

# 압전체 기판에서의 에너지 포획 Energy Trapping in the piezoelectric Substrate

이 개 명\*  
박 창 업

제주대학교 전기공학과  
연세대학교 전기공학과

Gae Myoung Lee  
Chang Yub Park

Dept. of Electrical Eng. Cheju Univ.  
Dept. of Electrical Eng. Yonsei Univ.

## Abstract

Particle displacement distributions of the fundamental mode and overtone modes in an energy-trapped single resonator and an energy-trapped double acoustically coupled filter using the thickness shear vibration were calculated. And the effects of the width of a pair of partial electrodes, the width of the gap between two pairs of partial electrodes and the magnitude of the plate back on the displacement distributions of the symmetric vibration mode and anti-symmetric vibration mode of the resonators and the filters were investigated.

## I 서론

대부분의 두께진동을 사용하는 필터나 공진자와 같은 주파수 소자는 에너지포획 효과를 이용하고 있다.

1960년대 초반 R. Bechmann이 최초로 에너지 포획형 공진자 구조의 핵심인 부분전극(Partial electrode)을 사용하여 공진자를 만들었고,<sup>(1)</sup> 이 형태의 공진자에 대한 이론적인 고찰은 W. Shockley 등이 차단주파수의 개념을 사용하여 무한 크기의 기판에 대해 행했으며 수정 기판을 사용하여 에너지 포획형 공진자를 구성하였다.<sup>(2)</sup> Onoe등은 유한 크기의 기판에 대해 이론적 해석을 행하였으며, 에너지 포획 모드 간의 결합을 이용한 이중결합 필터(Double-coupled filter)를 제안하였다.<sup>(3)</sup> 그 후 에너지 포획형 공진자와 필터에 대한 각종 등가회로가 제시되었고,<sup>(4)</sup>

재료적인 면과 탄성학적인 면에서 고찰이 이루어 졌으며,<sup>(5)</sup> 등가회로 해석과 소자 설계에 관한 연구가 계속되었다.<sup>(6)</sup>

본 연구에서는 에너지 포획된 두께 전단 진동(Thickness shear vibration)에 대해 파동방정식을 풀어 변위 분포를 구하여 진동 형태에 대해 보다 명확한 이해를 얻고자 시도 하였으며, 에너지 포획된 공진자와 이중탄성 결합 필터의 주파수 저하량, 부분전극의 폭, 부분전극 간의 간격이 진동 형태에 미치는 영향을 조사하였다. 파동방정식을 푸는 과정에서 Onoe<sup>(3)</sup>와 G.Szentirmai<sup>(7)</sup>의 해석 방법을 참고하여 보다 물리적인 의미를 충실히 나타내는 진동 변위 식과 보다 간단한 전개 과정을 취하는 경계조건을 제안하여 사용 하였다.

## II 에너지 포획과 에너지 포획 모드간의 탄성 결합

본 장에서는 압전체 기판의 두께 전단 진동에 대해 에너

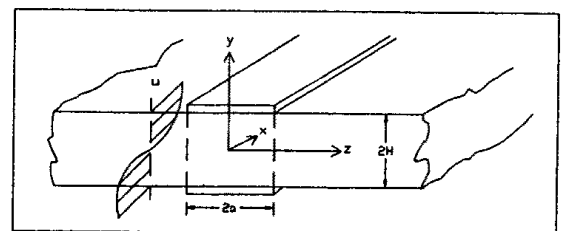


Fig.1 The structure of an energy trapped resonator using thickness shear vibration which its substrate is infinite

지 포획 이론과 에너지 포획 모드 간의 탄성 결합 이론을 전개한다. 주어진 경계조건하에서 파동방정식을 풀어 각 진동모드의 공진 주파수와 변위 분포를 구하는 과정이 주된 내용이 될 것이다.

### 1. 에너지 포획

Fig.1은  $x$ 방향으로 무한한 띠 전극을 갖는 에너지 포획 공진자이다. 입자의 변위( Particle displacement)의 방향이  $z$ 방향인 두께전단진동을 고려하고 있다. 입자의 변위를 구하기 위해 경계조건을 갖는 파동방정식을 풀어야 한다.

