

變形된 셸요소를 이용한 板 및 셸 構造의
後挫屈 및 彈·塑性 有限要素解析
Post-buckling and Elasto-plastic Analysis of Shell Structures
using the Degenerated Shell Element

김 문 영* 민 병 철**
KIM, Moon Young MIN, Byoung Cheol

ABSTRACT

For the post-buckling and elasto-plastic analysis of shell structures, the total Lagrangian formulation is presented based upon the degenerated shell element. Geometrically correct formulation is developed by updating the direction of normal vectors in the iteration process and evaluating the total Green-Lagrange stain corresponding to total displacements. In the calculation of the stiffness matrix, the element formulation takes into account the effect of finite rotation increments by retaining second order rotation terms in the incremental displacement field. The selective or reduced integration scheme using the heterosis element is applied in order to overcome both shear locking phenomena and the zero energy mode. The load/displacement incremental scheme is adopted for geometric non-linear F.E. analysis. Based on such methodology, the computer program is developed and numerical examples to demonstrate the accuracy and the effectiveness of the proposed shell element are presented and compared with references's results.

1. 서론

板과 셸은 工學의 多樣한 分野에서 널리 適用되는 構造이다. 土木分野에서는 鋼橋梁의 거더 (girders), 原子力 遮閉 構造物, 貯藏탱크와 platform component와 같은 海洋構造物등에 使用되고 있다. 셸構造物은 적절히 設計가 이루어 진다면 美觀이 뛰어나고 매우 效率的인 構造의 舉動을 보인다. 그러나 板 및 셸構造에 대한 解析解(analytic solution)는 適用範圍가 制限 되어 있고 任意 形狀, 荷重條件, 불규칙한 補強과 支持條件등을 考慮한 實際 構造物解析에 適用할 수 없다. 結果的 으로 이러한 複雜한 問題들을 取扱하기 위해서는 板 및 셸要素를 利用한 有限要素解析을 修行하여야한다.

有限要素法은 이미 20여년간 셸構造에 適用되어 왔지만, 일반 셸構造에 直接的으로 適用할 수 있는 適切한 셸有限要素에 대한 研究는 아직 進行中^[1-4]에 있다고 생각된다. Bathe^[6]는 大변형 및 탄소성해석을 수행할수 있는 변형된 셸요소이론을 제시하였다. Figueiras과 Owen^[4]은 변형된 셸 요소의 강도행렬을 산정할때 heterosis element를 사용함으로써 shear locking 현상과 zero energy

* 성균관대학교 토목공학과 부교수
** 성균관대학교 토목공학과 박사과정

mode 문제를 해결하였다. Surana^[8]는 회전각의 2차항을 고려한 변형된 셸유한요소이론을 제시하였다. 金과 関^[9]은 문헌^[4]의 연구성과를 토대로 보강된 셸구조물의 좌굴 및 후좌굴거동을 포함하는 다양한 비선형해석이 가능하도록 하기 위하여, 셸구조에 대한 유한요소법을 제시하고, snap-through, turning-back 거동을 포함하는 비선형거동을 추적할 수 있는 변위 및 하중증분 알고리즘을 셸구조물의 비선형해석에 적용시켰다.

본 연구에서는 문헌^[4,9]의 연구를 발전시켜서 보다 정확하고 효율적으로 셸구조해석을 수행할 수 있는 셸요소를 개발하고자 한다. 변형된 셸 유한요소를 사용하며 대변형해석은 total Lagrangian formulation을 적용한다. 기존의 셸요소에서 개선시키고자하는 내용은 아래와 같다.

- 1) 非線形 變形度項을 모두 고려하여 幾何學的 剛度行列을 유도하고, 板 및 셸구조의 彈性 挫屈 荷重을 산정한다.
- 2) 판의 대변형 및 탄·소성에 대한 유한요소해석을 수행한다.
- 3) 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 총변위에 대응하는 변형도를 산정함으로써, 셸구조의 기하학적으로 정확한 비선형해석이 이루어지도록 한다.
- 4) 접선강도행렬을 산정할때 회전각의 2차항을 고려하여 해의 수렴성 및 정확성을 향상시킨다.
- 5) 後挫屈舉動을 포함하는 다양한 비선형해석이 가능하도록 하기 위하여, 셸구조에 대한 유한요소이론을 제시하고 개선된 變位 및 荷重増分 알고리즘을 적용하여 snap-through, turning-back 거동을 포함하는 幾何學的 非線形 舉動을 추적한다.

2. 변형된 셸 유한요소이론

본 연구에서는 등매개 셸요소(degenerated isoparametric shell element)가 사용되며, 이 셸요소를 정식화하는데 사용되는 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 중립면에 수직한 법선은 변형후에도 법선으로 남아 있다.
 - 2) 응력-변형도 관계식에서 셸중립면에 수직한 응력은 영으로 취한다.
- 여기서 고려되는 요소는 셸구조의 곡선형상을 적절히 나타낼 수 있는 대표적인 9절점 셸요소이다.

