

다확률변수를 고려한 평면프레임의 신뢰성 해석

김 기 정* 정 영 수**

1. 서론

정적 및 동적 해석의 공학적인 문제에 유용하게 사용되고 있는 유한 요소 해석법에 구조 신뢰성 이론을 접목시킨 확률론적 유한요소 해석법으로 구조물의 안전성을 평가하는 연구가 많이 수행되고 있다. 그러나 기존의 구조설계는 풍하중, 지진하중 등과 같은 불확정 성질을 내포하고 있는 하중과 재료강도, 탄성계수등의 재료 성질의 불확정 요인등을 고려하지 않고 확정치로 해석함으로써 구조물의 거동을 예측하여 왔으며 이와 같은 불확실성을 고려하기 위하여 안전계수의 개념을 도입하였다. 그러나 이러한 확정론적 해석방법은 불확실성의 정도를 체계적이고 정량적으로 나타내기는 상당히 어려운 점이 있다.

본 논문에서는 구조물의 안전 수준을 정량적으로 분석하기 위하여 기존의 결정론적 구조해석 법과는 달리 대상 구조물의 탄성계수, 단면 2차 모멘트 및 하중등의 변수들이 가지는 확률론적 특성을 고려한 몬테카를로 모의 기법 및 응답면 기법을 이용한 해석을 수행하였다.

2. 확률변수

본 연구에서의 재료에 대한 확률변수로서는 각각의 부재의 탄성계수와 단면 2차 모멘트 및 하중을 선택하였으며 탄성계수의 경우, 표본식은 다음과 같다.^[2,3]

부재별 탄성계수의 경우 ;

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(1 + \mathbf{e}(\mathbf{x})) \quad (1)$$

위 식에서 $\mathbf{E}[\mathbf{e}(\mathbf{x})] = 0$ 을 나타내며 $\mathbf{E}[\mathbf{E}(\mathbf{x})] = \mathbf{E}_0$ 는 각 부재의 탄성계수의 기대치, 즉 종래의 확정론적 유한요소 해석에서 사용된 값이며 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 는 통계적 특성을 가지는 확률장으로서 정규 분포로 가정하였다. 또한 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 는 양의 값을 갖도록 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 의 값을 -1에서 1의 범위를 갖도록 하였으며 다음의 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.^[4]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\kappa_n \mathbf{x} - \phi_n) \quad (2)$$

$\alpha_n = \sqrt{2S_{ee}(\kappa_n)}\Delta\kappa$ 이며 ϕ_n 는 확률론적 위상각(Random Phase Angle)이다. 그리고 $S_{ee}(\kappa)$ 는 스펙트럼 밀도함수로서 다음의 식(4)과 같으며, 단면 2차 모멘트 및 하중도 같은 방법으로 가정하였다. 재료 상수인 탄성계수의 변이를 나타내는 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 의 상관함수와 스펙트럼 밀도함수는 각각 다음과 같이 가정하여 구하였다.^[7]

$$\mathbf{R}_{ee}(\tau) = \mathbf{E}[\mathbf{e}(\mathbf{x}_1)\mathbf{e}(\mathbf{x}_2)] = \sigma_e^2 \exp\left[-\left(\frac{|\tau|}{d}\right)^2\right] \quad (3)$$

상기 식에서 d는 상관관계의 척도(Scale of Correlation)을 나타내는 양의 매개변수이며 σ_e 는 확률변수 $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ 의 표준편차이다. 여기서 $\tau = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ 로서 각 부재의 탄성계수의 분포를 두부재 사이의 거리의 함수로 가정하여 확률변수의 상관함수를 상기 식과 같이 $|\tau|$ 만의 함수로 표시하였다. 위와 같은 관계로 식(4)의 상관함수로 부터 유도된 스펙트럼 밀도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_{ee}(\kappa) = \frac{\sigma_e^2 d}{4\pi} \exp\left(-\frac{\kappa^2 d^2}{4.0}\right) \quad (4)$$