파동방정식을 풀면 다음과 같은 형태의 해를 얻게 된다.

$$u = u(z) \sin\left(\frac{n\pi y}{2H}\right) e^{i\omega t} \quad (1)$$

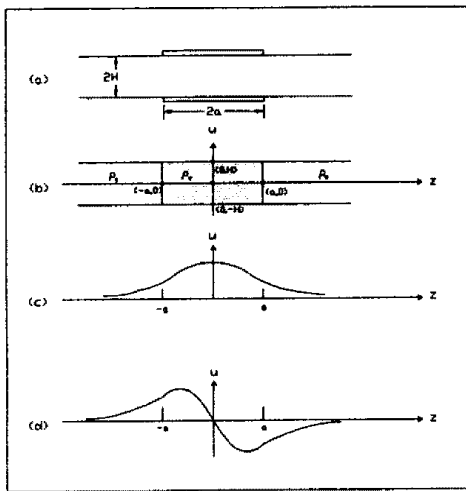


Fig.2 (a) an energy-trapped resonator

(b) the consideration of the mass a pair of partial electrodes

(c) a fundamental symmetric mode

(d) a fundamental antisymmetric mode

윗 식에서 편의상  $n=1$ , 즉 두께 방향으로서의 기본 모드인 경우를 선택하자. 진동 모드는 변위 분포가  $z=0$ 면에 대칭인 진동과  $z=0$ 면에 반대칭인 진동으로 나누어 생각할 수 있다. 전자를 대칭모드(Symmetric mode), 후자를 반대칭 모드(Antisymmetric mode)라 한다. Fig.2(c)와 같은 대칭진동(Symmetric vibration)에 대해서는

$$\begin{aligned} u_1(z) &= Be^{\gamma(z+a)} & ; & \quad z < -a \\ u_2(z) &= A \cos \gamma z & ; & \quad -a \leq z \leq a \\ u_3(z) &= Be^{-\gamma(z-a)} & ; & \quad z > a \end{aligned} \quad (2)$$

와 같은 변위해를, Fig.2(d)와 같은 반대칭진동(Antisymmetric vibration)에 대해서는

$$\begin{aligned} u_1(z) &= Be^{\gamma(z+a)} & ; & \quad z < -a \\ u_2(z) &= A \sin \gamma z & ; & \quad -a \leq z \leq -a \\ u_3(z) &= -Be^{-\gamma(z-a)} & ; & \quad z > a \end{aligned} \quad (3)$$

와 같은 변위해를 추정할 수 있다. 여기서

$$\gamma = \frac{\pi}{2H} \sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

$$\gamma' = \frac{\pi}{2H} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \quad (5)$$

이다. 경계조건  $z=\pm a$ 에서 연속이라는 경계조건을 사용하여 다음과 같은 조건식을 얻을 수 있다.

조건식은 대칭모드에 대해서는

$$\frac{\gamma}{\gamma'} \tan \gamma a = 1 \quad (6)$$

이 되고, 반대칭모드에 대해서는

$$\frac{\gamma}{\gamma'} \cot \gamma a = -1 \quad (7)$$

이 된다.

식 (6)과 식 (7)의 해를 구하여 각각 식 (2)와 식 (3)에 대입하면 대칭진동과 반대칭진동의 변위 분포를 구할 수 있다.

### 4. 이중 결합 필터

두 에너지 포획 모드간의 결합을 이용하는 필터로서 이중결합필터(Double coupled filter)라는 것이 있다. Fig.3(a)에 나타낸 것처럼 하나의 기판 위에 구성된 두 에너지 포획 공진자를 근접시키면 두 공진자의 전극에 의해 여기된 두 탄성파가 충분히 감쇄되지 않고 상호간섭하여 새로운 결합모드가 만들어 진다. 생성되는 모드에는 공진자에서와 같이 변위분포가  $z=0$ 인 면에 대칭인 모드(Symmetric mode)와 반대칭인 모드(Antisymmetric mode)가 있다.

