 데이터를 가지고 Fig.1-2은 equally spaced, Fig.3-4은 chord length, Fig.5-6은 centripetal method와 Fig.7-8는 새로운 방법에 의하여 control points를 구한 다음 curve를 가시화하였다. degree는 3차를 사용하였다. "+"은 보간해야할 설계데이타들을 나타낸다. 중첩을 피하고 명확한 표시를 위하여 "+"을 character string, pixel 단위로 나타내어 조금의 차이가 발생하지만 "+" 표시로 나타난 설계 data의 정확한 위치는 "+"를 중앙에 두고 정사각형을 그려 왼쪽 밑 끝부분이다. 그림에서 보는 바와 같이 새로운 방법은 효율적인 곡선의 생성에서 대단히 요동이 심한 설계데이타임에도 불구하고 곡선의 생성에 신뢰성을 주고 있다. 효율적인 면에서 centripetal method보다는 떨어지지만 equally spaced나 chord length보다는 뛰어나다고 할 수 있다.

4-2 surface interpolation

Fig.9는 사용되어진 설계데이타를 나타낸다. 설계데이타의 전체적인 윤곽을 보여주기 위하여 14*10행렬로 만들었을 때의 인접 열과 행끼리 직선으로 연결하였다. 보여지는 것처럼 앞부분에 데이터들을 앞뒤방향(v-방향)에서 중첩하여 사용하였는 데 상하방향(u-방향)에서 먼저 control points를 계산하여 이를 다시 v-방향에 사용하므로 중복사용은 아니다. u와 v방향의 계산순서를 바꾸면 chord lenth와 centripetal method로는 해를 구할 수 없다. Fig.10은 chord length, Fig.11은 centripetal method, Fig.12는 새로운 방법에 의하여 생성된 곡면을 가시화하였다. equally spaced에 의하여 생성되는 곡면은 형체를 구별하기 어렵게 부숴지므로 생략하였다. degree는 bicubic이 사용되었다. 그림에서 보는바와 같이 새로운 방법은 일반적인 다른방법에 비해 곡면보간에서 우수하다고 할 수 있다.

5. 결 론

일반적으로 설계 수행시 자주 발생하는 불균일 배열의 설계 data를 이용한 B-spline Surface Interpolation를 위하여 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법은 새로운 개념을 도입하여 설계 data에 할당되는 parameter values를 구한다. 이 방법은 여러 가지 중요한 특성을 가지고 있으며 특히나 곡면 interpolation에 적합하다. B-spline interpolation에 방법들은 논리적인 효율성의 증명이 어렵고 heuristic하므로 새로운 방법에 대한 보다 깊은 연구 및 개선이 필요하다.

참고문헌

1. L. Piegl, "On NURBS: A Survey", IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 11, No. 1, pp55-71, 1991.
2. L. Piegl and W. Tiller, The NURBS Book, Springer, Berlin, 1995.
3. E.T.Y. Lee, "Choosing nodes in parametric curve interpolation", CAD, Vol. 21, pp363-370, 1989.
4. G. Farin Curves and Surfaces for Computer aided Geometric Design, A Practical Guide Academic Press, 1993
5. L. Piegl, "Modifying the Shape of Rational B-Spline. PartII: surfaces", CAD, Vol. 21, NO 9, pp539-546, 1989.
6. W. Tiller, "Rational B-splines for Curve and Surface Representation", IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 3, No. 10, pp61-68, 1983.

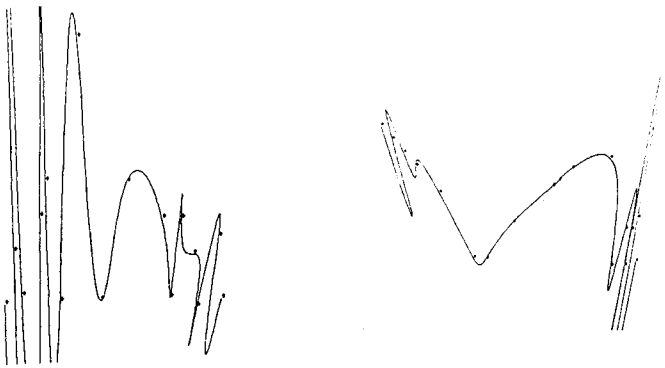

Fig.1 and Fig.2 equally spaced

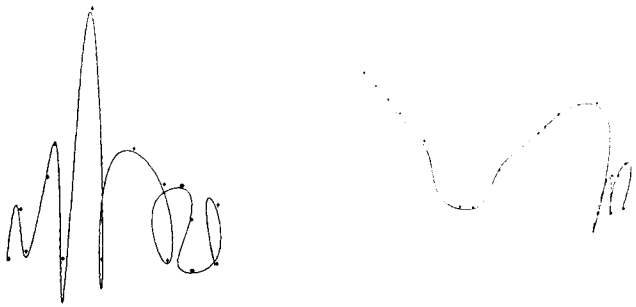

Fig.3 and Fig.4 chord length

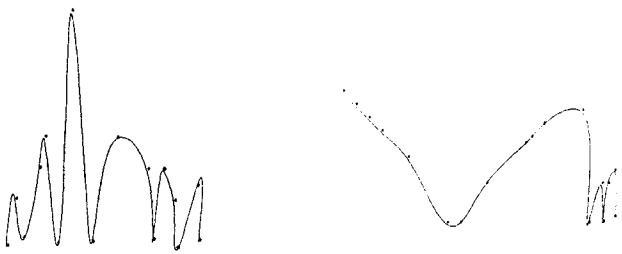

Fig.5 and Fig.6 centripetal method

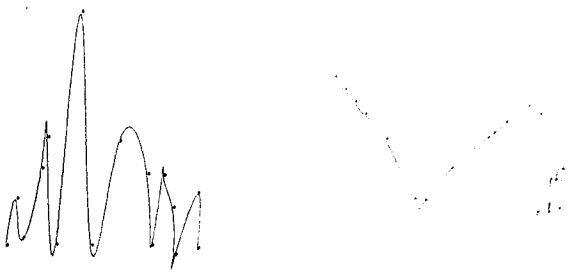

Fig.7 and Fig.8 new method

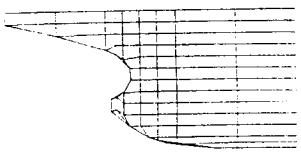

Fig.9 design data

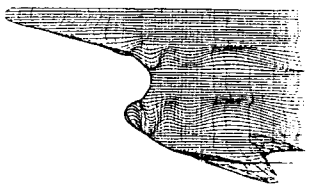

Fig.10 chord length

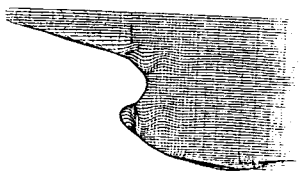

Fig.11 centripetal method

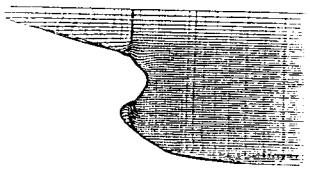

Fig.12 new method