

콘크리트 파괴진행영역의 유한요소모델링
Finite Element Modeling of Fracture Process Zone in Concrete

송 하원* 변 근주**
Song, Ha-Won Byun, Keun-Joo

ABSTRACT

Fracture Mechanics does work for concrete, provided that a finite nonlinear zone at fracture front is being considered. The development of model for fracture process zone is most important to describe fracture phenomena in concrete. The fracture process zone is a region ahead of a traction-free crack, in which two major mechanisms, microcracking and bridging, play important rules. The toughness due to bridging is dominant compared to toughness induced by microcracking, so that the bridging is dominant mechanism governing the fracture process of concrete.

In this paper the bridging zone, which is a part of extended macrocrack with stresses transmitted by aggregates in concrete, is modelled by a Dugdale-Barenblatt type model with linear tension-softening curve. Two finite element techniques are shown for the model of fracture process zone in concrete.

1. 서론

콘크리트의 파괴역학연구의 목적은 작용하는 하중에 대한 콘크리트의 파괴거동을 예측하는데 있다. 작용하중에 대하여 콘크리트구조물에 있어서는 미시적균열이 발생하고 이 미시적균열은 국소화되어 거시적균열로 진행된다. 이때 콘크리트의 균열선단에 발생하는 큰 비선형영역을 파괴진행영역(fracture process zone)이라 하며 금속재료의 균열선단에서의 소성변형에 의해 응력집중이 완화되게하는 선단소성영역에 해당되며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다. 콘크리트 구조물에 발생하는 진행성 균열은 구조물을 파기에 까지 다다르게 할수 있으며 이때 파괴거동과 극한하중등을 예측하기 위해서는 진행성 균열에 대한 이해가 필요하다. 특히 압축강도에 비하여 상대적으로 훨씬 낮은 콘크리트의 인장강도로 인하여 소홀히 되어왔던 콘크리트의 인장거동은 파괴역학의 도입으로 콘크리트 구조물의 진행성균열에 중요한 역할을 하는 것으로 밝혀졌다.

본 논문에서는 콘크리트 균열진행을 유한요소 해석하기위한 파괴진행영역의 모델링기법을 설명한다. 사용한 파괴진행영역의 정규화 기법은 일반적인 유한요소를 사용한 방법과 특수한 유한요소 즉 불연속면을 갖고 있는 균열유한요소를 사용한 방법이다.

* 연세대학교 토목공학과 조교수

** 연세대학교 토목공학과 교수

2. 콘크리트 인장파괴 모델링

콘크리트의 파괴를 지배하는 미커니즘을 규명하는 것은 콘크리트의 균열진행해석을 위한 모델과 수치해석프로그램을 개발하는데 필수적이다. 균열면에서 전달응력(transmitted stress : σ_t) 이 인장강도(f_t)에 도달한후 균열개구변위(crack opening displacement : w)의 증가에 따라 균열면에서의 전달응력은 감소된다. 이처럼 균열변위의 증가에 따른 균열의 전달응력이 감소되는 현상을 인장연화(tension softening)현상이라 하고, 균열면 전달응력과 균열개구변위와의 관계를 나타내는 곡선을 인장연화곡선(tension-softening curve : Fig.1(a))이라 한다. 콘크리트의 균열선단에서의 파괴진행영역은 Fig.1(b)에서 보는 바와 같이 미세균열의 발생과 성장이 지배적인 microcracking영역과 골재의 상호 맞물림등에 의해 거시적으로 균열면에서 응력전달이 이루어 지는 bridging영역으로 나뉘어 지며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다. 균열선단에 전달응력이 작용한다고 가정하는 Dugdale-Barenblatt형 모델은 콘크리트의 콘크리트 균열성장의 주된 지배기구인 bridging영역을 잘 표현한다^{1,2)}.

본 논문에서는 에서 보이는 것처럼 bridging영역의 전달응력을 균열개구변위에 관한 함수로 나타내었고 그 함수로서 다음과 같은 선형인장연화곡선(Fig.2)을 사용하였다.

$$\frac{\sigma_t}{f_t} + \frac{w}{w_c} = 1 \quad (2.1)$$

3. 균열진행의 유한요소 정규화

콘크리트 균열의 유한요소해석 방법으로서 크게 균열을 기하학적 불연속으로 처리한 이산균열(discrete crack)방법과 균열을 연속체로 처리한 분포균열(smearred crack)방법이 있다. 분포균열 방법은 균열로 인한 불연속을 표현하지 못하는 결점이 있고 이산균열방법은 극소화된 균열을 잘 표현하나 균열이 유한요소경계를 따라 진행하여야 하거나 새로운 요소의 분할 등을 해야하는 결점을 갖고 있다.