앞 절에서 설정한 두께전단진동에서 이중결합의 문제를 검토해 보자. 앞 절에서와 같이 변위의 방향은  $x$ 방향이며,  $x$ 방향으로 시편과 전극의 길이는 무한대라고 가정한다.

Fig.3(a)와 같이 영역을 구분하고, 앞 절의 식(2)와 식(3)과 같이 각 영역에서의 해를 설정하도록 한다. 먼저 대칭진동에 대해서는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(z) &= Ae^{\gamma'(z+a+2b)} & ; & \quad z < -a-2b \\ u_2(z) &= -B \sin \gamma(z+a+b) + C \cos \gamma(z+a+b) & ; & \quad -a-2b \leq z < -a \\ u_3(z) &= D \cosh \gamma' z & ; & \quad -a \leq z < a \\ u_4(z) &= B \sin \gamma(z-a-b) + C \cos \gamma(z-a-b) & ; & \quad a \leq z < a+2b \\ u_5(z) &= Ae^{-\gamma'(z-a-2b)} & ; & \quad a+2b < z \end{aligned} \quad (8)$$

반대칭진동에 대해서는 다음과 같이 놓을 수 있다.

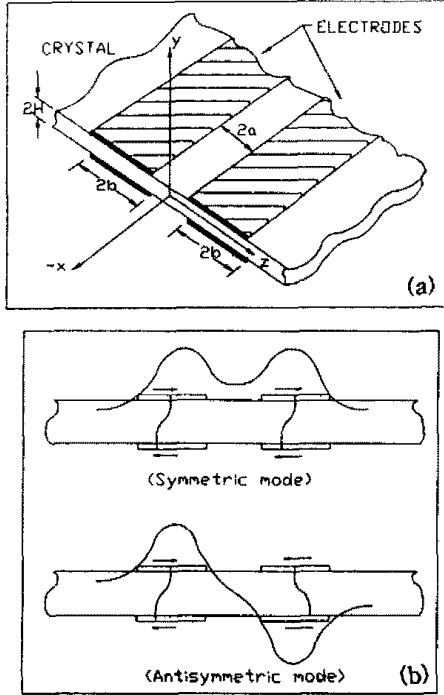


Fig.3 (a) a double acoustically coupled filter  
(b) a fundamental symmetric mode  
and a fundamental antisymmetric mode

$$\begin{aligned}
 u_1(z) &= -Ae^{\gamma'(z+a+2b)} & ; & \quad z \leq -a-2b \\
 u_2(z) &= B\sin \gamma(z+a+b) - C\cos \gamma(z+a+b) & ; & \quad -a-2b \leq z < -a \\
 u_3(z) &= D\sinh \gamma'z & ; & \quad -a \leq z < a \\
 u_4(z) &= B\sin \gamma(z-a-b) + C\cos \gamma(z-a-b) & ; & \quad a \leq z < a+2b \\
 u_5(z) &= Ae^{-\gamma'(z-a-2b)} & ; & \quad a+2b \leq z
 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)와 식 (9)에  $z=a$ ,  $z=a+2b$ 에서 변위와 변위의 미분이 연속이라는 조건을 대입하여 다음식을 얻을 수 있다. 조건식은 대칭진동에 대해서는

$$2b\gamma = \tan^{-1} \frac{\gamma'}{\gamma} + \tan^{-1} \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \tanh \gamma'a \right) \quad (10)$$

이 되고, 반대칭진동에 대해서는

$$2b\gamma = \tan^{-1} \frac{\gamma'}{\gamma} + \tan \left( \frac{\gamma'}{\gamma} \coth \gamma'a \right) \quad (11)$$

이 된다.

식 (10)과 식 (11)에 해를 구하여 식 (9)와 식 (10)에 대입하므로써 각각 대칭모드와 반대칭모드의 변위 분포를 구할 수 있다.

