

탄성론에 의한 실드터널의 안정해석에 관한 연구 (I)

A STUDY ON THE STABILITY OF SHIELD DRIVEN TUNNEL BY THE THEORY OF ELASTICITY (I)

진 치 섭, JIN, CHI-SUB

Department of Civil Engineering, Professor, Pusan National University

이 영 호, LEE, YOUNG-HO

Department of Civil Engineering, Graduate School, Pusan National University

SYNOPSIS

The application of shield tunneling method is increasing in the construction of life-line system in urban areas because of its predominance in reducing noise and vibration problems. Its technology has also rapidly been developed but the theoretical background does not have been established yet. Neither the ground around a tunnel nor, usually, the tunnel lining, behaves in an elastic manner. Nevertheless, the linear characteristic of an elastic analysis has great merit, particularly when, as frequently occurs, limitations of knowledge of the behaviour of the ground do not justify greater elaboration. In this point, this study presents an analytical solution for shallow tunnel under the action of gravity in the light of the theory of elasticity. The assumption is taken as a cylindrical tunnel under no support condition in a shallow elastic solid. The solutions are studied by stress function of polar coordinate, and the stability of ground is also analyzed by distortional strain energy. The analysis shows that the distortional strain energy is the good index for explaining mechanism of such shallow tunnel as shield driven tunnel.

1. 서 론

도시공간의 폭이 좁아짐에 따라 최근 점차로 많은 관심의 대상이 되고 있는 지하공간 활용문제와 관련하여 각종 터널공법에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 실드공법은 여러 공법 중에서도 연약지반 및 붕괴성지반에 유리하게 적용될 수 있을 뿐만 아니라 도시 터널의 깊이가 깊어짐으로 인한 시공상의 여러 문제점(소음, 진동 및 도시교통 장애 등)을 비교적 원만히 해결하고 있어, 실드공법을 이용하여 도시내의 터널을 축조하는 경우가 많아지게 되었다. 또한 환경보전적인 측면에서도 타공법에 비하여 우수하여 날로 그 사용이 증가될 전망이다.

실드와 같이 토피가 얇은 터널에서는 설계나 해석시 터널 주변지반에 작용하는 중력이나, 수평방향에서 작용하는 불균등한 하중의 영향은 무시할 수 없다. 따라서 토피가 얇은 터널 주변지반의 안정해석을 위해서는 먼저 터널 주변의 지반은 중력장내에 있으며, 지반의 수직 경계면에 시는 깊이에 비례하는 추압을 받는다고 가정하고, 여기서 지반에 축적된 형상탄성변형에너지를 계산하여 이 값을 통해 터널주변의 안전성을 검토해야 한다.

본 논문의 연구목적은 상기와 같은 해석의 첫단계로서 우선 무지보 상태에 있는 터널주변 지반의 상태를 탄성론에 의해 해석적인 방법으로 구한 다음, 지반에 발생하는 형상탄성변형에너지를 이용한 항복조건으로 지반의 안정성을 검토하는 데 있다.

따라서 본 논문에서는 터널주변지반을 등방성 탄성체로서 간주하고 파괴에 이를 때까지 지반은 탄성적으로 거동한다고 가정하며, 터널단면은 원형단면인 것으로 하였다. 또한 응력과 변형률을 중심으로 하는 기존의 관점을 일보 전진시켜, 지반에 발생하는 변형에너지를 해석방법으로 이용하였으며 지반에 발생하는 응력과 변위를 극좌표계에서의 응력함수로서 표현하였다. 터널을 굴착하기 전의 지반에는 오랜 세월에 걸친 지각변동이나 중력의 영향 때문에 이미 변형에너지가 축적되어 있었으므로 터널을 굴착함으로써 이 에너지가 교란되고 터널주변에 새로운 에너지의 분포가 형성될 것이다. 이 새로운 변형에너지의 어느 부분이 지반의 물성치를 통해 정해지는 한계값을 넘으면 터널은 파괴된다고 가정하였다.

그러나 실제의 터널주변 지반은 비등방성이고 불연속면을 가진 암반을 포함하고 있는 것이 대부분이며 또한 터널단면이 반드시 원형인 것만은 아니다. 따라서 이상과 같은 가정하에서 터널주변 지반의 거동을 해석하는 것은 다소 거칠기는 하나 터널설계 및 해석의 기본적인 관점을 밝힐 수 있을 것이다. 즉 터널굴착에 의한 지반의 안정성을 거시적인 관점에서 접근하여 기본적인 해석을 실시하는 데 중점을 두었다.

2. 터널의 안정해석

2.1 터널주변 지반의 역학적 성질

터널에 작용하는 하중은 터널주변의 다양한 지반의 성질이나 터널의 단면 형상 및 터널의 크기 등에 따라 그 변화가 매우 복잡하다. 예를 들면, 하중변화를 발생시키는 주요 인자로서 지반의 역학적인 성질 외에도 암석의 불연속면 및 풍화·변질의 정도, 지층의 포개짐 및 走向·경사, 지하수의 상태, 土被, 지형, 굴착방법 등이 있다.

기존의 터널 설계방법은 터널주변의 지반 및 라이닝에 작용하는 응력과 변형률을 구해 그 안정성을 판단해 왔다. 그러나 응력이나 변형률은 모두 텐서량으로서 방향성을 가지고 있으므로 불연속면이 많고 지층이 여러번 포개진 지반에 터널을 축조하는 설계방법으로는 부족한 점이 많았다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 한 방법으로 터널 주변지반의 거동과 터널 복공의 안정성을 합리적으로 판단하는 지표로서 지반에 발생하는 변형에너지를 사용하는 방법이 있다. 에너지량은 스칼라량이기 때문에 방향성을 갖지 않고, 그만큼 암석의 불연속면 및 지층의 방향성에 따른 번거로움을 주지 않는다는 이점이 있다. 특히 터널주변의 암석은 특별한 경우를 제외하고 삼축압축상태에 있다. 암석은 세방향으로 압축을 받을 경우, 취성에서 연성으로 변하는 성질이 있다. 일축압축시험에서 대부분의 암석은 평판모양의 균열이 발생하며, 외향으로 변형을 일으켜 취성적으로 파괴된다. 이는 압축방향에 직각으로 발생하는 인장응력 때문인데 이 상태에서 약간의 축압을 작용시키면, 파괴는 전단력에 지배된다. 또한 축압이 증가하면 파괴가 발생되기가 어려워지며 파괴응력도 증가하게 된다. 따라서 파괴현상을 어디에서 정의할 것인가에 대해서는 신중한 고려가 필요하다.