2.1 변형된 셸요소의 형상과 변위장

셸요소의 초기형상은 곡선좌표계를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^0X_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^0X_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k {}^0V_{ni}^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

여기서 ${}^0X_i = {}^0X_i(r, s, t)$ 는 셸요소 내부점의 위치벡터이고, a_k 는 절점 k 에서 셸 두께이며, 그리고 h_k 는 형상함수로서 (r, s) 의 함수로 표시된다. 셸요소의 변형거동에 대한 가정 1)을 고려하면, 시간 t 에서 요소내부의 점 (r, s, t) 에 대응하는 위치벡터는 다음과 같이 표시된다.

$${}^tX_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^tX_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k {}^tV_{ni}^k \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

셸거동에 대한 두개의 가정을 고려하여 3차원 연속체요소를 셸요소로 변형시키게 되면, 변위장은 절점당 5개의 자유도 즉, 세개의 이동변위 (U_1^k, U_2^k, U_3^k)와 서로 수직한 ${}^0V_1^k$ 와 ${}^0V_2^k$ 에 대한 두개의 회전각 (α_k, β_k)으로 표시할 수 있으며 셸내부의 각점에서 총변위 및 증분변위벡터는 식(1)과 (2)로부터 다음과 같이 주어진다.

$${}^tU_i = {}^tX_i - {}^oX_i = \sum_{k=1}^n h_k {}^tU_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k ({}^tV_{ni}^k - {}^oV_{ni}^k) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} U_i &= {}^{t+d}X_i - {}^tX_i = \sum_{k=1}^n h_k U_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k ({}^{t+d}V_{ni}^k - {}^tV_{ni}^k) \\ &\cong \sum_{k=1}^n h_k U_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n a_k h_k \left(-{}^tV_{2i}^k \alpha_k + {}^tV_{1i}^k \beta_k - \frac{1}{2} {}^tV_{ii}^k \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

밀출친 항은 절점회전각의 2차항을 나타내며, 이 항은 기존의 강도행렬에 추가되는 기하학적인 강도행렬을 산정할때 사용된다.

2.2 증분평형방정식

Total Lagrangian formulation에 근거하여 연속체에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 표시된다

$$\int ({}^oC_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij} + {}^tS_{ij} \delta {}^o\eta_{ij} + {}^tS_{ij}^* \delta e_{ij}^*) {}^o dV = {}^{t+d}R - \int {}^tS_{ij} \delta e_{ij} {}^o dV \quad (5)$$

여기서 ${}^oC_{ijrs}$ 는 응력-변형도성분, e_{ij} , ${}^o\eta_{ij}$ 는 초기형상을 기준으로한 Green-Lagrange strain의 선형 및 비선형 증분변형도 성분, e_{ij}^* 는 절점회전각의 2차항으로 인한 선형 변형도를 나타내며, ${}^tS_{ij}^*$ 는 second Piola-Kirchhoff stress를 표시한다. tR 는 외적가상일, δ 은 변분을 의미한다.

식(1),(3) 그리고 식(4)를 고려하고, 등매개 형상함수를 도입하여 적분을 행하면 한 개의 유한요소에 대한 증분평형방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$({}^tK_L + {}^tK_{NL}) \Delta U = {}^{t+d}R - {}^tF \quad (6)$$

$$\text{여기서} \quad {}^tK_L = \int_V {}^tB_L^T {}^tC {}^tB_L {}^o dV \quad (7a)$$

$${}^tK_{NL} = \int_V {}^tB_{NL}^T {}^tS {}^tB_{NL} {}^o dV + {}^tK_{NL}^* \quad (7b)$$

$${}^tF = \int_V {}^tB_L^T {}^t\bar{S} {}^o dV \quad (7c)$$

식(6),(7)에서 tK_L 와 ${}^tK_{NL}$ 는 각각 선형(탄성) 및 비선형(기하학적) 강도행렬을 나타내며, ΔU 는 절점변위벡타의 증분 그리고 tF 는 요소내부에 발생하는 응력에 대응하는 등가절점력을 의미한다. tB_L 와 ${}^tB_{NL}$ 는 선형 및 비선형 변형-변형도 변환행렬을 나타낸다.

2.3 접선강도행렬의 유도

곡선좌표계와 전체좌표계 사이의 변환식(1)으로부터 두 좌표계의 미분관계를 나타내는 행렬 (Jacobian matrix)은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$J_{ij} = \frac{\partial ({}^oX_1, {}^oX_2, {}^oX_3)}{\partial (r, s, t)} \quad (8)$$

셀요소의 강도행렬을 유도하기 위하여 아래와 같이 요소절점변위벡타를 정의한다.

$$U_e^T = [U_1^1 \ U_2^1 \ U_3^1 \ \alpha_1 \ \beta_1; \ U_1^2 \ U_2^2 \ \dots; \ U_1^N \ U_2^N \ U_3^N \ \alpha_N \ \beta_N] \quad (9)$$

결국, 식(8),(13) 그리고 식(15)을 이용하여 oB_L 과 ${}^oB_{NL}$ 을 산정하면 식(7)으로부터 쉘요소의 접선 강도행렬을 산정할 수 있다. 식(7a)의 선형 변위-변형도 변환행렬 oB_L 는 통상 식(17)과 같이 행렬 ${}^oB_{L0}$ 와 초기변위의 영향을 고려하는 행렬 ${}^oB_{L1}$ 의 합으로 표시한다.