### III 시뮬레이션 방법

에너지 포획 공진자가 갖게 되는 단일 진동 모드의 경우에는 다음처럼 정의된 주파수 저하량  $\Delta$ 와 부분전극 폭  $a/H$ 가 변위분포에 미치는 영향을 조사하였고, 이중결합 필터가 갖게되는 이중 탄성 결합 모드의 경우에는 아래 식

처럼 정의되는 주파수 저하량  $\Delta$ 와 부분전극 폭  $b/H$  그리고 부분전극 간의 간격  $a/H$ 가 변위분포에 미치는 영향을 조사하였다. 또 단일 진동모드와 이중 탄성결합 모드의 기본과 고차 진동 변위 분포를 대칭모드와 반대칭모드로 구분하여 계산하였다. 변위 분포는 최대진폭이 1이 되도록 규준화시켰다.

$$\Delta = \frac{f_0' - f_0}{f_0'} \quad (12)$$

### IV 결과 및 고찰

실험 결과를 단일 진동 모드의 변위 분포와 이중결합 모드의 변위 분포, 두 부분으로 나누어 기술한다.

#### 1. 단일 진동 모드의 변위분포

본 절에서는 에너지 포획된 공진자의 대칭 모드와 반대칭 모드의 기본 진동과 고차진동의 변위 분포를 기술하고, 부분전극의 폭과 주파수 저하량이 대칭진동과 반대칭진동의 변위 분포에 미치는 영향을 설명한다.

#### (1) 에너지 포획된 공진자의 대칭 모드와 반대칭 모드

$$\Delta=0.01, \quad \frac{a}{H} = 48 \quad \text{인 에너지 포획된 공진자의 대칭진}$$

동모드와 반대칭진동모드의 제 3고차분까지의 변위 분포를 Fig.4에 나타내었다. 이 결과로부터 대칭진동의 제1, 제2, 제3 진동모드는 부분전극폭,  $2a$ 가 각각  $2, 2\lambda, 4\lambda$  이고 반대칭진동의 제1, 제2, 제3 진동모드는 부분전극의 폭  $2a$ 가 각각  $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$ 인 변위 분포를 갖음을 알 수 있다. 또 고차진동의 될 수록 전극 주변 부분의 감쇄량이 작아져 에너지 포획 효과가 감소됨을 보여준다.

#### (2) 부분전극의 폭이 에너지 포획된 공진자의 대칭모드와 반대칭모드에 미치는 영향

Fig.5의 실험결과는  $\Delta=0.01$ 로 고정하고  $\frac{a}{H}$ 를 8.8, 12,

24로 변화시키면서 기본 대칭모드와 기본 반대칭모드의 변위 분포를 계산한 결과이다. 이로부터  $\frac{a}{H}$ 가 커 질수록,

즉 부분전극의 폭이 커질수록 주변부분의 감쇄량이 증가하고 부분전극 밑 부분에 형성되는 변위 분포가 보다 온전하게 되어 에너지 포획효과가 증대됨을 알 수 있다.

#### (3) 주파수 저하량이 에너지 포획된 공진자의 대칭모드와 반대칭모드에 미치는 영향

Fig.6의 실험결과는  $\frac{a}{H}=12$ 로 고정하고  $\Delta$ 를 0.01, 0.1로

변화시키면서 기본 대칭진동과 기본 반대칭진동의 변위분포를 구한 것이다. 이로부터  $\Delta$ 의 증가는 변위분포에  $\frac{a}{H}$ 의 증가의 영향과 똑같이 부분전극 주변부분의 감쇄를 크게 한다.

## 2. 이중결합 진동모드의 변위분포

본 절에서는 이중결합 진동에서 대칭모드와 반대칭모드의 기본 진동과 고차 진동의 변위분포를 기술하고, 부분전극의 폭, 부분전극 간의 간격, 그리고 주파수 저하량이 대칭진동과 반대칭진동의 변위 분포에 미치는 영향을 설명한다.