2.2 탄성체에 축적되는 변형에너지

직육면체 미소요소의 각 면에 주응력 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 가 작용하면 그 크기에 비례하여 각 면의 법선방향으로 주변형률 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 가 발생하고, 그 결과 미소요소는 체적변화를 일으킨다. 즉 주응력 상태에서 미소요소의 체적변화 dV 는 다음과 같다.

$$\frac{dV}{V} = \frac{\sigma_m}{K} \quad (1)$$

여기서, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$: 체적탄성계수

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) : \text{평균응력}$$

(1) 식으로부터 탄성체의 체적변화는 평균응력의 함수임을 알 수 있다. 일반적으로 탄성체 내에 저장되는 단위체적당 변형에너지는 체적변화에 필요한 변형에너지와 형상변화에 필요한 변형에너지의 합으로 나타낼 수 있으며 이를 주응력과 주변형률로서 나타내면 다음의 식과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_m^2 \\ &\quad - \frac{1}{2G} [(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m)] \\ &= U_V + U_S \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, U_V : 체적변화에 필요한 변형에너지

U_S : 형상변화에 필요한 변형에너지

2.3 지반의 항복조건과 안정성

등방성 물질의 주변에 등방압력이 작용하면 물체는 탄성적인 거동을 나타내며 아울러 체적변화를 유발시킨다. 따라서 물체내에 저장되는 체적탄성에너지는 끝없이 증가하게 되므로 이러한 사실만으로는 재료의 항복여부를 알 수 없다. 즉 항복이라는 현상이 실제하기 위해서는 체적변화가 아닌 현상변화에 의해 발생한다는 가설이 필요하다.

항복조건을 표현하는 식의 형태는 소성개시를 만족하는 물체의 임의점 6개 응력성분 사이의 관계를 수학적으로 나타냄으로서 구할 수 있다. 일반적으로 항복조건은 직교좌표계에서 다음과 같은 함수형으로 주어진다.

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = C \quad (3)$$

여기서, C : 상수

f : 항복함수

어느 방향으로나 균질한 등방성의 재료를 가정하면, 항복조건은 좌표축의 방향과 무관하므로 (3) 식의 좌변은 주응력 또는 응력의 불변량 (stress invariant) 으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= C \\ f(J_1, J_2, J_3) &= C \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

이기에 세적변화는 항복과 무관하다는 가설을 (4) 식에 대입하면 항복조건에 대한 일반형태를 얻을 수 있다. 이를 위해서는 응력성분에서 비리 세적변화를 발생시키는 응력인 평균응력 σ_m 을 제외시키는 것이 간편하다. 이 값을 편차응력이라 하는 네 이 편차응력이 작용하는 경우에는 세적변화는 발생하지 않고 형상변화만이 발생한다.

편차응력성분을 가진 응력상태의 주응력 성분을 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ 으로 나타내면, 각각의 편차응력성분은 $\sigma_1 - \sigma_m, \sigma_2 - \sigma_m, \sigma_3 - \sigma_m$ 로서 주어진다. 이 값을 이용하여 응력의 불변량을 (4) 식에 대입해 보면 항상 $J_1' = 0$ 가 성립되므로 등방압력분포에서 항복이 발생하지 않는다는 가정하에서는 (4) 식의 항복조건을 다음과 같이 치환할 수 있다.

$$f(J_2', J_3') = C \quad (5)$$

여기서, J_2', J_3' : 편차응력 성분을 이용하여 산정한 응력 불변량

Table 1 에 Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager 의 항복조건을 이용하여 구한 지반에 저장될 수 있는 최대형상탄성변형에너지 \bar{U}_s 를 나타내었다.

Table 1 각종 항복조건에 대한 최대형상탄성변형에너지 \bar{U}_s

항복 조건	최대형상탄성변형에너지 \bar{U}_s
Tresca	$\frac{1}{2G} \frac{\sigma_y^2}{4 \cos^2 \theta}$
Von Mises	$\frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma_y^2}{3}$
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{2G} \frac{3(\sigma_m \sin \theta - c \cos \theta)^2}{(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \theta)^2}$
Drucker-Prager	$\frac{1}{2G} \frac{12(\sigma_m \sin \theta - c \cos \theta)^2}{(3 - \sin \theta)^2}$

단, σ_y : 일축압축강도, G : 전단탄성계수, σ_m : 평균응력
 c : 점착력, θ : 내부마찰각

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3} J_3'}{J_2'^{3/2}} \right) \quad (-\phi/6 < \theta < \phi/6)$$

이들 식에서 $\theta = \pi/6$ 이면, Tresca 의 항복조건에 의한 형상탄성변형에너지는 Von Mises 와 일치하며, Mohr-Coulomb 의 항복조건에 의한 형상탄성변형에너지는 Drucker-Prager 와 일치한다. 또한 Mohr-Coulomb, Drucker-Prager 의 형상탄성변형에너지에서 내부마찰각을 0 으로 하고 $c = \sigma_y/2$ 로 놓으면, 각각 Tresca, Von Mises 의 형상탄성변형에너지와 일치한다.

터널주변의 암반은 상재하중에 의해 삼축압축상태에 있다. 지반을 구성하고 있는 암석이 내부마찰각 ϕ 를 가지고 있으면, 평균응력 σ_m 이 항복조건에 영향을 미친다. 따라서 이러한 지역에 터널을 굴착할 경우에는 Mohr-Coulomb 및 Drucker-Prager의 항복조건이 Tresca 나 Von Mises의 항복조건보다 적합성이 높다. 그러나 지반의 조건은 예측하기 어렵고 복잡하기하므로 단순화시킨 방법을 많이 사용하고 있는 실정이다.

2.4 터널주변 지반의 파괴에 대한 가정

지반이 등방탄성체라면 소성화되기 위한 조건은 지반에 발생하는 형상탄성변형에너지와 지반에 저장될 수 있는 최대형상탄성변형에너지를 비교함으로써 감성할 수 있다.

임의의 응력상태에서 물체에 발생하는 단위 체적당 형상탄성변형에너지 U_s 를 주응력의 원치응력 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U_s &= -\frac{1}{2G} [(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_m)] \\
 &= \frac{1}{4G} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] \\
 &= -\frac{J_2'}{2G}
 \end{aligned} \tag{6}$$

따라서 지반의 소성화 여부는 Table 1의 $\overline{U_s}$ 와 (6)식의 U_s 를 비교함으로써 판단할 수 있다.

