

콘크리트 탄성계수의 미시역학적 추정

Evaluation of Elastic Modulus of Concrete Using Micro-mechanics Models

* 유 동 우 ** 조 호 진 *** 송 하 원 **** 변 근 주
You, Dong-Woo Cho, Ho-Jin Song, Ha-Won Byun, Keun-Joo

ABSTRACT

Although heterogeneous materials consisted of micro-constituents are complicated, it is possible to evaluate effective elastic moduli by using micro-mechanics models. In order to evaluate effective elastic moduli of concrete, all aggregates in a representative volume element(RVE) are assumed spherical and randomly distributed.

A dilute distribution of inclusions is considered first, and the corresponding overall elastic moduli of the RVE are estimated. Then, the self-consistent method is used in order to take into account the interaction effects. The elastic moduli of concrete are calculated using the models and compared with those of experiment for different volume fractions of the aggregates and elastic moduli of the mortar and the aggregates.

1. 서론

콘크리트는 구조물을 설계할 때 단일 재료로 취급되거나 크게 골재와 모르타르로 구성된 복합재료이다. 이와 같이 큰 길이의 척도로 볼때는 단일 재료라 할지라도 작은 척도로 볼때는 여러종류의 구성요소로 이루어진 불균일한 재료는 많다. 여기서 구성요소보다 충분히 큰 척도로 재료를 보는것을 거시적(macro-scopic)이라 하고 구성요소와 거의 비슷한 척도로 재료를 보는것을 미시적(micro-scopic)이라 한다. 따라서 콘크리트는 거시적으로는 균일(homogeneous)하나 미시적으로는 골재와 모르타르로 구성된 불균일(heterogeneous)한 재료이다.

보통 미시적으로 불균일한 재료에 대해

공학적으로 필요한 정보는 각각의 미소요소의 기동이 아니라 거시적인 재료의 특성이다. 이를 위해 미시적으로 불균일한 재료를 거시적으로 균일한 재료로서 취급하는 것은 중요하며 이를 균일화(homogenization)라 한다. 균일화의 결과 얻어지는 거시적인 재료특성을 유효(effective)물성 혹은 평균(overall)물성이라 부른다. 균일화를 할때 미소요소의 기동을 고려하는 것은 중요하나 요소의 수가 상당히 많은 경우 구성된 요소 각각의 기동을 엄밀하게 고려하는 것은 비현실적이며, 어떤 형태들간에 평균화(averaging)가 필요하다. 한편 요소들 사이의 상호작용의 영향으로 요소자체가 단순한 물질이라 할지라도 미소구조가 복잡한 경우 요소의 기동은 복잡해진다.

대표적인 복합재료의 유효물성치를 구하기 위하여 미소요소의 기동을 재료전체의 기동에 반영하는 개념과 서로 상호작용을 하는 미소요소의 기동을 추정하는 미시역

* 연세대학교 토목공학과 박사과정
** 연세대학교 토목공학과 석사과정
*** 연세대학교 토목공학과 조교수
**** 연세대학교 토목공학과 교수

학적 개념은 중요하다.

본 논문은 이상의 미시역학적 개념들을 이용하여 복합재료인 콘크리트의 유효탄성계수를 추정하기 위하여 Dilute Distribution Method(DDM)를 사용한다. 또한 골재간의 상호작용의 영향을 알아보기 위해 Self-Consistent Method(SCM)를 사용하며 콘크리트 공시체의 실험으로 얻어진 탄성계수와 비교한다.

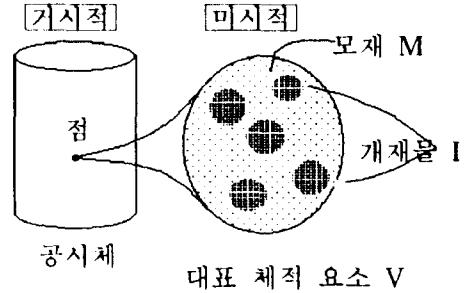


Fig.1 Specimen of heterogeneous material

2. 체적 평균

미시적 길이의 척도와 거시적 길이 척도에 의해 표현되는 응력과 변형률의 물리장을 각각 미시적물리장(micro-field) 그리고 거시적물리장(macro-field)이라 한다. 전자는 미소요소의 응력과 변형률, 후자는 균일화된 재료의 응력과 변형률을 나타낸다. Fig.1에서 보이는 불균일 재료의 공시체는 미시적으로는 크게 모재(Matrix)와 개재물(Inclusion)로 이루어진 상당히 큰 영역이라 할지라도 거시적으로는 한 점에 대응되며 해당영역에서의 미시적 물리장의 체적평균이 대응하는 거시적 한점의 거시적 물리장이 된다. 이때 해당영역을 대표 체적 요소(Representative Volume Element : RVE)라 한다. 균일화된 재료의 유효물성은 거시적 물리장과 관계가 있으므로 미시적 물리장의 대표 체적 요소에서의 체적평균으로부터 유효물성이 결정된다.