### (1) 이중결합진동의 대칭모드와 반대칭모드

Fig.7은  $\Delta=0.1$ ,  $\frac{a}{H}=1$ ,  $\frac{b}{H}=6$ 인 이중결합필터의 제1, 제

2, 제3 대칭모드와 반대칭모드를 나타낸 것이다. 두 모두가 모두 고차 모드가 될수록 주변부분에서의 감쇄량이 줄어들게 되어, 에너지 포획 효과가 감소하게 되고, 두 공진자의 진동 모드간의 탄성결합이 강하게 된다.

### (2) 부분 전극 폭이 이중결합 진동의 대칭모드와 반대칭모드에 미치는 영향

Fig.8은  $\Delta=0.1$ ,  $\frac{a}{H}=1$  그리고  $\frac{b}{H}$ 를 1, 3, 6으로 변화시

키면서 기본 대칭모드와 기본 반대칭 모드의 변위분포를 구한 것이다. 이로부터 부분전극의 폭을 크게 할수록 두 모드 모두의 주변부분에서의 감쇄량이 증가한다. 이는 공진자 구조의 단일 진동 모드에서와 같은 결과이다. 따라서 부분전극 폭이 커 질수록 포획효과의 증대와 두 공진자의 진동모드 간에 탄성결합의 약화를 예상할 수 있다.

또  $\frac{a}{H}$ 가 작을 때에는 대칭진동의 경우에는 안 쪽에, 반

대칭진동의 경우에는 두 부분전극의 바깥쪽에 변위 파동의 마루나 골이 위치하게 되나  $\frac{b}{H}$ 가 증가할수록 변위 파동

의 마루나 골이 각자의 부분전극의 중심으로 이동하여 대칭성이 증가하게 된다.

### (3) 주파수 저하량이 이중결합 진동이 대칭모드와 반대칭모드에 미치는 영향

Fig.9는  $\frac{a}{H}=1$ ,  $\frac{b}{H}=3$  그리고  $\Delta$ 를 0.015, 0.05, 0.1로

변화시키면서 기본 대칭모드와 기본반대칭모드의 변위분포를 구한 것이다. 이로부터 주파수 저하량을 증가시킬수록 공진자 구조의 단일 진동모드에서와 같이 주변 부분에서의 감쇄량이 증가한다.

따라서 주파수저하량이 증가할수록 포획효과가 증대하고, 두 공진자의 진동 모드간에 탄성결합이 약해진다.

### (4) 부분전극 간의 거리와 이중결합진동의 대칭모드와 반대칭모드에 미치는 영향

Fig.10은  $\Delta=0.1$ ,  $\frac{b}{H}=1$ 로 고정하고  $\frac{a}{H}$ 를 1, 3으로

변화시키면서 기본대칭모드와 사대칭모드의 변위분포를 구한 것이다. 이 결과는 부분 전극 간의 거리가 멀어지므로 탄성결합이 약화됨을 보여주고 있다. 그리고 특이한 점은 부분전극 폭이 넓어지지 않음에도 불구하고 탄성 결합이 약화됨에 따라 각 부분전극 및부분에서의 변위분포의 대칭성의 증가함을 알 수 있다. 이는 거꾸로 설명하면 탄성결합이 강하게 이루어지면 부분전극 아래서의 본래의 진동의 변위 분포에 영향을 미치게 됨을 의미한다. Fig.10에서  $a/H=1$ 인 결과는 탄성결합이 없었으면 부분전극의 중심에 있어야 할 부분전극 아래서의 변위의 대칭면이 바깥방향으로 이동하였음을 보여준다고 볼 수 있다.

## V 결론

두계전단진동을 사용하는 에너지 포획공진자와 이중결합 필터에 대한 진동 변위 분포를 구하는 실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 에너지 포획 공진자와 이중결합 필터에서 기본과 고차 대칭진동모드가 반대칭진동모드의 정규화된 변위분포를 구하였다.