2.4.1 터널 굴착전 지반에 저장되어 있는 형상탄성변형에너지

일반적으로 터널 굴착전의 지반에서는 터널설치 깊이에 상재압이 연직방향의 응력으로 작용한다. 이 압축응력을 $-s$ 라 하면 축방으로 작용하는 응력은 축압계수를 k 일 때 $-ks$ 로서 나타낼 수 있다. 따라서 굴착전 지반에 저장되어 있는 형상탄성변형에너지 U_s^* 는 다음과 같다.

$$U_s^* = \frac{s^2}{2G} \frac{(1-k)^2}{3} \tag{7}$$

지반에 저장될 수 있는 최대형상탄성변형에너지는 Table 1의 $\overline{U_s}$ 이므로 $\overline{U_s} - U_s^*$ 의 값이 클수록 굴착에 적합한 지반이라 할 수 있다. 이를 지반의 포텐셜이라 하며 터널굴착을 위한 지표로서 사용될 수 있다. 터널 굴착전 지반에 저장될 수 있는 최대형상탄성변형에너지를 $\overline{U_s^*}$ 라 하고 각 항복조건에 대한 $\overline{U_s^*}$ 를 계산하면 Table 2와 같다.

Table 2 굴착전 지반의 최대형상탄성변형에너지 $\overline{U_s^*}$

항복조건	최대형상탄성변형에너지 $\overline{U_s^*}$
Tresca	$\frac{s^2}{2G} \frac{(\sigma_y/s)^2}{4 \cos^2 \theta}$
Von Mises	$\frac{s^2}{2G} \cdot \frac{(\sigma_y/s)^2}{3}$
Mohr-Coulomb	$\frac{s^2}{2G} \frac{\{(2k+1) \sin \theta + 3(c/s) \cos \theta\}^2}{3(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \phi)^2}$
Drucker-Prager	$\frac{s^2}{2G} \frac{\{2(2k+1) \sin \theta + 3(2c/s) \cos \theta\}^2}{3(3 - \sin \phi)^2}$

단, σ_y/s : 지반강도비 $2c/s$: 지반점착력비

2.4.2 무한 탄성체 내에 축조된 무지보 원형터널주변 지반의 응력해석

Fig 1 에서 보이는 것처럼 평면변형률 상태에서 2차원 지반을 무한탄성체로 가정하고, 그 안에 축조된 반경이 r_0 인 무지보 상태의 터널주변의 응력분포를 고려한다. 지반의 경계조건은 터널중심에서 멀리 떨어진 위치에서 상하방향으로 $-s$ 의 연직압이, 측면방향에서 $-ks$ 의 수평압이 작용한다고 가정한다.

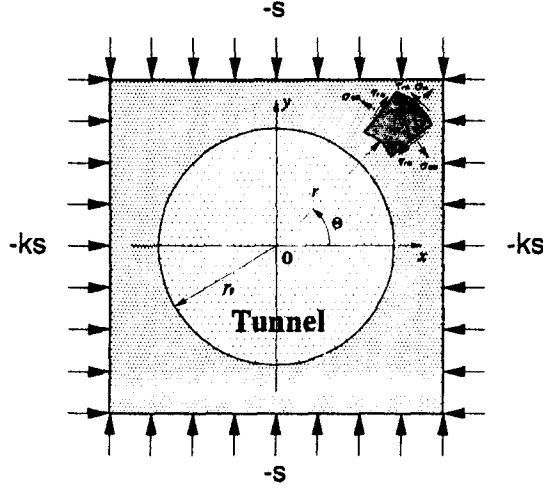


Fig 1 무한 탄성체 내에 축조된 무지보 원형터널주변 지반의 응력

원형 터널의 중심에 극좌표의 원점을 잡고 Airy의 응력함수를 ϕ 라 하면, Airy의 응력함수가 만족해야 할 조건은 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0 \tag{8}$$

(8) 식의 해를 산정하기 위해 ϕ 를 θ 에 관한 Fourier series 함수로 놓으면 다음과 같은 형태의 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi = & a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r + \\ & \left(a_1 r + b_1 r \ln r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3 \right) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{(n+2)} + c_n r^{(-n)} + d_n r^{(2-n)}) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned} \tag{9}$$

한편, 터널주변 지반의 반경방향응력 σ_{rr} , 접선방향응력 $\sigma_{\theta\theta}$, 전단응력 $\tau_{r\theta}$ 및 반경방향변위 u_r , 접선방향변위 u_θ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ u_r &= \int \epsilon_{rr} dr \\ u_\theta &= \int (r \epsilon_{\theta\theta} - u_r) dr \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, $\epsilon_{rr} = (\sigma_{rr} - \nu_0 \sigma_{\theta\theta}) / E_0$
 $\epsilon_{\theta\theta} = (\sigma_{\theta\theta} - \nu_0 \sigma_{rr}) / E_0$

단, E_0, ν_0 는 평면응력 상태의 변형계수, 포아송비이며, 평면변형률 상태일 경우에는 각각 $E = E_0/1-\nu_0, \nu = \nu_0/1-\nu_0$ 로서 치환하면 된다. (9)식을 (10)식에 대입하면 지반의 응력 및 변위에 대한 식을 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left[\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + d_0(2 \ln r + 1) \right] + \left[\frac{b_1}{r} - \frac{2c_1}{r^3} + 2d_1 r \right] \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(n-1) r^{(n-2)} + b_n(n-2)(n+1) r^n + c_n n(n+1) r^{-(n-2)} + \right. \\ &\quad \left. d_n(n+2)(n-1) r^{(-n)} \right] \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left[-\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + d_0(2 \ln r + 3) \right] + \left[\frac{b_1}{r} + \frac{2c_1}{r^3} + 6d_1 r \right] \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(n-1) r^{(n-2)} + b_n(n+2)(n+1) r^n + c_n n(n+1) r^{-(n-2)} + \right. \\ &\quad \left. d_n(n-1)(n-2) r^{(-n)} \right] \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \tau_{r\theta} &= \left[-\frac{b_1}{r} + \frac{2c_1}{r^3} - 2d_1 r \right] \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} - \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(n-1) r^{(n-2)} + b_n n(n+1) r^n - \right. \\ &\quad \left. c_n n(n+1) r^{-(n-2)} - d_n n(n-1) r^{(-n)} \right] \frac{\cos n\theta}{-\sin n\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E_0} \left[\left[-\frac{b_0}{r}(1+\nu_0) + 2c_0(1-\nu_0)r + d_0\{2r(1-\nu_0)(\ln r - r) + (1-3\nu_0)r\} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[b_1(1-\nu_0) \ln r + \frac{c_1}{r^2}(1+\nu_0) + d_1(1-3\nu_0)r^2 \right] \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(1+\nu_0) r^{(n-1)} + b_n\{(n-2)+(n+2)\nu_0\} r^{(n+1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - c_n n(1+\nu_0) r^{-(n-1)} - d_n\{(n+2)+(n-2)\nu_0\} r^{(-n+1)} \right] \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right] \\ u_\theta &= \frac{1}{E_0} \left[\left[b_1(1-\nu_0)(1-\ln r) + \frac{c_1}{r^2}(1+\nu_0) + d_1(5+\nu_0)r^2 \right] \frac{-\cos \theta}{\sin \theta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_n n(1+\nu_0) r^{(n-1)} + b_n(n+4+n\nu_0) r^{(n+1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_n n(1+\nu_0) r^{-(n-1)} - d_n(n-4+n\nu_0) r^{(-n+1)} \right] \frac{-\cos n\theta}{\sin n\theta} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