즉, 거시적 응력과 변형률을 각각 $\langle \sigma_{ij} \rangle_V$ 와 $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V$ 라하면 미시적 응력 $\sigma_{ij}(x)$ 와 변형률 $\varepsilon_{ij}(x)$ 로부터

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x) dV \dots (1)_a$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV \dots (1)_b$$

이다.

특히 위의 불균일 재료가 콘크리트라면 모재인 모르타와 개재물인 골재의 각각의 탄성계수를 구하고 체적평균을 취하는 것으로서 유효탄성계수를 구할 수 있다.

이러한 RVE모델에 있어서 탄성계수를 추정하는 방법으로 엄밀해를 구하는 방법과 범위한계(bounds)로 나타내는 방법이 있는데¹⁾, 본 연구는 엄밀해를 구하는 방법으로 DDM과 SCM을 사용하여 콘크리트의 탄성계수를 추정하였으며 실험결과와 비교하였다.

3. 유효물성계수

모재와 개재물이 탄성텐서 C_{ijkl}^M 과 C_{ijkl}^I 를 갖는 선형탄성체일때 유효탄성텐서 \bar{C}_{ijkl} 은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_V = \bar{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_V \dots (2)$$

또한 유효 Compliance \bar{D}_{ijkl} 은

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_V = \bar{D}_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle_V \dots (3)$$

으로 부터 정의된다.

Fig.2에서처럼 RVE내의 개재물($\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_a$)은 모재(M)내에 구형으로 불규칙적으로 분포되어있고 모재와 개재물을 각기 다른 탄성계수를 갖는 선형탄성재료로 가정하면 모재와 개재물의 탄성텐서와 Compliance 텐서는 다음식으로 표시된다.

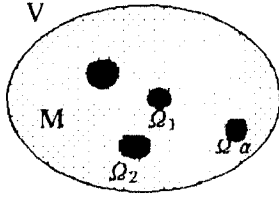


Fig.3 RVE containing spherical aggregates

$$C = 3KE^1 + 2\mu E^2, \quad D = \frac{1}{3K} E^1 + \frac{1}{2\mu} E^2 \quad \dots \quad 4)$$

$$C^a = 3K^a E^1 + 2\mu^a E^2, \quad D^a = \frac{1}{3K^a} E^1 + \frac{1}{2\mu^a} E^2 \quad \dots \quad 5)$$

여기서 K, K^a 는 체적탄성계수 이고 μ, μ^a 는 전단탄성계수이며 E^1 과 E^2 는 기본동방성텐서²⁾이다.

한편 거시적 유효텐서는 다음과 같다.

$$\bar{C} = 3\bar{K}E^1 + 2\bar{\mu}E^2, \quad \bar{D} = \frac{1}{3\bar{K}} E^1 + \frac{1}{2\bar{\mu}} E^2 \quad \dots \quad 6)$$

4. Dilute Distribution Method(DDM)

DDM은 개재물의 체적함유율이 비교적 적은 경우 한개의 개재물의 거동을 모재의 탄성치를 갖고 있는 무한체에 고립되어 존재하는 개재물의 거동으로 근사하는 방법으로 유효 Compliance텐서는 다음과 같다.

$$\bar{D} = \left\{ I^{(4)} + \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} (\Lambda^{\alpha} S^{\alpha})^{-1} \right\} : D \quad \dots \quad 7)$$

여기서, 집중텐서 Λ^{α} 는

$$\Lambda^{\alpha} = (C - C^{\alpha})^{-1} : C = \frac{K}{K - K^{\alpha}} E^1 + \frac{\mu}{\mu - \mu^{\alpha}} E^2 \quad \dots \quad 8)$$

이고 S^{α} 는 Eshelby 텐서³⁾이다.