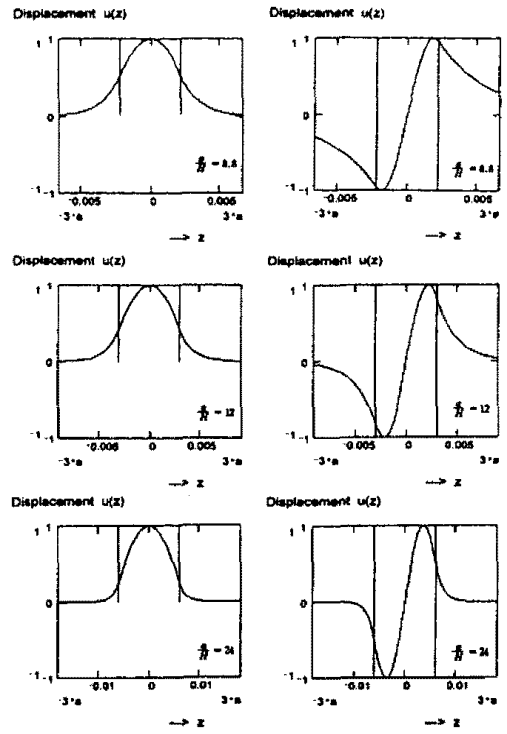
2. 같은 전극 조건에서 기본 진동과 더불어 고차 진동이 형성되는 경우 고차 진동이 될수록 부분전극 주변부분에서 변위분포의 감쇄가 작아지게 된다.

3. 대칭진동모드와 반대칭 진동모드의 변위분포에서 부분전극 폭과 주파수저하량이 증가하면 부분전극 주변부분의 감쇄가 커지게 되어 에너지 포획효과가 증대되게 되고, 나아가 부분전극 및 부분의 진동 변위분포에도 영향을 주게 된다. 이 경우 이중결합 필터에서는 탄성결합이 약해지게 된다.

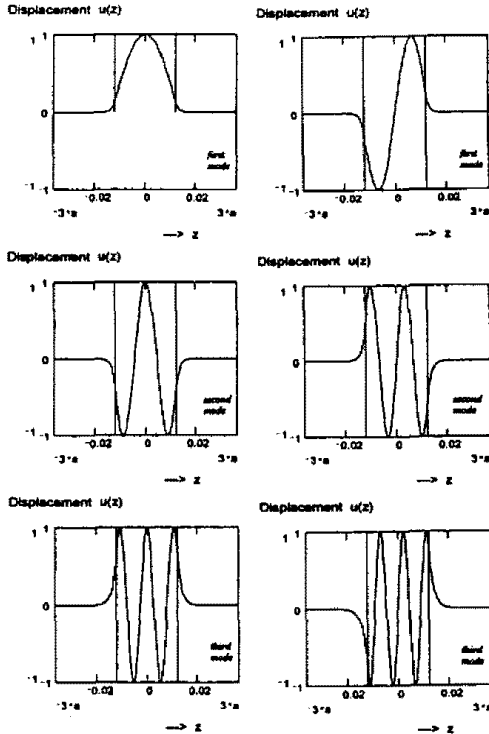
4. 이중결합 필터의 변위 분포에서 부분전극 간의 간격이 멀어지게 되면 탄성결합이 약해지게 되고, 부분전극 및 부분의 변위분포가 대칭성을 회복하는 쪽으로 영향을 준다.