본 논문은 기존의 이산균열방법을 사용하여 콘크리트의 파괴진행영역을 유한요소 경계에 표현하여 유한요소해석하는 방법³⁾과 이산균열방법의 결점을 보완하기 위해 요소안에 불연속면을 갖고있는 균열요소를 사용한 유한요소해석방법을 다룬다. 이때 사용한 유한요소는 4절점사각형 isoparametric요소이고 균열요소의 불연속면은 특별한 형상함수를 도입하여 처리한다⁴⁾. 즉 콘크리트의 균열진행영역은 균열요소안의 불연속면으로서 표시되며 이때 불연속면의 상대변위는 요소안에서 일정하다고 가정하였다. 균열면의 구성방정식인 불연속면의 변위와 전달응력의 관계는 식(2.1)로 표현하였다.

Fig.3에서 보는바와 같이 불연속면 Γ_d 을 포함하고 있는 연속체 Ω 에 가상일의 원리를 적용하면 식 (3.1)을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_d} t_i^d \delta w_i d\Gamma \quad (3.1)$$

여기서 σ_{ij} 는 연속체내에서의 응력, $\delta \epsilon_{ij}$ 는 가상 변형률, f_i 는 물체력 그리고 δu_i 는 가상변위를 나타내며 \bar{t}_i 는 연속체경계 Γ 에 작용하는 트래క్ష이고 t_i^d 와 δw_i 는 각각 내부불연속면 Γ_d 에 작용하는 트래క్ష과 가상 내부 불연속 변위이다.

변형중분이 미소일때 연속체가 선형거동을 한다고 가정하면 연속체와 불연속면에서의 구성방정

식은 다음 식들로 표현된다.

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}, \quad \Delta t_i^d = l_{ij} \Delta w_j \quad (3.2)$$

여기서 L_{ijkl} 은 연속체의 4차 구성재료텐서이며 l_{ij} 는 불연속균열면 Γ_d 에서 균열응력과 균열 불연속변위관계식으로 표현되는 2차 텐서이다.

한편 식(3.2)를 이용하여 식 (3.1)을 증분형으로 수정하면 다음의 증분형 평형방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\Delta \epsilon_{ij}) L_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Delta f_i \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \Delta \bar{t}_i \delta(\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \delta(\Delta w_j) l_{ij} \Delta w_j d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

본 논문에서는 균열 진행해석을 위해 먼저 불연속면을 포함하지 않는 연속체에서 얻어지는 유한요소 전체 강성행렬을 수정하여 균열진행영역을 포함한 수정된 강성행렬로 바꾸는 방법을 설명한다. 연속체가 불연속면을 포함하지 않으므로 즉 식(3.1)에서 마지막항을 제외한 식이 평형방정식이 된다.

N 개의 절점을 갖는 유한요소의 강성행렬을 K_{NN} 이라하고 선단절점(y 점)을 제외한 균열 진행영역의 절점수를 n 이라 하면 균열진행영역의 절점들을 포함한 연속체의 유한요소 이산화는 Fig. 4와 같이 나타낸다. 즉 균열진행영역을 포함하여 얻어지는 총절점수 $N+n+1$ 인 연속체의 유한요소 평형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} K_{NN} & K_{Nn} & K_M \\ K_{nN} & K_{nn} & K_{nl} \\ K_{lN} & K_{ln} & K_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^N \\ u^n \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^N \\ f^n \\ f^y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

여기서 u 는 변위이며 f 는 절점에 작용하는 하중을 나타낸다. 균열진행영역의 조건식(2.1)을 다시 쓰면 다음식이 된다.

$$\frac{2u^n}{w_c} + \frac{f^n}{f_t} = 1, \quad n=1, 2, 3, \dots, n \quad (3.5)$$

그리고 균열진행영역 선단(y 점)에서는 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$u_y = 0, \quad f^y = f_t \quad (3.6)$$

식 (3.4), (3.5) 그리고 (3.6)을 사용하여 수정된 평형방정식은 다음 식과 같다.

$$\begin{pmatrix} K_{NN} & K_{Nn} & 0 & [-1] \\ K_{nN} & K_{nn} & [-1] & 0 \\ K_{lN} & K_{ln} & 0 & 0 \\ 0 & [\frac{2}{w_c}] & [\frac{1}{f_t}] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^N \\ u^n \\ f^n \\ f^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_t \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

식 (3.7)로 수정된 평형방정식을 사용하면 작용하중하에서 균열면이 주어진 균열진행조건식 (3.5) 와 (3.6)을 만족하면서 진행되는 콘크리트의 파괴진행을 해석할 수 있다.