(11)식에 경계조건

① $r \rightarrow \infty$ 일 경우 $\sigma_x = -s, \sigma_y = -ks, \tau_{xy} = 0$

② $\sigma_x(r_0) = 0$

③ $\sigma_y(r_0) = 0$

을 각각 대입하면, 축압계수 k , 상재압 $-s$ 가 작용하는 무한탄성체속의 터널주변 지반의 응력 및 변위가 산정된다.

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -s \left[\frac{1}{2} (1+k) (1-X^2) - \frac{1}{2} (1-k) (1-4X^2+3X^4) \cos 2\theta \right] \\
\sigma_y &= -s \left[\frac{1}{2} (1+k) (1+X^2) - \frac{1}{2} (1-k) (1+3X^4) \cos 2\theta \right] \\
\tau_{xy} &= -\frac{s}{2} (1-k) (1+2X^2-3X^4) \sin 2\theta \\
u_r &= -\frac{s(1+\nu_0)r_0}{2E_0} \left[(1+k)X - (1-k)X \left\{ \frac{4}{1-\nu_0} - X^2 \right\} \cos 2\theta \right] \\
u_\theta &= -\frac{s(1+\nu_0)r_0}{2E_0} (1-k)X \left\{ \frac{2(1-\nu_0)}{1+\nu_0} - X^2 \right\} \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{12}$$

2.4.3 터널 굴착후 지반에 저장되어 있는 형상탄성변형에너지

(ii) 식으로 주어지는 형상탄성변형에너지 U_S 는 극좌표로 표시된 응력을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$U_S = \frac{1}{6G} [(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2 - 3\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\tau_{r\theta}^2] \tag{13}$$

여기에 (12) 식을 대입하면 지반에 저장된 형상탄성변형에너지 U_S^{**} 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
U_S^{**} &= \frac{s^2}{24G} [(1+k)^2 (1+3X^4) + 3(1-k)^2 (1+4X^2-2X^4-12X^6+9X^8) + \\
&2(1-k)(1+k)(5X^2-6X^4+9X^6) \cos 2\theta - 8(1-k)^2 (3X^2-5X^4) \cos^2 2\theta]
\end{aligned} \tag{14}$$

앞에서와 마찬가지로 터널 굴착후 지반에 저장될 수 있는 최대형상탄성변형에너지를 $\overline{U_S^{**}}$ 라 하고 각 항복조건에 대한 $\overline{U_S^{**}}$ 를 계산하면

Table 3 과 같다.

Table 3 굴착후 지반의 최대형상탄성변형에너지 $\overline{U_S^{**}}$

항 복 조 건	최대형상탄성변형에너지 $\overline{U_S^{**}}$
Tresca	$\frac{s^2}{2G} \frac{(\sigma_y/s)^2}{4 \cos^2 \theta}$
Von Mises	$\frac{s^2}{2G} \cdot \frac{(\sigma_y/s)^2}{3}$
Mohr-Coulomb	$\frac{s^2}{2G} \frac{\{(k+1) \sin \phi + 2(1-k) X^2 \cos 2\theta \sin \phi + 3(c/s) \cos \phi\}^2}{3(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \sin \phi)}$
Drucker-Prager	$\frac{s^2}{2G} \frac{4\{(k+1) \sin \phi + 2(1-k) X^2 \cos 2\theta \sin \phi + 3(2c/s) \cos \phi\}^2}{3(3 - \sin^2 \phi)}$

3. 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널주변 지반의 응력해석

도심지 터널과 같이 터널의 설치 깊이가 비교적 얇은 터널을 해석할 때에는 앞의 경우와는 달리 지반에 작용하는 중력의 영향이나 지하 매질물로 인한 측방향의 불균등한 토압의 영향을 무시할 수 없다.