8)식을 7)식에 대입하여 6)식과 비교하면

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \left\{ 1 + \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \left(\frac{\mu}{\mu - \mu^{\alpha}} - s_1 \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad \dots \quad 9)$$

을 얻는다. 이때 모든 개재물의 탄성계수가 같다면 다음식으로 된다.

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \left\{ 1 + f \left(\frac{\mu}{\mu - \mu^1} - s_2 \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad \dots \quad 10)$$

여기서 계수 s_1 과 s_2 는 모재의 포아송비 (ν)의 함수로서

$$s_1 = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)}, \quad s_2 = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)}$$

이며, f 는 개재물의 체적 함유율이다.

5. Self-Consistent Method(SCM)

SCM은 개재물간의 상호작용을 고려하여 유효물성치를 구하는 방법으로 모재의 탄성치 대신 유효탄성치를 갖는 무한체에 존재하는 고립개재물의 거동으로 개재물의 거동을 근사하는 방법이며 \bar{D} 는 다음과 같다.

$$\bar{D} = D + \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} (D^{\alpha} - D) : C^{\alpha} : \bar{\Lambda}^{\alpha} : (\bar{\Lambda}^{\alpha} - \bar{S}^{\alpha})^{-1} : \bar{D} \quad \dots \quad 11)$$

여기서,

$$\bar{\Lambda}^{\alpha} = (\bar{C} - C^{\alpha})^{-1} : \bar{C} = \frac{\bar{K}}{K - K^{\alpha}} E^1 + \frac{\bar{\mu}}{\mu - \mu^{\alpha}} E^2 \quad \dots \quad 12)$$

DDM과 마찬가지로 정리하면

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \left(\frac{\mu^{\alpha}}{\mu} - 1 \right) \left\{ 1 + \left(\frac{\mu^{\alpha}}{\mu} - 1 \right) \bar{s}_2 \right\}^{-1} \quad \dots \quad 13)$$

이다.

여기서 유효 Eshelby텐서 \bar{S}^{-1} 는 다음과 같다.

$\bar{S}^{-1} = \bar{s}_1 E^1 + \bar{s}_2 E^2$ 이며,

$$\bar{s}_1 = \frac{1 + \bar{\nu}}{3(1 - \bar{\nu})}, \quad \bar{s}_2 = \frac{2(4 - 5\bar{\nu})}{15(1 - \bar{\nu})}$$

그리고 유효 포아송비 $\bar{\nu} = (3\bar{K} - 2\bar{\mu}) / (2(3\bar{K} + \bar{\mu}))$ 이다.

만일 개재물의 재료가 같다면

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + f \left(\frac{\mu^{\alpha}}{\mu} - 1 \right) \left\{ 1 + \left(\frac{\mu^{\alpha}}{\mu} - 1 \right) \bar{s}_2 \right\}^{-1} \quad \dots \quad 11)$$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + f \left(\frac{\bar{\mu}(\mu - \mu^1)}{\mu(\mu - \mu^1)} \right) \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu - \mu^1} - \bar{s}_2 \right)^{-1} \quad \dots \quad 12)$$

이다.

6. 실험값과 추정값의 비교

DDM과 SCM에 의한 유효탄성계수 추정값과 실험값을 비교하기 위하여 DDM과 SCM에 의한 식에 시멘트 모르티(모재)의 탄성계수값, 골재(개재물)의 탄성계수값을 대입한 후 골재의 체적함유율에 대한 유효탄성계수를 구하였다. 모재, 골재 및 콘크리트의 포아송비를 0.2로 하여 계산하였으며 각 실험치와 추정값과의 비교는 Table 1과 Table 2와 Fig.3과 같다.

Table 1 Elastic moduli for different aggregates

골재 종류	골재의 체적함유율(f)	탄성계수(kN/mm^2)				
		실험값 ^{4), 5)}			추정값(E_c)	
		시멘트 모르티 E_m	골재 E_a	콘크리트 E_c	DDM	SCM
자갈	0.3	19.2	62.0	27.5	28.0	27.0
	0.4	19.2	62.0	29.5	33.2	30.4
	0.5	19.2	62.0	32.5	40.6	34.5
Flint Gravel	0.25	40.5	74.5	47.2	49.2	47.1
	0.50	40.5	74.5	55.3	57.5	54.9
석회석	0.3	19.2	32.0	20.6	22.5	22.2
	0.4	19.2	32.0	22.3	24.0	23.5
	0.5	19.2	32.0	23.2	25.6	24.7