$${}^oE_L = {}^oB_L U_e ; \quad {}^oB_L = {}^oB_{L0} + {}^oB_{L1} \quad (10a)$$

$${}^oE_L^T = [{}^oe_{11} \quad {}^oe_{22} \quad {}^oe_{33} \quad 2{}^oe_{12} \quad 2{}^oe_{23} \quad 2{}^oe_{13}] \quad (10b)$$

식(13)과 (15)을 고려하면, 변형된 쉘요소의 선형 변위-변형도 변환행렬의 구체적인 식은 다음과 같이 표시된다.

$${}^oB_{L0} = \left[\begin{array}{cccccc} h_{k,1} & 0 & 0 & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k & \\ 0 & h_{k,2} & 0 & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k & \\ \dots & 0 & 0 & h_{k,3} & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k \\ h_{k,2} & h_{k,1} & 0 & (g_{11}^k G_2^k + g_{12}^k G_1^k) & (g_{21}^k G_2^k + g_{22}^k G_1^k) & \\ 0 & h_{k,3} & h_{k,2} & (g_{12}^k G_3^k + g_{13}^k G_2^k) & (g_{22}^k G_3^k + g_{23}^k G_2^k) & \\ h_{k,3} & 0 & h_{k,1} & (g_{11}^k G_3^k + g_{13}^k G_1^k) & (g_{21}^k G_3^k + g_{23}^k G_1^k) & \end{array} \right] \quad (11)$$

$${}^oB_{L1} = {}^oL \cdot {}^oB_{NL} \quad (12)$$

여기서

$${}^oL = \left[\begin{array}{cccccc} l_{11} & 0 & 0 & l_{21} & 0 & 0 & l_{31} & 0 & 0 \\ 0 & l_{12} & 0 & 0 & l_{22} & 0 & 0 & l_{32} & 0 \\ 0 & 0 & l_{13} & 0 & 0 & l_{23} & 0 & 0 & l_{33} \\ l_{12} & l_{11} & 0 & l_{22} & l_{21} & 0 & l_{32} & l_{31} & 0 \\ l_{13} & 0 & l_{11} & l_{23} & 0 & l_{21} & l_{33} & 0 & l_{31} \\ 0 & l_{13} & l_{12} & 0 & l_{23} & l_{22} & 0 & l_{33} & l_{32} \end{array} \right] \quad (13)$$

$${}^oB_{NL} = \left[\begin{array}{cccccc} h_{k,1} & 0 & 0 & g_{11}^k G_1^k & g_{21}^k G_1^k & \\ h_{k,2} & 0 & 0 & g_{11}^k G_2^k & g_{21}^k G_2^k & \\ h_{k,3} & 0 & 0 & g_{11}^k G_3^k & g_{21}^k G_3^k & \\ \dots & 0 & h_{k,1} & 0 & g_{12}^k G_1^k & g_{22}^k G_1^k \\ 0 & h_{k,2} & 0 & g_{12}^k G_2^k & g_{22}^k G_2^k & \\ 0 & h_{k,3} & 0 & g_{12}^k G_3^k & g_{22}^k G_3^k & \\ 0 & 0 & h_{k,1} & g_{13}^k G_1^k & g_{23}^k G_1^k & \\ 0 & 0 & h_{k,2} & g_{13}^k G_2^k & g_{23}^k G_2^k & \\ 0 & 0 & h_{k,3} & g_{13}^k G_3^k & g_{23}^k G_3^k & \end{array} \right] \quad (14)$$

$$\text{여기서 } g_{1i}^k = -\frac{1}{2} a_k {}^tV_{2i}^k, \quad g_{2i}^k = \frac{1}{2} a_k {}^tV_{1i}^k, \quad g_{3i}^k = -\frac{1}{2} a_k {}^tV_{ni}^k$$

$$h_{k,i} = J_1^{-1} h_{k,r} + J_2^{-1} h_{k,s} \quad (15)$$

$$G_i^k = t(J_1^{-1} h_{k,r} + J_2^{-1} h_{k,s}) + J_3^{-1} h_k$$

식(13)에서 $l_{ij} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^o x_j}$ 이며, 식(14)의 ${}^oB_{NL}$ 은 비선형 변위-변형도 변환행렬을 나타낸다. 회전 자유도를 갖는 요소의 비선형 강도행렬을 산정하는 경우에 식(13)의 밑줄친 항을 고려하면 비선형 강도행렬식 (7b)에 추가되는 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
[K_{NL}]_{5k-1, 5k-1} = & \quad {}_o^i S_{11} \cdot [g_{n1}^k G_1^k + \sum_{i=1}^9 g_{ni}^k G_1^k l_{i1}] + {}_o^i S_{22} \cdot [g_{n2}^k G_2^k + \sum_{i=1}^3 g_{ni}^k G_2^k l_{i2}] \\
& + {}_o^i S_{33} \cdot [g_{n3}^k G_3^k + \sum_{i=1}^3 g_{ni}^k G_3^k l_{i3}] \\
& + {}_o^i S_{12} \cdot [g_{n1}^k G_2^k + g_{n2}^k G_1^k + \sum_{i=1}^3 (g_{ni}^k G_2^k l_{i1} + g_{ni}^k G_1^k l_{i2})] \\
& + {}_o^i S_{31} \cdot [g_{n1}^k G_3^k + g_{n3}^k G_1^k + \sum_{i=1}^3 (g_{ni}^k G_3^k l_{i1} + g_{ni}^k G_1^k l_{i3})] \\
& + {}_o^i S_{23} \cdot [g_{n2}^k G_3^k + g_{n3}^k G_2^k + \sum_{i=1}^3 (g_{ni}^k G_2^k l_{i3} + g_{ni}^k G_3^k l_{i2})]
\end{aligned} \tag{16a}$$