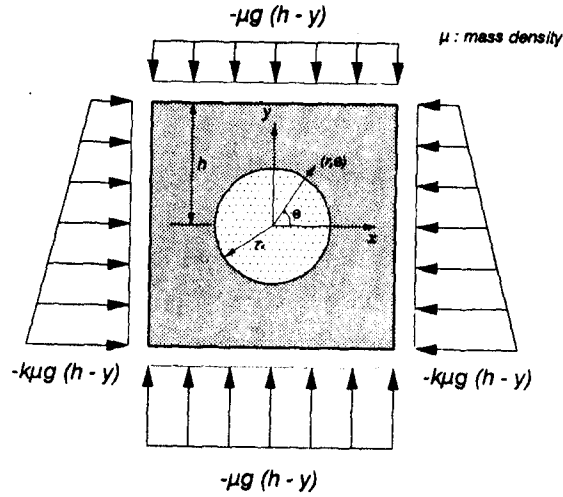


Fig 2 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널 주변 지반의 응력

Fig 2 에 보이는 것처럼, 평면변형을 상태에서 2차원 무한탄성체 안에 축조된 반경이 r_0 인 터널 주변의 응력장을 고려한다. 경계면에 둘러싸인 영역에는 단위체적당 $-\rho g$ 의 중력이 작용한다고 가정한다. 지표면에서 원형터널 중심까지의 거리를 h 라 하고, 터널 주변 지반의 반경방향 응력 σ_{rr} , 접선방향응력 $\sigma_{\theta\theta}$, 전단응력 $\tau_{r\theta}$ 를 Airy 의 응력함수 ϕ 로서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \rho g r \sin^3 \theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \rho g r \sin \theta \cos^2 \theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \rho g r \cos \theta \sin^2 \theta \\ u_r &= \int \epsilon_{rr} dr \\ u_\theta &= \int (r \epsilon_{\theta\theta} - u_r) dr \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $r \rightarrow \infty$ 일 때 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta} \rightarrow \infty$ 가 되지 않으며, 多價函數가 되지 않는다는 점과 $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ 에서 좌우 대칭임을 고려하면 응력함수 ϕ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi &= a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r + A_0 \theta + \\ &\left(b_1 r \ln r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3 \right) \sin \theta + A_1 r \theta \cos \theta + \\ &\sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{(n+2)} + c_n r^{(-n)} + d_n r^{(2-n)}) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 식을 (15) 식에 대입하면 응력에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + \left(\frac{b_1}{r} - \frac{2c_1}{r^3} + 2d_1 r - \frac{2A_1}{r} + \frac{3}{4} \rho g r \right) \cdot \sin \theta - \\
&\quad \left(2a_2 + \frac{6c_2}{r^4} + \frac{4d_2}{r^2} \right) \cdot \cos 2\theta - \left(6a_3 r + 4b_3 r^3 + \frac{12c_3}{r^5} + \frac{10d_3}{r^3} + \frac{1}{4} \rho g r \right) \cdot \sin 3\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= -\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + \left(\frac{b_1}{r} + \frac{2c_1}{r^3} + 6d_1 r + \frac{1}{4} \rho g r \right) \cdot \sin \theta + \\
&\quad \left(2a_2 + 12b_2 r^2 + \frac{6c_2}{r^4} \right) \cdot \cos 2\theta + \left(6a_3 r + 20b_3 r^3 + \frac{12c_3}{r^5} + \frac{2d_3}{r^3} + \frac{1}{4} \rho g r \right) \cdot \sin 3\theta \\
\tau_{r\theta} &= \frac{A_0}{r^2} + \left(-\frac{b_1}{r} + \frac{2c_1}{r^3} - 2d_1 r + \frac{1}{4} \rho g r \right) \cdot \cos \theta + \\
&\quad \left(2a_2 + 6b_2 r^2 - \frac{6c_2}{r^4} - \frac{2d_2}{r^2} \right) \cdot \sin 2\theta - \left(6a_3 r + 12b_3 r^3 - \frac{12c_3}{r^5} - \frac{6d_3}{r^3} + \frac{1}{4} \rho g r \right) \cdot \cos 3\theta
\end{aligned} \tag{17}$$

(17) 식에 경계조건

① $r \rightarrow \infty$ 일 경우

$$\sigma_x = -k \rho g (h - r \sin \theta)$$

$$\sigma_y = \rho g (h - r \sin \theta)$$

$$\tau_{xy} = 0$$

② $\sigma_r(r_0) = 0$

③ $\sigma_r(r_0) = 0$

을 각각 대입하면, 토피가 얇은 무한탄성체내의 응력을 산정할 수 있다. 이를 평면변형률의 상태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -s \left[\frac{1}{2} (1+k) (1-X^2) - \frac{r_0}{4h} \left(-\frac{3-2\nu_R}{1-\nu_R} X + \left(\frac{\nu_R}{1-\nu_R} - k \right) X^3 + (k+3) \frac{1}{X} \right) \right] \cdot \sin \theta \\
&\quad - \frac{1}{2} (1-k) (1-4X^2+3X^4) \cos 2\theta + \frac{(1-k)}{4} \frac{r_0}{h} \left(\frac{1}{X} + 4X^5 - 5X^3 \right) \cdot \sin 3\theta \\
\sigma_{\theta\theta} &= -s \left[\frac{1}{2} (1+k) (1+X^2) - \frac{r_0}{4h} \left(\frac{1-2\nu_R}{1-\nu_R} X - \left(\frac{\nu_R}{1-\nu_R} - k \right) X^3 + (3k+1) \frac{1}{X} \right) \right] \cdot \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{2} (1-k) (1+3X^4) \cos 2\theta - \frac{(1-k)}{4} \frac{r_0}{h} \left(\frac{1}{X} + 4X^5 - 3X^3 \right) \cdot \sin 3\theta \\
\tau_{r\theta} &= -s \left[\frac{r_0}{4h} \left(\frac{1-2\nu_R}{1-\nu_R} X + \left(\frac{\nu_R}{1-\nu_R} - k \right) X^3 - (1-k) \frac{1}{X} \right) \right] \cdot \cos \theta \\
&\quad + \frac{1}{2} (1-k) (1+2X^2-3X^4) \sin 2\theta + \frac{(1-k)}{4} \frac{r_0}{h} \left(\frac{1}{X} - 4X^5 - 3X^3 \right) \cdot \cos 3\theta
\end{aligned} \tag{18}$$

단, $X = r_0 / r$, ν_R : 지반의 포아송비

평면변형률 상태의 응력분포의 한 예를 Fig 3 에 나타내었다.

4. 토피가 얇은 터널의 안정해석

토피가 얇은 터널에서 터널을 굴착했을 경우 지반에 발생하는 형상탄성변형에너지는 다음과 같다.

$$U_s = \frac{1}{6G} [(ks)^2 + (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + ks) - 3\sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\tau_{r\theta}^2] \tag{19}$$

앞의 해석에서와 마찬가지로 (18) 식의 응력에 대한 값을 (19) 식에 대입하여 산정한 U_s 와 Table 1 의 항목조건에 따라 정해지는 형상탄성

변형에너지 \overline{U}_S 를 비교하면 지반의 소성화 여부를 판정할 수 있다. 즉 지반 포텐셜이 항상 (+)의 값을 지닌다면 터널은 무지보로 자립할 수 있다. 또한 지반에 소성화 영역이 전혀 발생하지 않을 조건은 $X = 1$ 에서 $\overline{U}_S > U_S$ 를 만족하면 된다.

(18) 식의 응력분포에 대한 지반의 소성화 여부를 Von Mises의 항복조건을 사용하여 Fig 4에 나타내었다.