Table 2 Comparison with experiment

시 편 호	골재의 체적함유율(f)	탄성계수($\times 10^5 \text{ kg/cm}^2$)				
		실험값 ⁶⁾			추정값	
		시멘트 모르티 E_m	골재 (연마지석) E_a	콘크리트 E_c	DDM	SCM
CAA-1	0.18	1.07	2.60	1.13	1.26	1.25
CAA-2	0.18	1.07	2.60	1.28	1.26	1.25
CAA-3	0.18	1.07	2.60	1.18	1.26	1.25
CB-1	0.25	1.07	2.60	1.29	1.35	1.33
CB-2	0.25	1.07	2.60	1.14	1.35	1.33
CB-3	0.25	1.07	2.60	1.31	1.35	1.33
CC-1	0.41	1.07	2.60	1.33	1.62	1.54
CC-2	0.41	1.07	2.60	1.45	1.62	1.54
CC-3	0.41	1.07	2.60	1.31	1.62	1.54

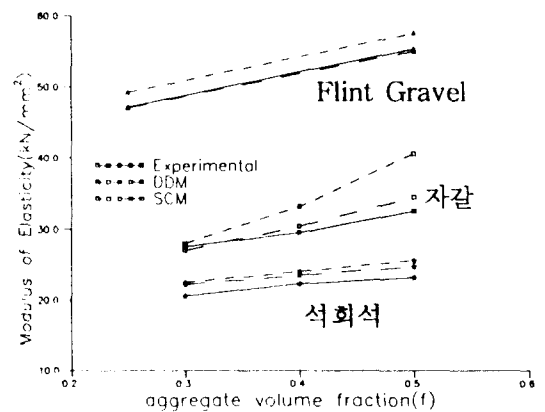


Fig.3 Comparisons of modulus of elasticity

Table 2의 콘크리트의 탄성계수의 실험값은 공시체에 실린더형 골재가 이상적으로 배열된 경우의 값으로 추정값은 미시역학

적 방법에 의해 유도된 DDM과 SCM의 두 기법에 의해 계산된 값이다. Fig.3은 Table 1의 결과를 도시한 것으로 DDM과 SCM의 결과는 실험값과 근사치를 보였으며 골재의 체적분율이 적을수록 실험값에 가까운 결과를 보였다. 또한 체적분율이 커질수록 SCM에 의한 추정값이 DDM에 의한 추정값보다 실험값에 가까운 것을 나타냈는데 이는 SCM이 골재간의 상호작용을 고려한 때문이라 생각된다.

7. 결론

미시적으로 불균일 재료인 콘크리트의 유효탄성계수를 추정하기 위하여 미시역학의 개념을 도입하여 유도된 Dilute Distribution Method와 Self-Consistent Method를 사용하였다. 콘크리트의 모르티와 골재의 탄성계수값과 골재의 체적함유율을 변화시키며 구한 유효탄성계수가 실험에서 구한 탄성계수값과 잘 일치함을 알았고 골재의 체적분율이 커질수록 상호작용의 영향을 고려한 유효탄성계수가 실험값에 접근함을 알았다.

현재 개선된 미시역학적 기법을 콘크리트에 적용하는 연구로 골재와 시멘트모르티의 접합부의 상호작용까지를 고려하는 연구가 진행중이다.

참고문헌

- 1.Nemat-Nasser, S. and Hori, M., "Elastic Solids with Microdefects", in *Micromechanics and Inhomogeneity*, (Edited by Weng, G.J. et. al.), 1989, pp.297-320
- 2.Hill, R., "A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials", *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.13, pp.213-222
- 3.Eshelby, J.D., "Elastic Inclusions and Inhomogeneities", in *Progress in Solid Mechanics 2*, (Edited by Sneddon, I.N. and Hill, R.), North-Holland, 1961, pp. 89-140

- 4.Counto, V.J., "The Effect of the Elastic Modulus of Aggregates on Elastic Modulus, Creep, and Creep Recovery of Concrete", *Magazine of Concrete Research* Vol. 16, No.48, 1964, pp.129-138

- 5.Hirsh, T.J., "Modulus of Elasticity of Concrete Affected by Elastic Moduli of Cement Paste Matrix and Aggregate", *J. of ACI*, Vol. 59, No. 3, 1962, pp.427-452

- 6.김태진, "복합재료모형을 이용한 콘크리트의 탄성계수 평가에 관한 연구," 연세대학교 대학원 석사학위 논문, 1993년