$$[K_{NL}]_{5k, 5k} = [K_{NL}]_{5k-1, 5k-1} \tag{16b}$$

식(14)를 이용하면 비선형 증분변형도 ${}_o E_{NL}$ 은 아래의 식으로 표시할 수 있다.

$${}_o E_{NL} = {}_o^i B_{NL} U_e \tag{17a}$$

$${}_o E_{NL}^T = [{}_o U_{1,1} \quad {}_o U_{1,2} \quad {}_o U_{1,3} \quad {}_o U_{2,1} \quad {}_o U_{2,2} \quad {}_o U_{2,3} \quad {}_o U_{3,1} \quad {}_o U_{3,2} \quad {}_o U_{3,3}] \tag{17b}$$

또한, 식(7c)에서 응력행렬의 구체적인 식은 다음과 같이 표시된다.

$${}_o^i S = \begin{bmatrix} {}_o^i \tilde{S} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & {}_o^i \tilde{S} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & {}_o^i \tilde{S} \end{bmatrix}, \quad {}_o^i \tilde{S} = \begin{bmatrix} {}_o^i S_{11} & {}_o^i S_{12} & {}_o^i S_{13} \\ {}_o^i S_{21} & {}_o^i S_{22} & {}_o^i S_{23} \\ {}_o^i S_{31} & {}_o^i S_{32} & {}_o^i S_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

등매개 셀요소의 강도행렬을 산정하기 위하여 가우스 수치적분을 행한다. 본 연구에서는 셀두께가 얇아짐에 따라 강성이 실제보다 과대하게 계산되는 locking 현상과 zero energy mode를 극복하기 위하여, Heterosis element를 이용한 감차적분 또는 선택적분법(reduced or selective integration)을 적용한다.

2.4 탄소성 응력-변형도 관계와 불평형하중의 산정

불평형하중을 산정하기 위해서는 먼저 가우스 적분점에서 전체좌표계에 대한 변형도 및 응력성분을 구해야한다. 이때, 가정 2)에 따라서 응력성분 ${}_o^i S_x$ 과 변형도성분 ${}_o^i \varepsilon_x$ 이 영이므로, 전체 좌표계에서 계산된 변형도성분은 적중좌표계로 변환시켜서 응력성분을 산정하여야 한다. 탄소성 응력-변형도관계를 유도하기 위하여 Von-Mises 항복조건을 나타내면 다음과 같다.

$$F = \frac{1}{6} [({}_o^i S_x - {}_o^i S_y)^2 + {}_o^i S_x^2 + {}_o^i S_y^2] + {}_o^i S_{x,y}^2 + {}_o^i S_{x,z}^2 + {}_o^i S_{y,z}^2 \tag{19}$$

한편, 총변형도증분은 다음과 같이 탄성 및 소성변형도증분의 합으로 나타낼 수 있다.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \tag{20}$$

탄성변형도증분을 식(27a)에 적용하여 응력증분을 산정하며, 소성변형도 증분은 아래의 flow rule에 의해서 고려된다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial {}_o^i S_{ij}} = d\lambda \cdot a \tag{21}$$

여기서 F 는 소성포텐셜을 나타내며, 통상 항복함수를 사용한다. $d\lambda$ 는 비례상수이며 a 는 소성포텐셜이 일정한 값을 갖는 곡면에서 법선방향을 나타내는 flow vector 이다.

식(19)-(21)를 이용하고, 소위 normality condition을 적용하면 다음과 같이 탄소성 증분 응력-변형도관계식을 얻을 수 있다.

$$d({}_0S_{ij}) = C_{ep} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (22a)$$

$$\text{여기서 } C_{ep} = C - \frac{C a a^T C}{H + a^T S a} \quad (22b)$$

식(22b)에서 H' 은 탄성변형도성분을 제거한 후에 일축응력-변형도 곡선의 변형도경화 부분의 기울기를 나타낸다. 비선형해석에서 불평형하중을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 아래는 본 연구에서 채택한 불평형하중 산정법을 제시한다.

- 1) 접선강도행렬을 산정한다.
- 2) 증분방정식을 풀어서 증분절점변위벡터 및 총변위벡터를 구한다.
- 3) 식(8)을 사용하여 각 가우스 적분점에서 변형도증분을 계산하고, 전체좌표계에서 계산된 변형도증분을 적층좌표계로 변환시킨다.
- 4) 각 적분점에서 탄소성 응력-변형도관계를 이용하여 응력증분을 산정한다.
- 5) 식(7c)를 사용하여 요소응력에 대응하는 등가절점력을 산정한다.
- 6) 외력과 단계5)에서 구한 절점력의 차이로써 불평형하중을 산정하고 아래의 수렴조건을 조사한다.

$$\| {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i)} \| \times 100 \leq LTOL \times \| {}^{t+\Delta t}R \| \quad (23)$$

여기서 $LTOL$ 은 입력으로 주어지는 수렴 허용치이다.