5. 결 론

탄성론에 의한 무한탄성체 내에 축조된 무지보 터널주변 지반의 응력분포와 안정해석 및 중력장 내에 축조된 무지보 터널의 응력분포와 안정해석의 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 무한탄성체 내에 축조된 터널주변 지반의 응력분포 해석으로부터 축압계수 k 가 1일 때는 전단응력 $\tau_{r\theta}(r, \theta) = 0$ 이지만, $k \neq 1$ 일 때는 늘 터널주변에 전단응력이 발생함을 알 수 있다. 접선방향응력 $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ 는 터널벽에서 최대이고, 터널의 중심에서 멀어짐에 따라 차차 감소하여 $r = 2r_0$ 이상의 위치에서는 거의 굴착전의 응력과 같아짐을 보이고 있으며 반경방향 응력 $\sigma_{rr}(r, \theta)$ 도 마찬가지로 $r = 2r_0$ 이상의 거리에서 터널의 굴착에 의한 영향을 거의 무시할 수 있음을 보여주었다.
- (2) Von Mises의 항복조건에 의한 (1)의 안정해석을 한 결과, 터널벽에서 지반강도비의 한계가 $k = 1$ 일 경우 그 값이 2가 되는 데 이보다 작은 지반 강도비에서는 터널주변의 일정반경에서 항복이 발생함을 보여주었다. 반면 $k = 0.5$ 이면 터널측면 부근이 먼저 항복하고 $k = 1.5$ 이면 터널정부지점에서 먼저 항복이 발생함을 알 수 있었다. 이 때 소성화되는 영역의 최대반경은 $k = 1$ 일 때 가장 작고, $k = 1.5$ 일 경우가 가장 큼을 보여 주었다. 또한 각가의 경우에 대해 지반강도비가 커짐에 따라 소성화되는 영역이 점차 감소하고 있음을 알 수 있었다.
- (3) 중력장 내에 축조된 무지보 터널의 응력분포 해석으로부터 접선방향응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 는 (1)에서와 마찬가지로 터널벽에서 최대이고, 터널의 중심에서 멀어짐에 따라 점차 감소하고 있음을 보이고 있으며, 해석결과 $r = 2r_0$ 보다 먼 위치에서는 굴착전의 상태와 거의 일치함을 나타내었다. 또한 축압계수 k 의 값에 따라 응력분포의 양상이 다름을 알 수 있다. 축압계수 k 가 1 미만일 때는 $\theta = 0^\circ$ 부근에서, 1 이상일 때는 $\theta = -90^\circ$ 부근에서 접선방향응력이 최대값을 취하고 있다. 또한 $k = 1$ 일 경우 (1)에서와 마찬가지로 전단응력이 발생하지 않음을 알 수 있었다.
- (4) Von Mises의 항복조건에 의한 (3)의 안정해석을 한 결과, $k = 0.5$ 일 경우는 (2)에서와 거의 비슷한 경향을 보였으며 $k = 1.0$ 일 때 지반강도비가 작은 경우에는 무한 탄성체 내의 터널과는 달리 소성화 영역이 일정반경으로 발생되지 않고 지표면까지 소성화가 진행되었음을 볼 수 있었다. 또한 (2)의 경우와 마찬가지로 지반강도비가 증가함에 따라 소성화 영역이 점차 감소됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) 松本嘉司·西岡 隆·佐野可寸志, エネルギー論に基づくシールドトンネルの安定解析, 日本土木學會論文集, 第406號, 1989, 6.
- (2) 松本嘉司·西岡 隆·佐野可寸志, 土被りの浅いトンネルの事前設計, 日本土木學會論文集, 第394號, 1988, 6.
- (3) 西岡 隆·松本嘉司, 形状弾性ひずみエネルギーによるトンネル周邊地山の安定解析, 日本土木學會論文集, 第376號, 1986, 12.
- (4) 松本嘉司·西岡 隆·鹿野正人, 吹付コンクリートとロックボルトを用いたトンネルの特性と事前設計方法, 日本土木學會論文集, 第406號, 1989, 6.
- (5) Mindline, R.D. (1940). Stress Around a Tunnel, Trans. of ASCE, Vol. 105.
- (6) Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. (1972). Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity, Proc. ASCE, S.T. Div., Vol. 98, No. ST 4, pp. 949-954
- (7) Drucker, D.C. and Prager, W. (1952). Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Quart. Appl. Math., Vol. 10, pp. 157-165
- (8) Timoshenko, S. and Goodier, J.N. (1934). Theory of Elasticity, McGraw-Hill
- (9) 홍성영, "터널의 설계이론", 탐구문화사, 1993.

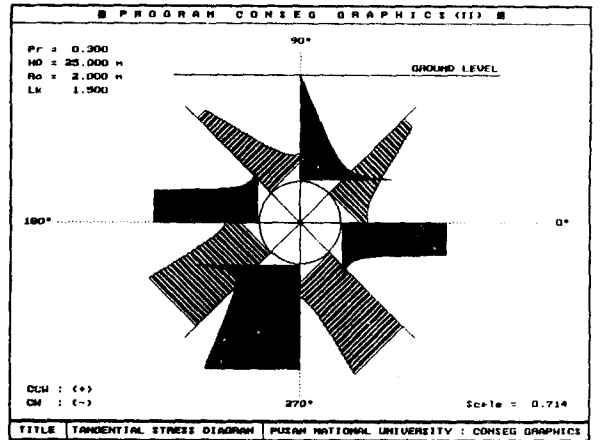
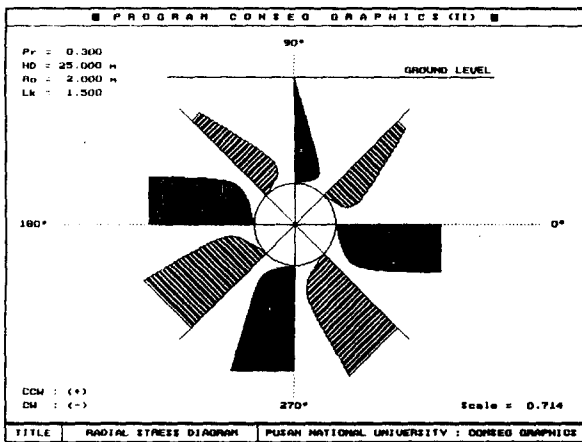
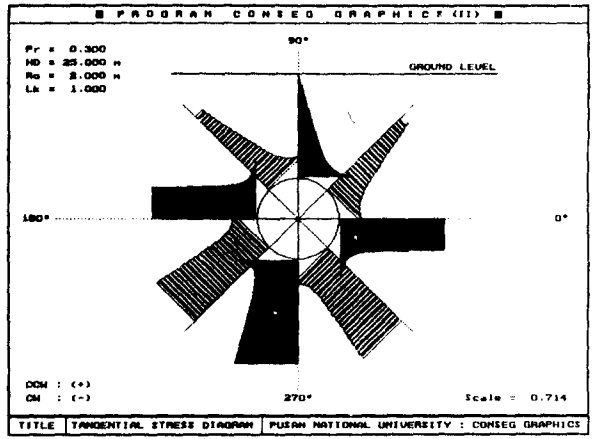
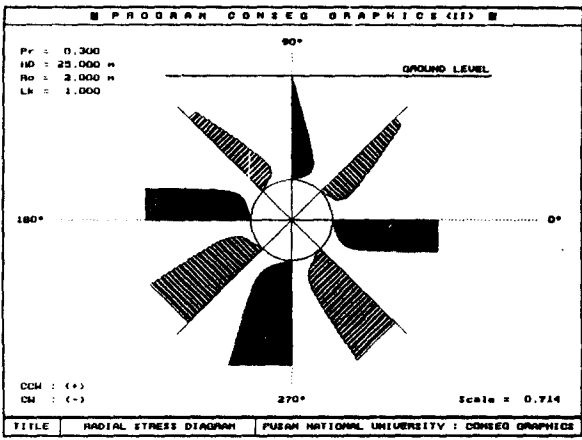
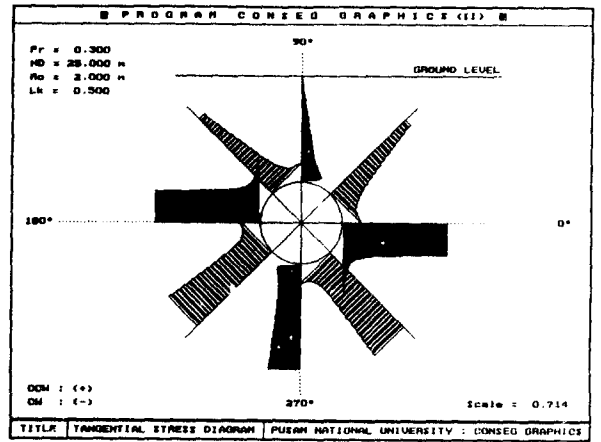
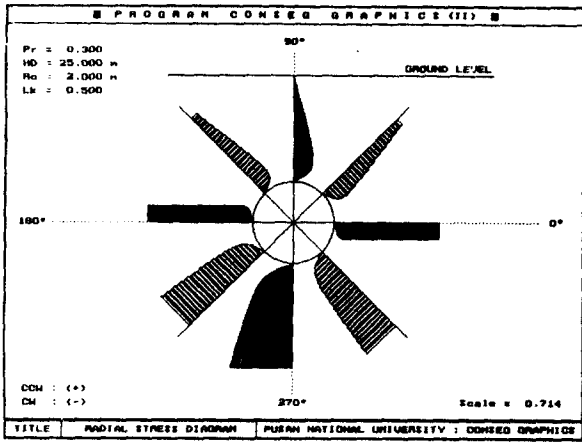