위에서 설명한 유한요소해석 방법은 기존의 요소를 사용하고 얻어진 전체강성도행렬을 수정하는 것만으로 균열진행을 해석할수 있어 간단하나 균열진행을 요소의 경계사이에 발생시켜야 하므로 미리 균열진행방향을 알아 유한요소이산화를 해야하는 결점과 균열진행절점의 수만큼 전체 자유도가 증가하는 결점이 있다. 이러한 결점을 보완하기 위하여 요소내에 균열을 포함할수 있는 균열요소에 의한 균열의 유한요소해석기법은 다음과 같다.

식 (3.3)을 균열요소들을 포함한 유한요소법을 이용하여 풀기 위하여 영역 Ω 는 M 개의 유한요소 영역들로 이산화된다. 이들 요소들은 균열의 발생과 함께 요소내에 불연속면이 만들어진다. 1개의 요소에 만들어 지는 불연속면은 1개의 불연속절점을 갖는다. Fig. 5는 n 개의 균열요소를 포함한 연속체의 유한요소 이산화를 나타낸다. 이때 균열요소 즉 불연속면을 포함한 유한요소 Ω^e (Fig. 6)의 변위는 절점에서의 변위증분 $\Delta \bar{u}$ 와 불연속절점에서의 불연속변위증분 $\Delta \bar{w}$ 로 표현된다. 즉

$$\Delta u = N \Delta \bar{u} + N^d \Delta \bar{w} \quad (3.8)$$

이며 여기서 N 은 일반적인 유한요소형상함수⁵⁾이며 N^d 는 불연속 형상함수이다. 불연속 형상함수 N^d 는 영역 Ω_e^1 과 Ω_e^2 에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega_e^1 \text{에서} \quad N_1^d &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2^d &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Omega_e^2 \text{에서} \quad N_1^d &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_2^d &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

식 (3.8)로부터 Ω^e 위의 변형율증분 $\Delta \varepsilon$ 과 변위 Δu 의 관계식은 다음식으로 표현된다.

$$\Delta \varepsilon = B \cdot \Delta \bar{u} + B^d \cdot \Delta \bar{w} \quad (3.11)$$

여기서 $B^{(d)} = \begin{bmatrix} N_{,x}^{(d)} & 0 \\ 0 & N_{,y}^{(d)} \\ N_{,y}^{(d)} & N_{,x}^{(d)} \end{bmatrix}$ 이다.

위의 식 (3.9)와 (3.10)을 식 (3.3)에 대입하여 $\Delta \bar{u}$ 와 $\Delta \bar{w}$ 에 관하여 정리하면 다음의 유한요소 평형방정식을 얻는다.

$$\sum_{e=1}^M \left[\begin{array}{cc} \int_{\Omega_e} B^T L B d\Omega & \int_{\Omega} B^T L B^d d\Omega \\ \int_{\Omega} B^{dT} L B d\Omega & \int_{\Omega} B^{dT} L B^d d\Omega - \int_{\Gamma_d} N^{dT} \ell N^d d\Gamma \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega} N^T \cdot \Delta f d\Omega + \int_{\Gamma} N^T \cdot \Delta \bar{t} d\Gamma \right) \quad (3.12)$$

$$\left(\int_{\Omega} N^{dT} \cdot \Delta f d\Omega + \int_{\Gamma_d} N^{dT} \cdot \Delta \bar{t} d\Gamma \right)$$

균열요소내의 불연속면은 콘크리트의 균열진행영역을 표현하고 불연속면(Fig.7)의 인장응력 σ_1 과 변위 w_1 의 관계는 식 (2.1)의 선형인장 연화곡선으로 부터 얻어진다.