* 중앙대학교 대학원 토목공학과 석사

** 중앙대학교 토목공학과 부교수

3. 몬테칼로 모의기법

몬테칼로 모의 기법은 일반적인 정적 유한 요소 해석을 수행할 경우 응답하는 아래와 같이 강성행렬의 역행렬을 구함으로서 해석할 수 있다. [2]

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \rightarrow \{\Delta\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (5)$$

그러나 확률 유한요소법에서는 가정된 확률변수의 변이로 인하여 증감되는 강성행렬은 다음과 같이 선형적으로 증첩하여 나타낼 수 있다.

$$[K] = [K_0] + [\Delta K] \quad (6)$$

$[K_0]$ 는 기대치의 행렬로 정적해석시에 입력되는 값으로 부터 유도된 강성행렬을 나타내며 $[\Delta K]$ 는 확률변수의 변이에 따른 강성행렬의 증감을 나타낸다. 그러므로 본 연구에서의 i 번째의 계산단계에서의 응답변이는

$$\{\Delta\}_i = [K]_i^{-1}\{F\} \quad (7)$$

이며 각 단계에서의 응답의 기대값 및 분산행렬은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\{\Delta\}_{\text{mean}} = E[\{\Delta\}] \quad (8)$$

$$\{\Delta\}_{\text{COV}} = E[(\{\Delta\} - \{\Delta\}_{\text{mean}})^2] \quad (9)$$

4. 응답면 기법

응답면 기법은 어떤 구조물에 대하여 확률변수, 즉 하중, 재료특성 등 설계변수들의 변화에 대한 결과들인 절점 변위나 응력 등의 변이에 따른 관계를 근사적으로 표현할 수 있게 하여 어느 범위내에서는 확률변수가 변하여도 결과를 예상할 수 있도록 한다.

먼저 구조물의 신뢰성 해석시 주어진 제한조건에 대한 한계 상태 방정식 $G(x)$ 는 일반적으로 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (10)$$

여기서 x 는 각각 독립된 확률변수들이며, $G(x)$ 가 0(Zero)보다 크면 안전한 상태를 의미하며, 0(Zero)보다 작거나 같으면 파괴 상태를 의미한다. 그러므로 파괴확률 p_f 는 식(11)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P_f = 1 - \int_{G(x) > 0} f(x, x, \dots, x) dx \quad (11)$$

$f(x)$: 확률변수 x 의 결합밀도 함수

그러므로 확률변수의 함수로 나타낼 수 없는 한계상태 방정식을 응답면 기법을 이용하여 간단한 함수로 바꾸어 구조 신뢰성해석을 실시하여 파괴확률을 구할 수 있다. 응답면 기법의 기본가정은 관심을 갖고 있는 확률변수를 어떤 특정 범위에 대하여 한계상태 방정식 $G(x)$ 을 바꾸어 새로운 응답면 $\bar{G}(x)$ 로 나타낸다는 것이다. [6] 새로운 응답면 $\bar{G}(x)$ 를 구하는데 있어서 중요한 점은 파괴확률을 구할 때 파괴확률에 영향을 미치는 것은 파괴면상의 확률적 특성이므로, 실제 응답과 새로운 응답면과의 오차를 최소화 하여야 파괴면상의 확률적 특성을 명확히 나타낼 수가 있다. 그리고 가능한 적은 계산시간을 요하고 임의 점에서의 모든 테이타가 다 필요한 것이 아니라 관심있는 영역에 대하여 최소의 테이타로서 최대의 효과를 얻는 것을 목적으로 한다. 그러므로 새로운 응답면 함수를 결정할 때 고려되어야 할 사항은 한계상태면을 근사시켜 구할 새로운 응답면 함수의 형식을 결정하는 것과 각각의 확률변수의 값을 갖는 Sampling Point x 의 영역 결정이다.