3. 수치해석 예

板 및 셸構造의 大變形 및 彈塑性 解析을 修行하기 위하여, total Lagrangian formulation을 이용한 9절점 變形된 셸要素와 함께 Von-Mises 降伏條件이 使用되었다. 이때 shear locking 현상과 zero energy mode를 피하기 위하여 Heterosis element가 사용되었다. 강도 행렬을 산정할때 탄성 해석의 경우에는 셸 두께 방향으로 2점, 탄·소성 해석의 경우는 소성영역의 진전 상황을 파악하기 위하여 5점 가우스 적분을 적용하여 수치적분하였다. 또한, 셸構造의 後挫屈 舉動을 포함하는 다양한 非線形 解析이 可能하도록 하기 위하여, 개선된 變位/荷重増分 알고리즘을 適用시켰다. 이러한 解析理論 및 알고리즘에 基礎하여 板 및 셸構造의 좌굴해석, 後挫屈解析 그리고 大變形을 고려한 彈塑性解析이 可能的 컴퓨터 解析프로그램을 開發하였다. 이 프로그램을 사용하여 본 장에서는 보강된 판 및 셸 구조의 임계하중을 산정하고 탄·소성 거동을 고려한 후좌굴해석을 수행하여 엄밀해 및 다른 문헌의 결과들과 비교, 검토한다.

3.1 순수 휨을 받는 단순지지 판

그림 1(a)는 순수 휨을 받는 판을 나타낸다. 재료의 항복응력은 $\sigma_y = 200 N/mm^2$, $\tau_y = \sigma_y/\sqrt{3}$ 이며, 좌굴 형상의 대칭성을 고려해 판의 1/2만을 8개의 유한요소로 모델링 하였다. 유한요소를 이용한 정사각형 판의 임계하중 $(N_o)_{cr}$ 의 계산 결과는 $490.174 N/mm$ 이고 Timoshenko의 엄밀해^[7]는 $485.888 N/mm$ 로써 오차 0.9%의 정확성을 나타내고 있다. 또한, 표 1은 판의 가로와 세로길이 비에 따른 좌굴해석 결과를 좌굴계수 k (식 (24) 참조) 값으로 나타낸 것이다. 본 연구의 결과

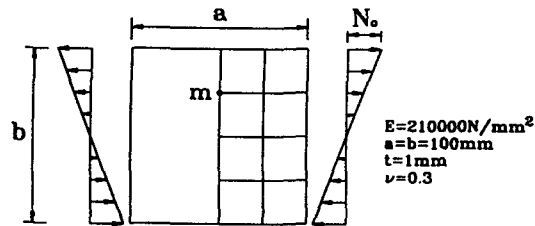
는 Timoshenko의 엄밀해^[7]와 잘 일치함을 알 수 있다. 표1에서 a/b가 1.0인 경우는 0.5와 0.66667인 경우와는 달리 완전한 sine함수 형상의 좌굴모우드를 갖는다.

$$k = (N_0)_{cr} \frac{b^2}{\pi^2 D} \quad , \quad N_x = N_0 \left(1 - 2 \frac{y}{b}\right) \quad (24)$$

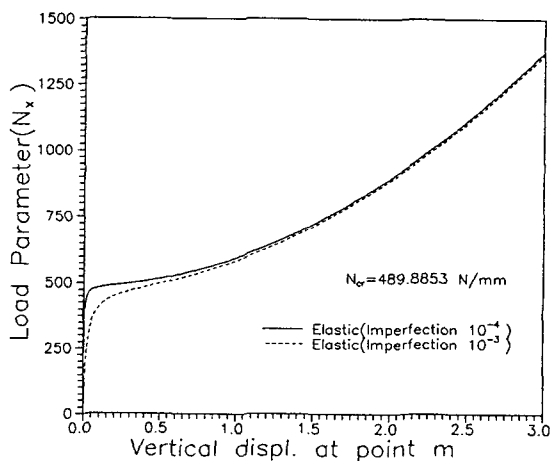
정사각형 판의 후좌굴 거동을 추적하기 위하여 $N_x/10^3$ 과 $N_x/10^4$ 에 대응하는 수직하중을 m 점에 재하시켰다. 그림 1(b)는 임계하중에 이르러 판의 좌굴이 발생한후 전형적인 후좌굴 거동을 보여주고 있다. imperfection이 작을 수록 임계하중에 가까이 접근하여 예리하게 변화하는 것을 보여준다. 이 예제는 판의 항복응력이 임계하중 보다 작으므로 탄·소성 거동은 판이 좌굴하기 전에 나타나게 된다. (그림 1(c))

