

감차적분을 이용한 曲線 Mindlin평판의 解析에 關한 研究

이 우 현⁽¹⁾, 정 영 수⁽²⁾, 김 철 우⁽³⁾, 은 상 준⁽⁴⁾

1. 서 론

평판 부재는 최근 기계, 항공기, 선박 분야와 더불어 토목, 건축의 구조 재료로 널리 사용되고 있다. 오늘날 구조물이 대형화, 경량화 되어가는 추세에 따라 설계에 있어서도 보다 정확하고 체계적이며 일반적인 해석법이 필요하게 되었다. 유한요소법(Finite Element Method)은 기하학적인 형상과 어떠한 경계조건에도 제한을 받지 않는 가장 강력하고 다양한 근사해법으로 널리 사용되어 왔다. 그러나 일정한 기하학적인 형상을 가지는 경우에 방대한 입력 자료량과 계산과정에서 많은 시간과 노력을 필요로 하는 유한요소법에 비해 비교적 간편한 방법인 유한대판법(Finite Strip Method)을 이용하는 것이 시간적, 경제적으로 유리할 수도 있다.

본 연구에서는 휨 변형만을 고려하는 고전적인 Kirchhoff이론에 비해 전단 변형까지 고려할 수 있는 Mindlin평판요소를 도입하여 한 방향으로 유한요소법중 변위법을 이용하고 다른 한 방향으로 급수해를 이용한 일종의 반해석(semi-analytic) 방법인 유한대판법으로 직사각형 평판과 곡선 평판을 해석할 수 있는 Program을 작성하였으며, 곡선 평판에서 중심각의 변화와 곡률 반경의 변화에 따른 처짐과 모멘트의 변화에 대해서 알아보았다.

2. 곡선 Mindlin 평판의 기본이론

2.1 변위 장 (Displacement field)

그림 2.1의 Tronconical 셸 요소에서 대표적인 한 점의 3개의 변위 u, v, w 는 중립면에 일치하는 점의 3개의 변위와 2개의 회전변위의 합으로 표현된다.

$$\begin{aligned} u(s, \theta, n) &= u_0(s, \theta) + n \theta_s(s, \theta) \\ v(s, \theta, n) &= v_0(s, \theta) + n \theta_\theta(s, \theta) \\ w(s, \theta, n) &= w_0(s, \theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서 u_0, v_0, w_0 는 셸 중립면에서의 변위이고 θ_s 와 θ_θ 는 각각 sn 과 $t\theta$ 평면에 포함되는 법선에 대한 회전 변위이다. Mindlin-Reissner 이론에서 이들 회전 변위는 변형 전과 변형 후 중립면의 경사의 변화와 전단 변형의 영향으로 인한 평균 회전변위 ϕ 의 합으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \theta_s &= -\frac{\partial w_0}{\partial s} + \phi_s \\ \theta_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \phi_\theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

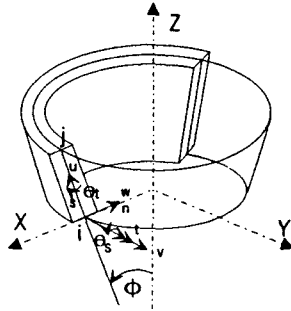


그림 2.1 tronconical 셸 요소

2.2 변형률 장 (Strain field)

Washizu의 tronconical 셸 이론에 따라 지역좌표계 s, t, n 에 대한 변형률은 다음과 같이 정의된다.

- 1) 중앙대학교 공과대학 토목공학과 교수
- 2) 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수
- 3) 중앙대학교 공과대학 토목공학과 박사과정
- 4) 대우엔지니어링 구조부

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_{s\varphi} \\ \gamma_{\theta\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \sin \varphi - \frac{w}{R_t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \sin \varphi - \frac{w}{R_t} \frac{\partial v}{\partial s} \\ \theta_s + \frac{\partial w}{\partial s} \\ \theta_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R_t} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

식(2.1)을 식(2.3)에 대입하여 정리하면 변형률 벡터는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \epsilon_m + \begin{pmatrix} n \epsilon_b \\ \epsilon_s \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

여기서

$$\epsilon_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} \sin \varphi - \frac{w_0}{r} \cos \varphi \\ \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{r} \sin \varphi \end{pmatrix}, \epsilon_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\theta_s}{r} \sin \varphi \\ \frac{\partial \theta_\theta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} - \frac{\theta_\theta}{r} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w_0}{\partial s} \end{pmatrix}, \epsilon_s = \begin{pmatrix} \theta_s + \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{v_0}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

는 각각 membrane, 휨, 그리고 전단에 의한 일반화된 변형률 벡터이다.