Fig 3 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널주변 지반의 응력분포

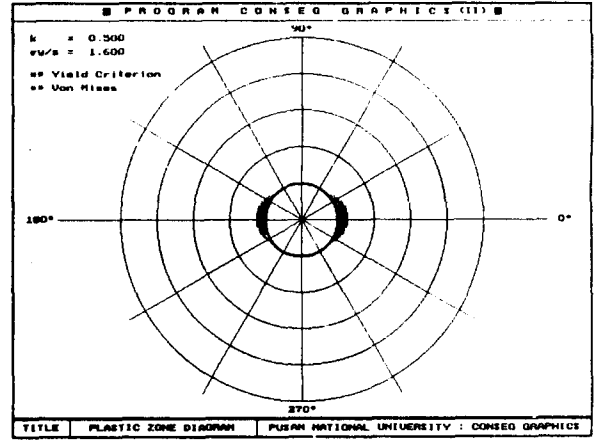
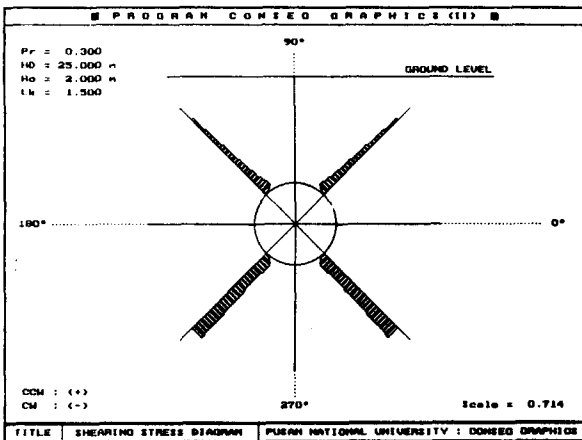
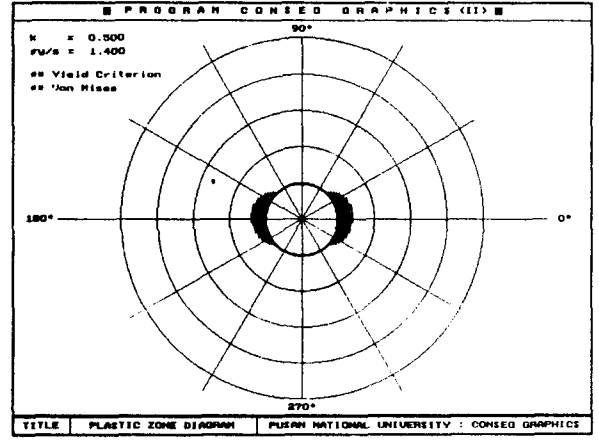
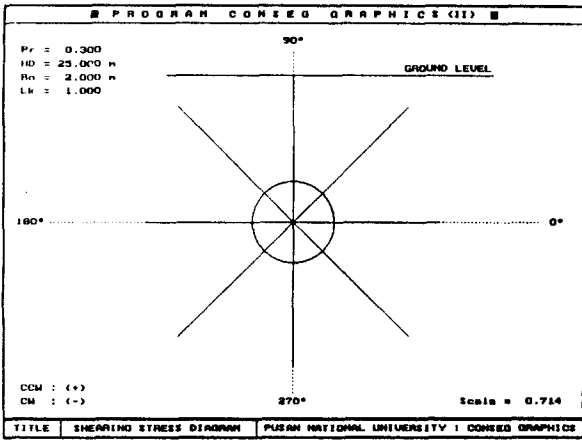
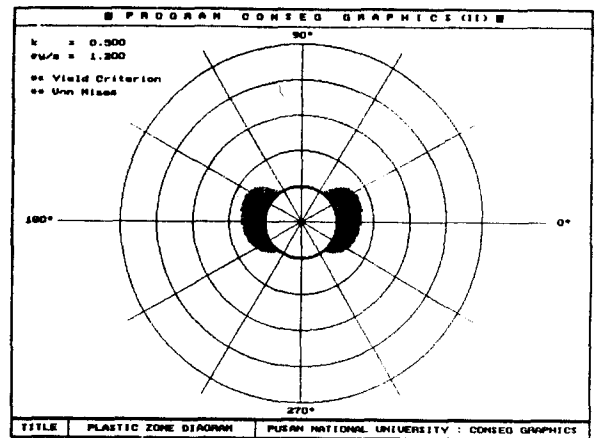
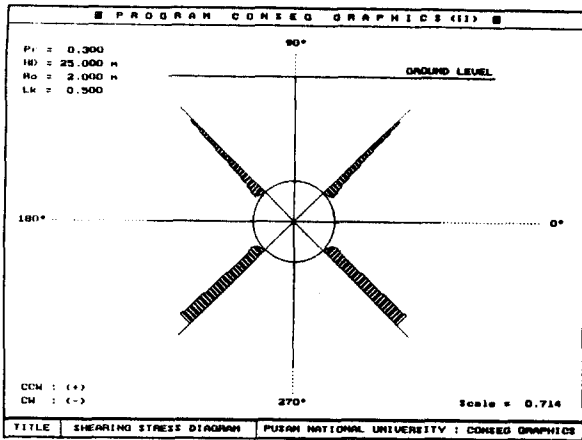