표 1 buckling factor k of simply supported rectangular plate under pure bending

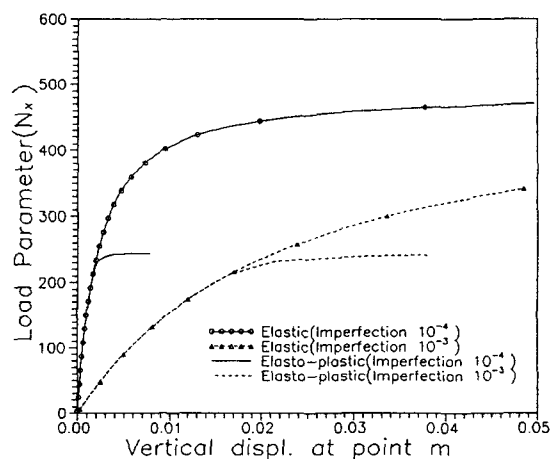
a/b	0.5	0.666667	1.0
reduced integration	25.9792	24.2838	26.0362
selective integration	25.7198	24.0802	25.8106
엄밀해 ^[7]	25.6	23.9	25.6



(a) rectangular plate



(b) post-buckling behaviors



(c) elasto-plastic behaviors

그림 1 simply supported rectangular plate under pure bending

3.2 면내 등분포 사하중과 면의 집중하중을 받는 원통형 셸

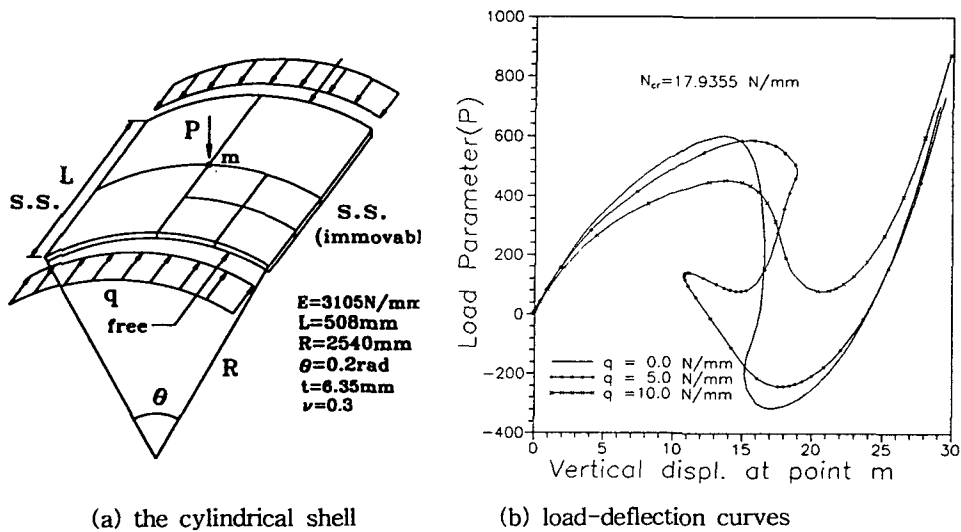
그림 2(a)는 면내 등분포 압축하중 q 와 m 점에 면의 집중하중 P 가 재하되는 두께 $6.35mm$ 의 원통형 셸(cylindrical shell)을 나타내고 있다. 좌굴형상의 양방향 내칭성을 고려하여 셸 전체의 1/4만을 4개의 유한요소로 모델링 하였다. 원통형 셸의 곡률반지름의 변화에 따른 좌굴해석을 수행하여, 본 연구에 의한 좌굴해석결과와 ABAQUS^[11]의 해석결과를 표 2에 함께 나타내었다. 이때 방법 1은 비선형 변형도항을 모두 고려한 좌굴해석을 나타내며, 방법 2는 Von-Karman의 가정에 따라서 중립면의 수직처짐에 대응하는 2차 변형도항만을 고려한 해석을 나타낸다. 표 2에서 보는 바와 같이 곡률반지름이 증가함에 따라 방법 1에 의한 해석결과가 ABAQUS의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

표 2 buckling loads of simply supported-free cylindrical shell under uniform compression

(단위: N/mm)

Shape Condition		Method 1	Method 2	ABAQUS ^[9]
R=2540 mm	$\theta = 0.2$	17.7249	17.8692	17.988
R=508 mm	$\theta = 1.0$	73.5513	83.1813	74.577
R=254 mm	$\theta = 2.0$	131.455	165.397	129.99

면의 집중하중 P 와 함께 세가지 종류의 면내 등분포하중 $q = 0.0, 5.0, 10.0 N/mm$ 이 작용하는 경우에 변위 및 하중중분 알고리즘을 적용하여 후좌굴해석을 수행하였다. 비선형 해석시 면내 등분포하중 q 는 전 하중단계에 걸쳐서 일정한 크기로 재하되며 면의 집중하중 P 는 비례하중으로 구조물의 변형과 함께 그 크기가 변한다. 그림 2(b)는 면의 집중하중 P 의 변화에 따른 m 점의 수직처짐 사이의 관계곡선을 나타낸 것이다. 본 예제는 여러개의 snap-through와 turning-back을 포함하는 기하학적 비선형 거동을 보여줄 뿐만 아니라, 면내 등분포하중이 증가함에 따라 첫번째 극한하중값이 감소하는 경향을 나타내었다.