식(2.5)를 얻기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

$$\left(1 + \frac{r}{R_t}\right) \approx 1; \quad \frac{r^2}{R_t} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial s} \approx 0; \quad r = R_t \cos \theta$$

2.3 응력 (stresses)

식(2.5)의 일반화된 변형률에 일치하는 단면력(stress resultants) 벡터는 다음과 같다.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_m \\ \sigma_b \\ \sigma_s \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

여기서

$$\sigma_m = \begin{pmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{pmatrix}; \quad \sigma_b = \begin{pmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{pmatrix}; \quad \sigma_s = \begin{pmatrix} Q_s \\ Q_\theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

는 각각 membrane, 휨, 그리고 전단 변형의 영향에 의한 일반화된 단면력 벡터이다.

2.4 응력-변형률 관계

탄성 재료에 대해 일반화된 변형률과 응력 사이의 관계식은

$$\sigma = D \epsilon \quad (2.8)$$

여기서

$$D = \begin{pmatrix} D_m & 0 \\ & D_b \\ 0 & D_s \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

이고, 등방성 평판의 경우

$$D_m = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}, \quad D_s = \frac{Et}{2\alpha(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

여기서 E는 탄성계수, ν 는 포와송 비, t는 셸의 두께, α 는 단면의 warping을 고려한 허용계수이다.

2.5 셸의 총 포텐셜에너지

셸의 총 포텐셜에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int \int_A \epsilon^T \sigma \, dA - \int \int_A u^T b \, dA - \int \int_A u^T t \, dA - \int \int_\Gamma u^T p \, d\Gamma \quad (2.11)$$

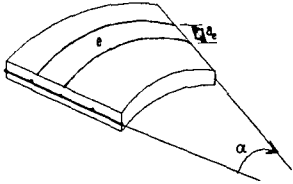
여기서 u는 셸의 중립면의 한 점에서의 변위 벡터이다. 그리고 b와 t는 단위 면적당 작용하는 체적력과 분포하중, p는 Γ 선을 따라 작용하는 집중하중 벡터이고 A는 셸의 중립면의 면적이다.

2.6 곡선 평판의 유한 대판 정식화

곡선 평판 해석에 대한 Mindlin 대판의 정식화는 앞에서 제시되었던 쉘 요소에서 유도되었던 모든 방정식에서 구조물의 membrane 거동을 무시함으로써 직접 유도될 수 있다.

그림 2.2와 같은 곡선 평판은 유한개의 곡선 대판요소로 나눌 수 있다.

만일 대판요소 ϵ 가 k 개의 절점을 가지고 있다면 변위장은 횡 방향의 다항식 형상함수와 원주 방향의 Fourier 확장의 곱으로써 표현될 수 있다.



$$u^{(e)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_j^i a_i \quad (2.12)$$

여기서 N_j^i 과 a_i 은 각각 i 번째 조화항에 대한 절점 i 와 관계되는 일반화된 형상함수행렬과 절점 변위 진폭 벡터로써 다음과 같다.

$$u^{(e)} = [w_0, \theta_s, \theta_\theta]^T \quad (2.13)$$

그림 2.2 곡선 Mindlin 평판 요소

$$N_i^j = \begin{bmatrix} N_i S_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i S_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i C_i \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$a_i^j = [w_{0i}^j, \theta_{si}^j, \theta_{\theta i}^j]^T \quad (2.15)$$

여기서 $S_i = \sin \frac{(i\pi\theta)}{\alpha}$, $C_i = \cos \frac{(i\pi\theta)}{\alpha}$ 그리고 α 는 곡선 평판의 중심각이다.