4. 해석에

개발된 프로그램을 검증하기 위하여 균열발생시 Fig.8에서 보는것과 같은 이상적인 응력-변형률 관계를 갖는 공시체(Fig.9)를 해석 하였다. Fig.10은 4절점 4각형요소를 사용한 유한요소 이산화를 나타낸다. 균열요소를 사용하지 않았을 경우 공시체의 좌측경계에서 균열이 발생한다고 가정하였고 균열요소를 사용한 유한요소 해석을 위해 요소 ①과 ②에서 조금작은 최대인장응력을 사용하였다. 이로인하여 요소 ①과 ②에서 균열이 발생하였고 발생과 함께 요소 ①과 ②는 균열요소가 된다. Fig.11에서 보는것처럼 두 해석결과는 이론치와 동일한 결과를 얻었다.

Fig.12은 Notch를 갖고 있는 콘크리트보이다. Notch위에 균열의 발생과 함께 균열요소를 사용하였으며 Fig.13과 같이 보의 극한하중과 극한하중이후의 하중-처짐관계곡선을 얻었다.

5. 결론

콘크리트의 파괴진행영역은 콘크리트의 균열선단에 존재하며 콘크리트의 파괴거동을 지배한다. 본 논문에서는 콘크리트의 균열진행을 해석하기 위하여 콘크리트의 파괴진행영역을 모델링하였고 이를 이산균열방법을 사용하여 단지 요소경계면에 파괴진행영역을 발생시켜 유한요소해석하는 방법, 그리고 요소내의 불연속 균열면을 도입한 균열요소를 사용하므로써 이산균열방법의 결점을 보완한 해석방법을 제시하였다. 해석 예를 통해 균열진행해석에 사용된 유한요소모델을 검증하였다.

6. 참고문헌

1. Nirmalendran, S. and Horri, H., "Analytical Modeling of Microcracking and Bridging in the Fracture of Quasi-Brittle Materials" , *J. of Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, (4), 863-886, 1992.
2. Horii, H. and Ichinomiya, T., "Observation of the Fracture Process Zone by the Laser Speckle Method and Governing Mechanism in Fracture of Concrete" , *Int. J. of Fracture*, Vol. 51, 19-29, 1991.
3. 송하원 등, "콘크리트 파괴진행의 유한요소해석", *대한토목학회 학술발표회 강연집(I)*, 225-228, 10월 22, 1994.
4. Wan, R. G., et. al., "A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geomaterials" , *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, 129-143, 1990.
5. Zienkiwicz, O. C. and Taylor, R. L., "*The Finite Element Method: 4th Edition*", London, MacGraw-Hill Book Company, Vol. 1, 1989.