참고 문헌

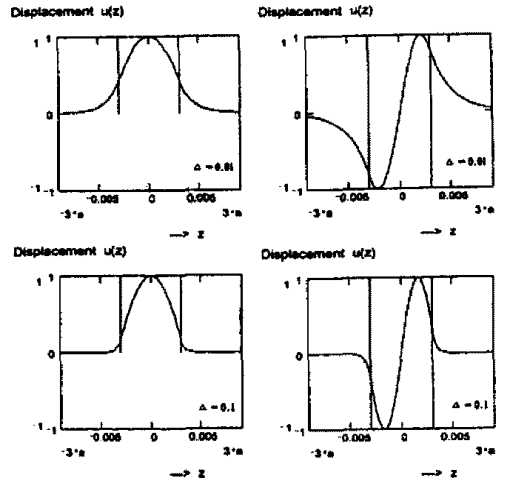
- (1) Bechmann, R : " Quartz AT-type filter crystals for the frequency range 0.7 to 60 Mc," Proc. IRE, Vol. 49, No. 2, pp. 523-524 (1961).
- (2) W.Sckockley, D.R.Curran and D.J.Koneval : " Energy trapping and related studies of multiple electrode filter crystals", Proc.17th Symp.on Frequency Control, p.88(1963).
- (3) 尾上, 十文字 : " エネルギーとじこめ形圧電共振子の解析", 信學誌, 48, 9, p.1574 (昭 40-09).
- (4) 十文字, 尾上 : " エネルギーとじこめ形 振動子の 等価回路," 信學會超音波研究, US69-33 (1970).
- (5) 永田, 中嶋, 佐佐木 : "VHF帯圧電セラミック共振子の開發", 信學論(C), 55-C, 7, p.345 (昭47-07).
- (6) T.Uno : "200MHz thickness extensional mode LiTaO<sub>3</sub> monolithic crystal filter", IEEE Trans., SU-22, 3, p.168 (1975).
- (7) G.C. Temes and S.K. Mitra : Modern filter theory and design, John Wiley & Sons, pp.199-206 (1973).



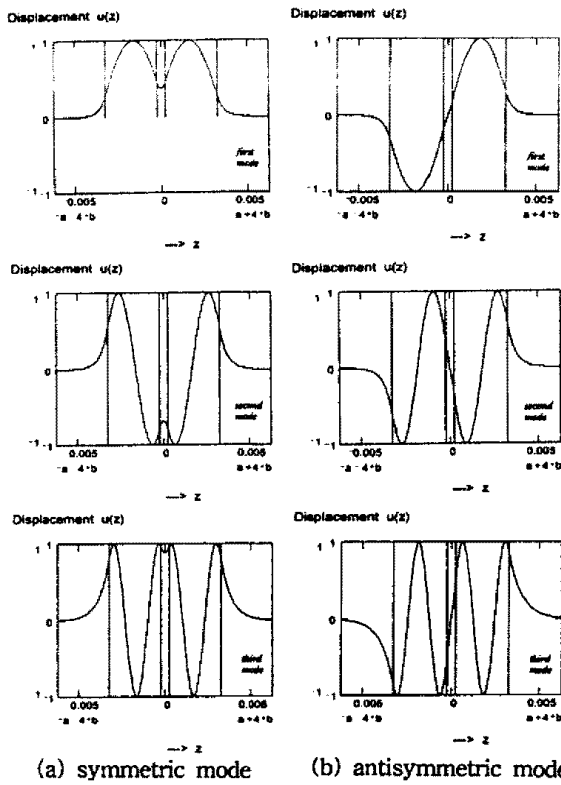
(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.5 Displacement distributions the energy trapped resonators with  $\Delta = 0.01$  and  $\frac{a}{H} = 8.8, 12, 24$  respectively



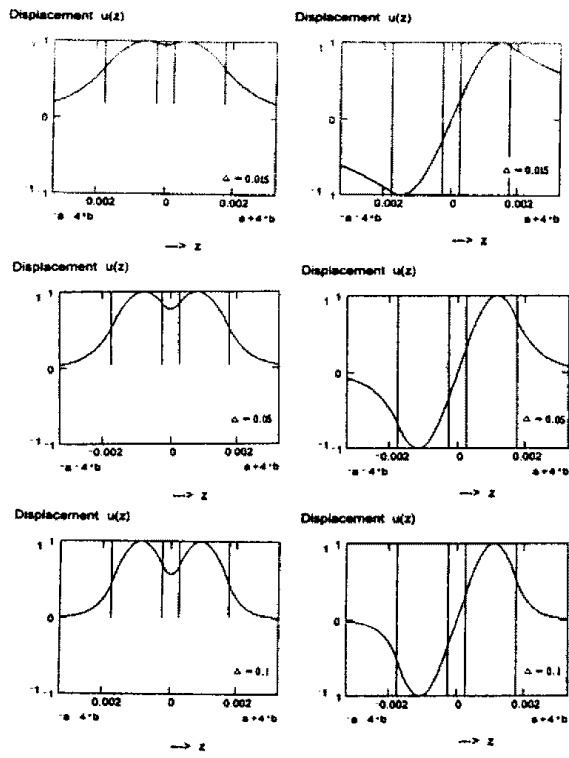
(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.4 Displacement distributions the energy trapped resonator with  $\Delta = 0.01$  and  $\frac{a}{H} = 48$