선택된 조화확장은 $\theta = 0, \theta = \alpha$ 에 대한 단순 지지 조건을 만족하며 따라서 이 정식화는 양단이 단순 지지된 곡선 평판 대해서 유효하다.

일반화된 변형률 벡터는 식(2.12)를 식(2.4)에 대입함으로써 절점변위진폭의 항으로 얻어질 수 있다.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_j^i a_i^j \quad (2.16)$$

여기서 B_j^i 은 i 번째 조화항에 대한 절점 i 의 일반화된 변형률 행렬로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_j^i = \begin{Bmatrix} B_{\theta s}^i \\ B_{\theta \theta}^i \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

여기서

$$B_{\theta s}^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} S_i & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{r} \sin \varphi S_i & -\frac{N_i}{r} \frac{i\pi}{\alpha} S_i \\ 0 & \frac{N_i}{r} \frac{i\pi}{\alpha} C_i & (\frac{\partial N_i}{\partial s} - \frac{N_i}{r} \cos \varphi) C_i \end{bmatrix}, B_{\theta \theta}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} S_i & N_i S_i & 0 \\ \frac{N_i}{r} \frac{i\pi}{\alpha} C_i & 0 & N_i C_i \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

여기서 $B_{\theta s}^i$ 과 $B_{\theta \theta}^i$ 은 각각 i 번째 조화항에 대한 절점 i 의 휨과 전단영향에 의한 일반화된 변형률 벡터이다. 하중벡터 역시 변위장과 같은 방법으로 확장시킬 수 있다.

$$(b, t, p) = \sum_{i=1}^n (S^i b^i, S^i t^i, S^i p^i) \quad (2.19)$$

여기서

$$S^i = \begin{bmatrix} S_i & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

그리고 b^i, t^i, p^i 은 i 번째 조화항에 대한 하중진폭벡터이다.

식(2.8),식(2.16),식(2.19)를 대판의 총 포텐셜에너지 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} \int_{A^e} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_j^i a_i^j)^T D (\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 B_n^m a_m^n) dA - \int_{A^e} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_j^i a_i^j) \sum_{m=1}^3 b^m dA \\ & - \int_{A^e} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_j^i a_i^j) \sum_{m=1}^3 t^m dA - \int_{r^e} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_j^i a_i^j) \sum_{m=1}^3 p^m dr \end{aligned} \quad (2.21)$$

함수 S_i 과 C_i 의 직교 특성을 고려하면 식(2.21)은 다음과 같은 간단한 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i^j)^T [K_{ij}^{mn}]^e a_m^n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i^j)^T [f]_i^e \quad (2.22)$$

여기서

$$[K_{ij}^{mn}]^e = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} \int_0^\alpha (\overline{B}_i^j)^T D \overline{B}_j^i r ds & \text{for } l=m \\ 0 & \text{for } l \neq m \end{cases} \quad (2.23)$$

는 i 번째 조화항에 대해 절점 i 와 j 로 연결된 폭 a^e 인 대판요소의 강성행렬이고 여기서 \overline{B}_i^j , 행렬은 식

(2.18)에서 $s_i = c_i = 1$ 로 한 것과 동일하다. 또한,

$$[f^i]^e = \int_{A^i} (N^i)^T b^i dA + \int_{A^i} (N^i)^T t^i dA + \int_{r^i} (N^i)^T p^i d\Gamma \quad (2.24)$$

는 i 번째 조화항에 대한 절점 i 에서의 하중벡터이다. 다른 하중의 경우에 대한 세부 사항은 부록에 있다.

식(2.23)과 식(2.24)에서 대판의 강성행렬과 하중벡터는 다른 조화항 사이에는 서로 연관이 없음을 알 수 있고 따라서 각 조화항에 대해 분리하여 계산될 수 있다.

전체 구조물에 대해 분리된 평형방정식은 절점진폭에 대해 총 포텐셜에너지의 최소화로 쉽게 얻어지며 그 결과는 다음과 같은 방정식이 된다.

$$\begin{bmatrix} K^{11} & & & 0 \\ & K^{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K^{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

따라서 강성행렬 K^i , f^i 은 각 대판들의 기여(contribution)를 조합하여 각 조화항에 대해 분리하여 계산될 수 있고 i 번째 조화항에 대한 방정식은 절점진폭 a^i 에 대해 독립적으로 풀 수 있다.