(a) the cylindrical shell

(b) load-deflection curves

그림 2 the simply supported-free cylindrical shell

3.2 휨모멘트를 받는 캔틸레버 판

그림 3는 해석에 사용된 제원과 외력으로써 휨 모멘트를 받는 캔틸레버를 나타내고 있다. 캔틸레버는 4개의 유한요소로 모델링되었고 대변형 해석을 수행하기 위하여 휨 모멘트 $M=f \cdot m$ 은 비례하중(proportional loading)이며 1:4:1의 비율을 갖는 등가절점하중으로 판의 자유단에 재하시켰다. 이때 자유단의 수직방향 변위에 대한 해석결과를 엄밀해 및 다른문헌의 결과와 비교하여 표 3에 나타내었으며 이때, 엄밀해는 식(25)가 사용되었다. 본 예제의 해석결과에서 알 수 있는 바와같이 회전에 의한 대변형 효과가 크게 발생하는 경우, 반드시 회전각에 대한 2차항을 고려하여야 정확한 해석을 할 수 있으며 8절점 요소보다 9절점 요소가 엄밀해에 더 근접하는 결과를 얻을 수 있다.

$$\delta_z = [1 - \cos(M^*)] \frac{L}{M^*} \quad (25)$$

$$M^* = \frac{M \cdot L}{EI}$$

표 3. Load-deflection characteristics of the cantilever beam

Load factor f	Analytic solution	Surana ^[8]	Ref. ^[10]	Present study	
				8 node	9 node
0.2	3.64751	3.62330	3.00461	3.62931	3.63396
0.4	6.59840	6.57446	3.87888	6.57628	6.57981
0.6	8.33346	8.32846	4.64027	8.30213	8.30322
0.8	8.63742	8.61940	5.21749	8.53886	8.54209
1.0	7.63944	7.50556	5.66177	7.35577	7.37311
1.2	5.75828	5.37277	6.01550	5.61860	5.21502
1.4	3.57148	2.87401	6.30250	2.68185	2.75521
1.6	1.64960	0.82923	6.35939	0.749946	0.80161
1.8	0.40528	-0.00179	6.73758	0.218507	0.05253
2.0	0.0	.	6.90590	.	0.83022

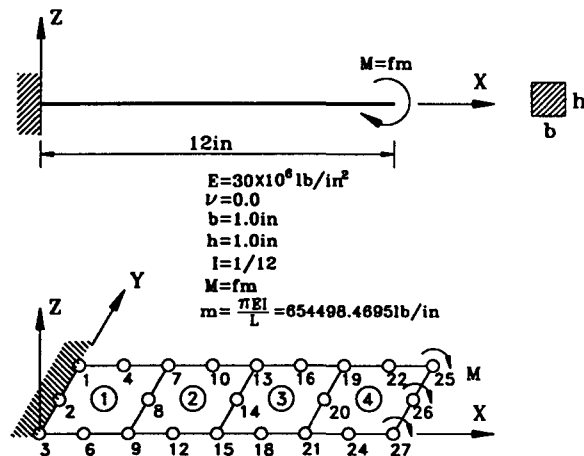
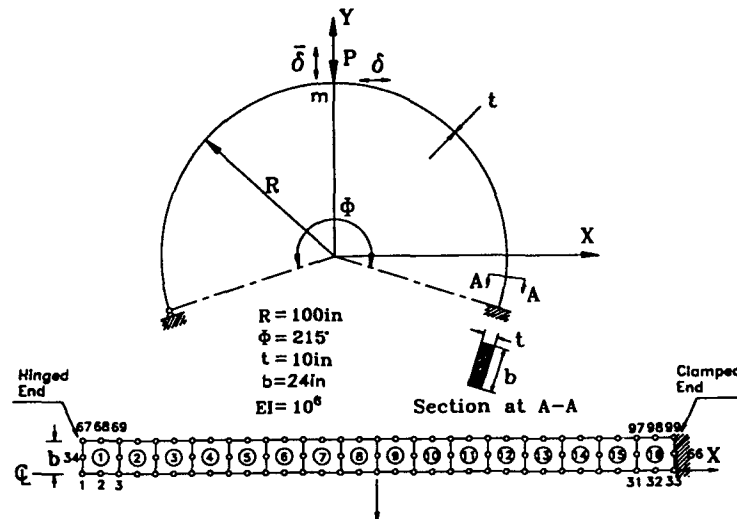


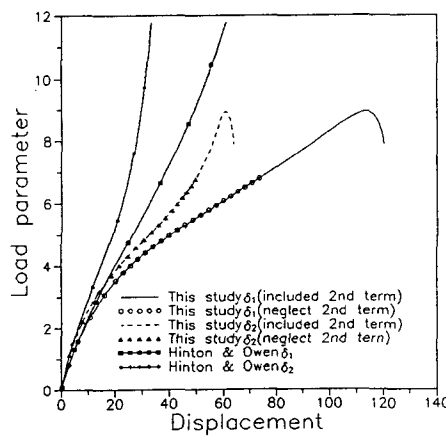
그림 3. Cantilever beam and finite element models