Fig 3 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널 주변 지반의 응력분포

Fig 4 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널 주변 지반의 소성영역

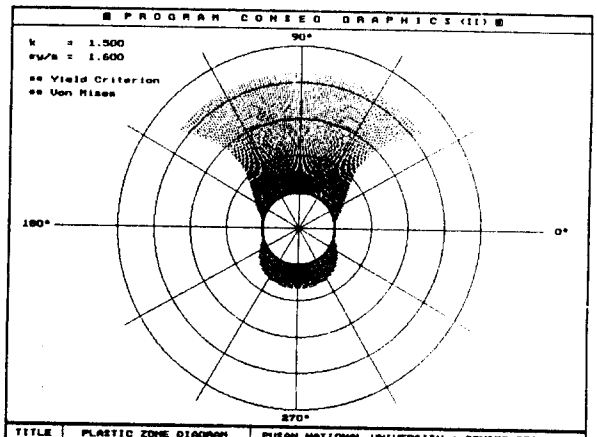
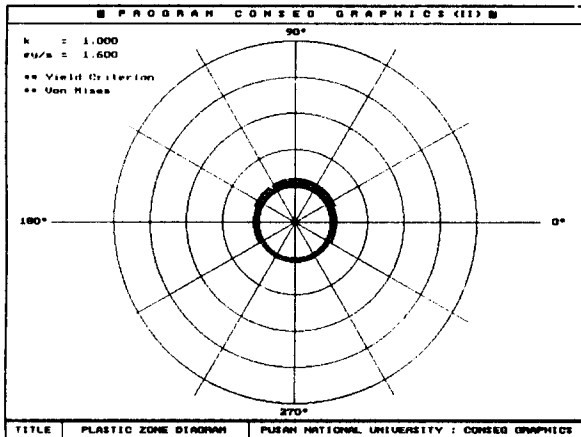
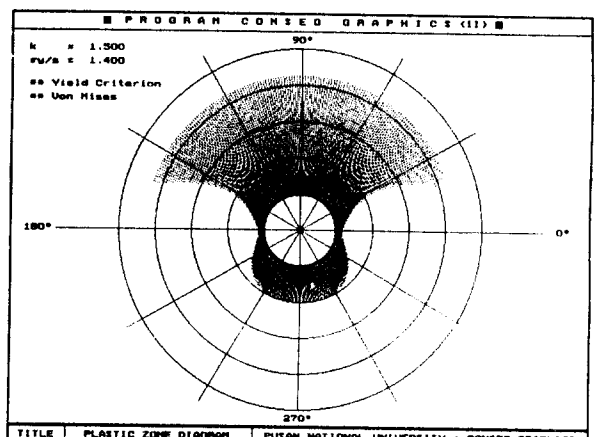
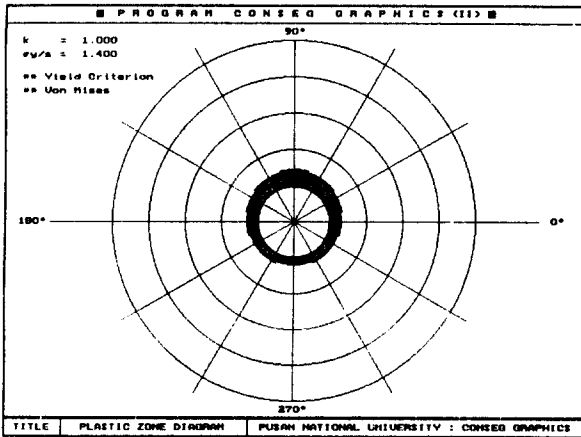
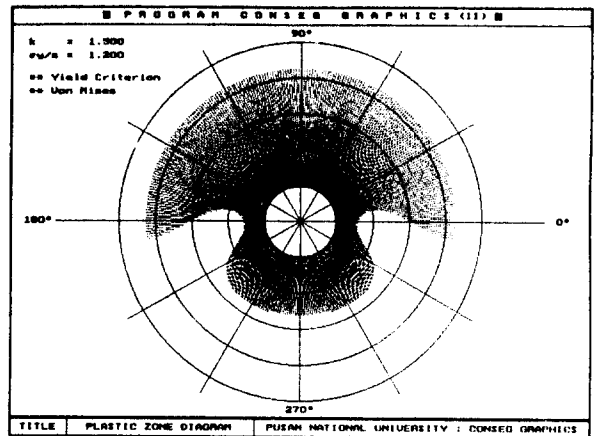
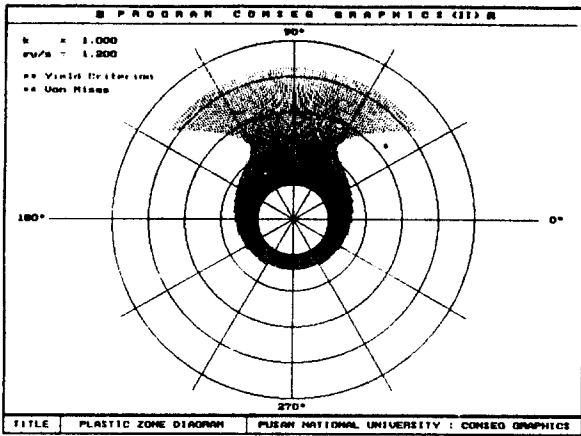


Fig 4 중력장 내에 축조된 무지보 원형터널주변 지반의 소성영역