이 과정을 모든 조화항에 대해 반복하면 다른 절점진폭계수들을 얻을 수 있고 순차적으로 구조물의 각 점에서의 변위가 식(2.12)로부터 그리고 응력은 식(2.16)과 식(2.8)에 의해 계산될 수 있다.

3. 컴퓨터 프로그램 및 수치해석

3.1 개요

본 논문의 이론에 의해 작성된 컴퓨터 프로그램은 직사각형 및 곡선 평판의 Mindlin 대판해석 프로그램이다.

프로그램은 1개의 주 프로그램과 11개의 부 프로그램으로 구성되어 있으며 프로그램에서 사용된 변수들과 부 프로그램은 참고문헌[7]에 의해 사용된 표기를 채택하였으며 사용된 언어는 Fortran77이고 개인용 컴퓨터를 이용하여 프로그램을 수행하였다. 해는 Fontal method를 이용하여 구하였고, 프로그램 수행시 컴퓨터의 주 기억장치의 용량을 절약할 수 있는 Core storage 방법으로 계산 효율을 높였다.

프로그램은 다음과 같이 크게 4개의 단계로 구분할 수 있다.

1. 입력 data의 정의.
유한대판법의 큰 장점중의 하나는 유한요소법과 비교하여 상대적으로 적은 양의 data를 필요로 한다는 것이다. 유한대판프로그램의 입력 data는 뼈대구조물 해석에 필요한 표준 프로그램 data와 같다. 입력 data를 제어하는 부 프로그램은 INPUT 이다.
2. 각 조화항에 대한 강성행렬, 응력행렬, 그리고 하중벡터의 생성
강성행렬과 응력행렬들은 부 프로그램 STIFFS에서 계산되고 하중벡터는 부 프로그램 LOADFS에서 구해진다. 이 부 프로그램들은 변위장에 대한 정의에서 사용된 급수의 각 조화항에 대한 계산을 포함하고 있는 loop안에 있다. 또한 부 프로그램 STREFS에서는 계산된 대판의 응력행렬을 이용하여 각 조화항에 대한 단면력(Stress resultant)을 계산한다.
3. 각 조화항에 대한 연립방정식의 풀이
부 프로그램 FRONT는 각 조화항에 대한 대판 강성행렬을 조합하고 Frontal elimination technique를 이용하여 각 조화항에 대해 미지의 변위진폭을 구하는 부 프로그램이다.
4. 각 조화항에 대한 변위와 응력의 합산
부 프로그램 ADD에서는 구조물의 한 점에서의 절점변위와 단면력을 계산하기 위해 모든 조화항에서의 기여(contribution)를 합산한다.

3.2 해석예제 및 고찰

본 연구에서는 그림 3.1와 같이 2변이 단순 지지된 곡선 평판에서 하중 위치와 중심각의 변화에 따른 처짐과 모멘트의 변화를 비교해 보았다. 해석시 사용된 대판요소수는 10개이며, 사용된 조화항은 25항 이다.

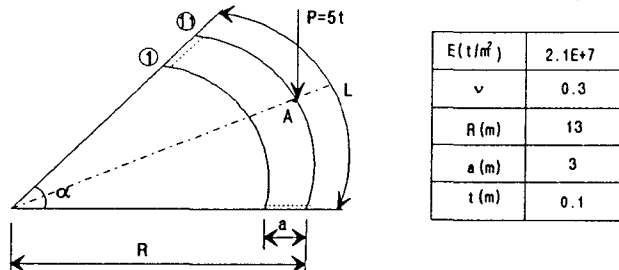


그림 3.1 곡선 평판의 해석 모델 및 제원

표3.1(a) $\alpha=30^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대처짐

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)
Linear	0.85929	9.88	0.95811	0.48	0.95900	0.57
Quadratic	0.96284	0.98	0.94820	0.55	0.95541	0.20
Cubic	0.96764	1.48	0.93266	2.18	0.94606	0.78

*SAP90 : 0.9535

표3.1(b) $\alpha=30^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대모멘트

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)
Linear	5.42263	6.66	5.11125	12.02	5.17071	11
Quadratic	5.76639	0.75	5.55412	4.40	5.57858	3.98
Cubic	5.82688	0.29	5.69184	2.03	5.73668	1.26