3.3 중앙하중을 받는 힌지-고정 원형아치

그림 4(a)는 한쪽은 힌지이고 한쪽은 고정단인 원형아치를 나타내고 있다. 대변형 해석시 외부 하중 P 는 비례하중으로 구조물의 변형과 함께 그 크기가 변하는 집중하중으로 재하되나, 적절한 유한요소 해석을 위해 등가하중으로 치환하여 1:4:1의 비로써 아치의 중앙에 3점 하중으로 재하시켰다. 아치는 힌지-고정단의 구속조건으로 인하여 변형이 비대칭으로 발생하므로 구조물 전체에 대하여 16개의 요소로 분할하여 기하학적인 비선형 해석을 수행하였다. 그림 4(b)는 아치 중앙 절점의 수직변위와 수평변위에 대해 대변형 거동을 추적한 것으로 절점의 회전에 대한 2차항을 고려한 경우 및 고려하지않은 경우 그리고 Hinton과 Owen^[10]의 셀요소를 이용한 경우의 해석결과를 비교하여 나타낸 것이다. 그림 4(b)에서 보는 바와 같이 기하학적 비선형 효과가 큰 셀구조의 대변형 해석을 수행하는 경우, 셀요소의 대변형이 발생함에 따라서 각 절점의 중립면에 대한 법선벡터의 변화를 반드시 고려하여야하며, 접선강도행렬 산정시 회전 자유도에 대해 2차항의 영향을 포함시켜야 정확하고 수렴속도가 빠른 비선형 해석이 가능하다는 것을 알 수 있다.



(a) Clamped-hinged circular arch geometry and finite element model



(b) Large deflection curves

그림 4. Clamped-hinged circular arch

4. 결 론

板 및 셸 構造의 大變形 및 後挫屈舉動을 파악하기 위하여, 9절점 變形된 셸 要素를 사용하여 total Lagrangian formulation을 이용한 유한요소해석 이론을 제시하였다. 셸 要素의 剛度行列을 산정할때, 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 총변위에 대응하는 Green-Lagrange strain를 사용하였으며 유한한 절점회전각의 2차항을 고려하였다. 또한, Heterosis element를 이용한 減次積分 및 選擇積分法을 적용하여 shear locking 현상과 zero energy mode 문제를 해결하였다. 板 및 셸 構造의 기하학적 비선형解析을 수행하여 다음과 같은 結論에 도달하였다.

1) 순수 힘을 받는 板의 挫屈解析을 수행하여 本 研究의 셸유한요소를 이용한 좌굴하중값이 Timoshenko의 嚴密解와 잘 일치하였고 後挫屈 舉動을 해석한 경우에, 荷重-變位 關係曲線이 臨界荷重에 이르러 기울기의 급격한 변화를 나타냄으로써 板의 後挫屈舉動을 명확하게 나타내었다.

2) Von-Mises 항복조건에 기초한 소성이론을 적용하여 탄성 및 탄·소성 강도행렬을 산정하는 유한요소 이론을 정립하고 해석예를 통하여 프로그램의 검증 및 셸 구조의 탄소성 거동에 대한 해석 결과를 제시하였다.

3) 증분회전각으로 인한 법선벡터의 변화를 엄밀히 고려하고 총변위에 대응하는 변형도를 산정함으로써, 셸구조의 기하학적으로 정확한 비선형거동을 추적할 수 있다.

4) 기하학적 비선형거동이 두드러진 셸구조 해석의 경우에, 절점회전각의 2차항을 고려한 접선 강도행렬을 산정하여야 비선형해석이 가능하다.

5) Snap-through舉動과 turning-back舉動을 포함하는 셸構造의 복잡한 非線形 舉動을 추적하기 위하여 개선된 荷重 및 變位增分 알고리즘을 적용하였다. 그 결과 동일한 解析條件하에서 동일한 解析結果를 얻는데, 개선된 荷重 및 變位增分 알고리즘이 이전의 알고리즘에 비하여 현저하게 計算時間을 短縮시키는 效果를 나타내었다.

5. 참고문헌

1. S.Ahmad, B.M.Irons and O.C.Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.2, 1970, pp.419-451.
2. W.Kanok-Nukulchai, "A simple and efficient finite element for general shell analysis", *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.14, 1979, pp.179-200.
3. K.J.Bathe, S.Bolourchi, "A geometric and material non-linear plastic and shell element", *Computers and Structures*, Vol.11, 1980, pp.23-48.
4. D.R.J.Owen, J.A.Figueiras, "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells", *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol.19, 1983, pp.541-566.
5. 金 文榮, 張 丞弼, "保存力 및 非保存력을 받는 構造物의 幾何的 非線形 有限要素解析을 위한 變位 및 荷重增分 알고리즘의 開發", 大韓土木學會論文集, 제 10권, 제 2호, 1990.6., pp11-22
6. K.J.Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, 1982, pp301-406
7. S.P.Timoshenko and J.M.Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
8. K.S.Surana, "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J.Num. Meth.Eng.*, Vol.17, 1983, pp.581-615.
9. 金 文榮, 閔 丙鐵, "보강된 셸 구조의 후좌굴 및 탄·소성 유한요소해석", 韓國鋼構造學會論文集, 제 4권, 제 4호, 1994.12.
10. E.Hinton, D.R.J.Owen, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge, Swansea, U.K., 1984, pp.235-326.
11. ABAQUS, User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992