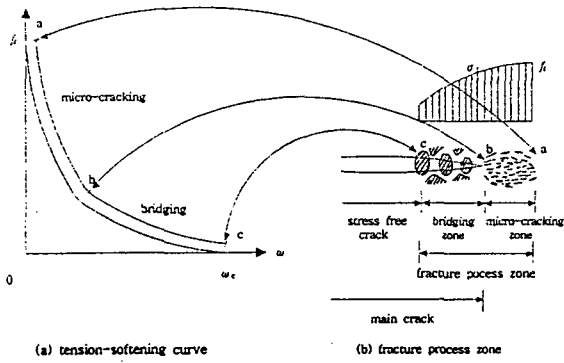


Fig.1 tension-softening curve and fracture process zone

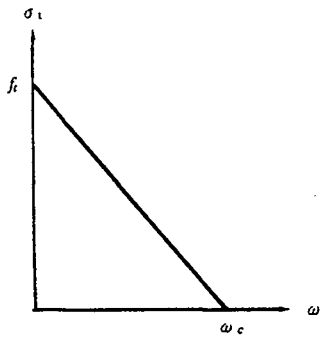


Fig.2 linear tension-softening curve

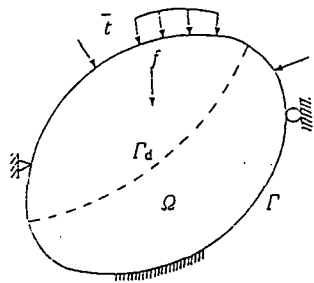


Fig.3 continuum with discontinuous line

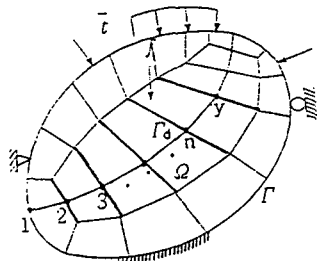


Fig.4 finite element without cracked elements

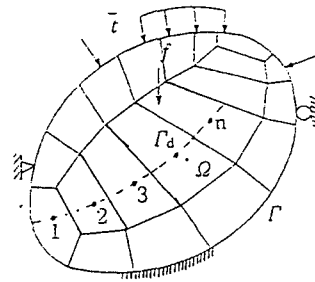


Fig.5 finite element with cracked elements

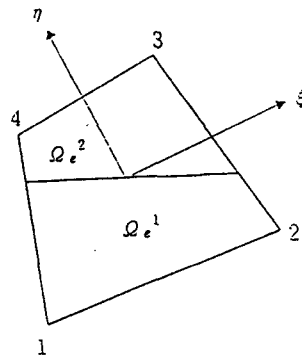


Fig.6 cracked element with discontinuous line

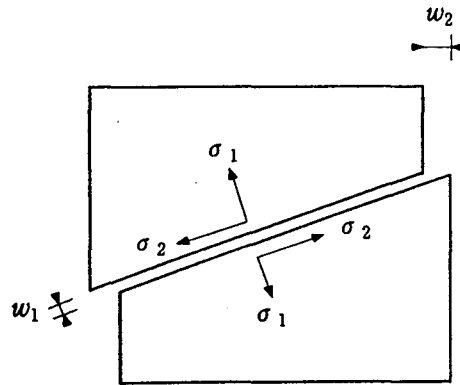


Fig.7 stresses and displacements of discontinuous line

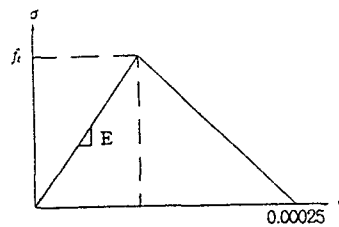


Fig.8 stress-strain relationship of tension bar

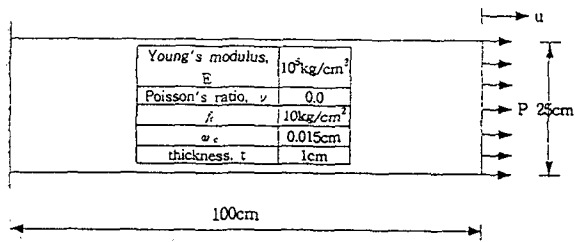


Fig.9 tension bar

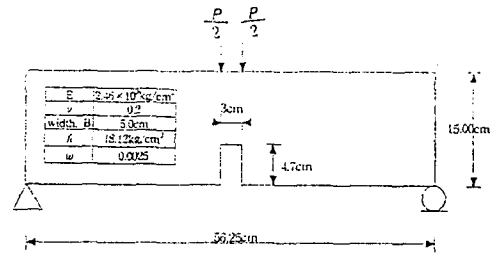


Fig.12 single-notched concrete beam

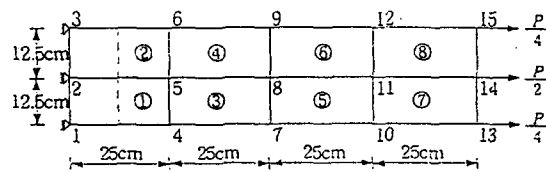


Fig.10 finite elements of tension bar

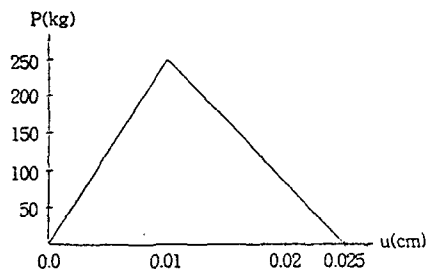


Fig.11 results of tension bar

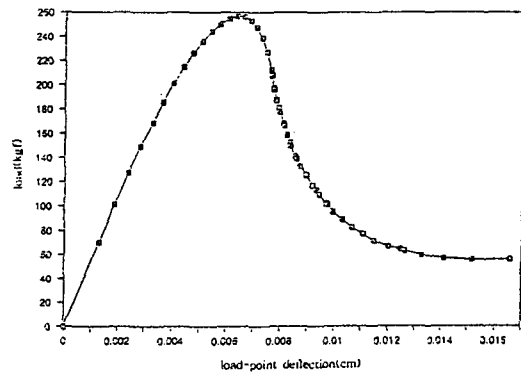


Fig.13 result from the present analysis