*SAP90 : 5.8099

표3.2(a) $\alpha=45^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대처짐

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)
Linear	0.27253	7.7	0.29983	1.53	0.30070	1.83
Quadratic	0.31906	8.04	0.29422	0.36	0.29517	0.04
Cubic	0.36325	23.00	0.29762	0.78	0.31450	6.50

*SAP90 : 0.2953

표3.2(b) $\alpha=45^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대모멘트

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)
Linear	6.61912	3.37	6.41906	6.29	6.46764	5.58
Quadratic	7.17419	4.73	6.70696	2.09	6.71861	1.92
Cubic	7.81084	14.02	6.91262	0.91	7.14474	4.30

*SAP90 : 6.85

표3.3(a) $\alpha=60^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대처짐

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)	처짐(m) (10E-2)	오차 (%)
Linear	0.70623	4.22	0.74522	1.06	0.739	0.22
Quadratic	0.81174	10.08	1.06842	44.85	1.03278	40.06
Cubic	0.38971	47.15	0.40075	45.65	0.35475	51.89

*SAP90 : 0.7374

표3.3(b) $\alpha=60^\circ$ 인 경우 중앙단면의 최대모멘트

적분 요소	Full		Selective		Reduced	
	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)	모멘트 (t.m)	오차 (%)
Linear	8.19352	0.6	7.85575	3.55	7.83708	3.77
Quadratic	8.72629	7.14	10.5957	30.09	10.3306	26.84
Cubic	5.58499	31.43	5.65217	30.6	5.32712	34.59

*SAP90 : 8.145

4. 결론 및 추후 연구과제

본 논문은 Mindlin 평판이론을 도입한 유한대판법을 이용하여 곡선 평판의 중심각과 곡률의 변화에 따른 결과를 알아보았으며 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 곡선 평판의 경우 중심각이 작은 경우 거의 구형평판과 유사한 결과를 나타내었으나 중심각이 60° 이상인 경우 곡률이 해석에 큰 영향을 미치게 되므로 이런 경우 내판 해석시 2절점 요소를 사용함이 좋을 것으로 사료된다.

2. L/R이 0.2이하인 경우 최대 처짐과 모멘트가 矩形板의 10% 이내로 수렴하여 이런 경우에는 구형판으로 해석해도 무난할 것으로 사료된다.

본 연구에서 수행한 방법은 다양한 경계조건에 대한 해석에 어려움이 있어 추후 이러한 단점을 보완하는 변위 함수와 하중 벡터의 개발과 Program의 개발에 관한 연구가 필요하다.

참고문헌

1. E. Hinton and D.R.J. Owen, " Finite Element in Plasticity : Theory and Practice ", Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.,1980.
2. E. Hinton, " Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method ", Comput. Structures 8, pp 99-105, 1978.
3. E. Hinton and O.C. Zienkiewicz, ".A note on a thick finite strip ", Int. J. Num. Meth. Engng 11,pp 905-909, 1977.
4. E.D.L. Pugh, E Hinton and O.C. Zienkiewicz, " A study of quadrilateral plates bending elements with reduced integration ", Int. J. Num. Meth. Engng 12, pp 1059-1079, 1978.
5. S. Ahmad, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz, " curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems ", Proc. 2nd Conference Matrix Methods in struct. Mech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1968.
6. E. Hinton and D.R.J. Owen, " Finite Element Programing ", Academic Press, London, 1979.
7. E. Hinton and D.R.J. Owen, " Finite Element Software for Plate and Shells ", Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.,1984.
8. B.M. Irons, " A frontal solution programing for finite element analysis ", Int. J. Num. Meth. Engng., 2, pp 5-32,1970.
9. 최창근, " 유한요소 해석 ", 집문당, 1992.
10. 김선훈, 최창근, " Mindlin 평판 유한요소 개선 ", 전산구조공학. 제1권, 제2호, 1988.
11. 은상준, " 유한대판법을 이용한 Mindlin 평판의 해석에 관한 연구 ", 중앙대학교 석사학위 논문, 1994.