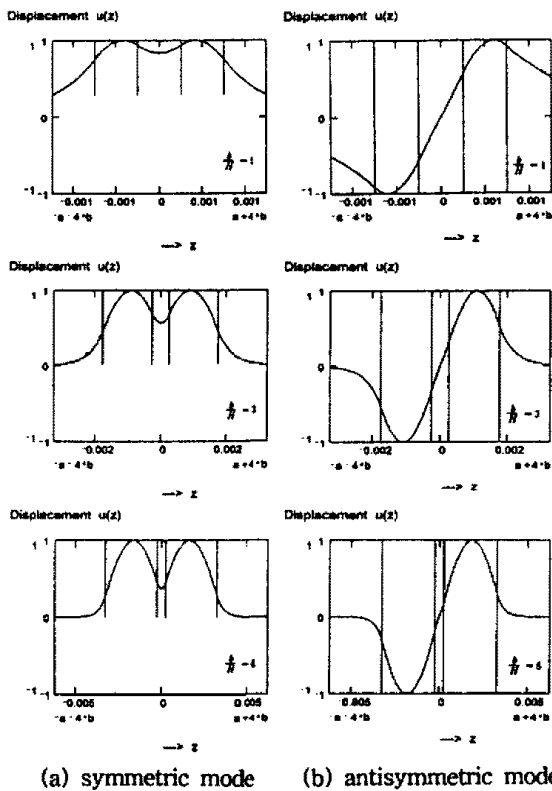
(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.6 Displacement distributions the energy trapped resonators with  $\frac{a}{H} = 12$  and  $\Delta = 0.01, 0.1$  respectively



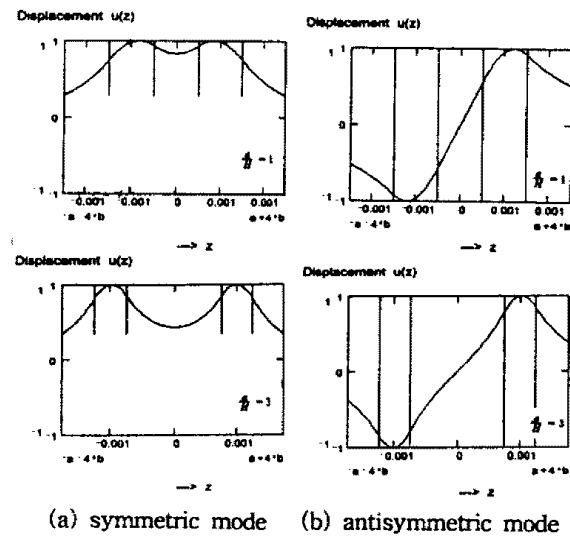
(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.7 Displacement distributions the double acoustically coupled filter with  $\Delta = 0.01$ ,  $\frac{a}{H} = 1$  and  $\frac{b}{H} = 6$  respectively



(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.9 Displacement distributions the double acoustically coupled filters with  $\frac{a}{H} = 1$ ,  $\frac{b}{H} = 3$  and  $\Delta = 0.015, 0.05, 0.1$  respectively



(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.8 Displacement distributions the double acoustically coupled filters with  $\Delta = 0.1$ ,  $\frac{a}{H} = 1$  and  $\frac{b}{H} = 1, 3, 6$  respectively



(a) symmetric mode (b) antisymmetric mode  
 Fig.10 Displacement distributions the double acoustically coupled filters with  $\Delta = 0.1$ ,  $\frac{b}{H} = 1$  and  $\frac{a}{H} = 3$  respectively