4.1 1차 다항식법

이용한 새로운 응답면 $\bar{G}(x)$ 의 형식은 다음과 같으며 확률변수의 곱의 항까지 고려 하였다. [4]

$$\bar{G}(x) = a_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=j}^n \sum_{i=j}^n c_i x_i x_j \quad (12)$$

n은 고려되는 확률변수의 갯수이며, a_i, b_i, c_i 는 응답면 함수를 나타내기 위한 계수이다.

4.2 2차 다항식법

기존의 응답면 기법은 응답면을 결정할때 평균점 부근의 Sampling Point X 를 이용한 값을 이용하기 때문에 평균점 부근의 확률적 특성만을 반영하게 된다. 그러나 실제의 구조물의 파괴 확률에 영향을 미치는 것은 주로 파괴면상의 특성이므로 기존의 방법을 이용한 파괴확률은 많은 오차가 발생되어 한계상태면의 특성을 적절히 반영할 수 없는 단점이 있다. Bucher [6]는 이와 같은 단점을 보완하여 새로운 방법을 제시하였으며 응답면 $\bar{G}(x)$ 는 식(13)와 같이 각각의 확률변수의 제곱항까지 가정하였다.

$$\bar{G}(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \quad (13)$$

여기서 n는 고려되는 확률변수의 갯수이며 a_i, b_i, c_i 는 응답면 함수를 표현하기 위한 계수이다. 또한 Sampling Point를 결정하는 과정에서 보간법을 이용하여 수정 Sampling Point를 구하는 새로운 방법을 제시하였다.

$$X_M = \bar{x} + (x_D - \bar{x}) \frac{G(\bar{x})}{G(\bar{x}) - G(x_D)} \quad (14)$$

X_M : 수정된 Sampling Point \bar{x} : 각각의 확률변수의 평균 x_D : 처음 구한 실제점

4.3 수정 1차 다항식법

1차 다항식법과 2차 다항식법을 일부 수정한 기법으로서 한계 상태면의 확률적 특성을 최대로 반영하기 위한 방법이다. 최초의 응답면은 기존의 방법과 Bucher의 기법과 같이 평균점 부근의 특성을 이용하지만 두번째 응답면 부터는 평균점 대신 응답면상의 최다 확률 파괴점을 구하여 Sample Point를 결정한다. 또한 응답면은 다음과 같이 확률변수의 1차항까지만 고려하였다. [8]

$$\bar{G}(x) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (15)$$

n : 확률변수의 갯수 a_i, b_i : 응답면 함수를 표현하기위한 계수

4.4 응답면기법에 의한 신뢰성해석

각각의 응답기법에서 응답함수 $\bar{G}(x)$ 를 결정하고 Sampling Point선정에 의한 각각의 응답값을 구하면 그 값들의 함수관계를 이용하여 응답함수 $\bar{G}(x)$ 의 계수를 구하여야 한다. 본 논문에서는 최소 자승법을 이용하여 각각의 계수를 구하였다. [9]

1차 다항식법 : (2개의 독립 변수를 갖는 경우)

$$y = a + bx_1 + cx_2 + \varepsilon \quad (16)$$

$\varepsilon = \text{error}$

구한 응답함수를 이용하여 신뢰성 지수 β 와 파괴점을 구하기 위하여 2차모우멘트 방법 (Advanced First-Order Second-Moment Method)을 사용하였다. 기본 확률변수를 표준 정규 분포를 갖는 새로운 변수로 선형변환하여 변화된 좌표공간의 원점으로 부터 가장 가까운 거리에 있는 파괴면상의 한점 (MPFP; Most Probable Failure Point or Design Point)에서 파괴면을 선형 근사하여 그 최소 거리를 신뢰성 지수로 정의하였다.

여기서 MPFP를 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 라 하고 상태함수 $G(\mathbf{x})$ 를 \mathbf{x}^* 에 대하여 1차항까지 Taylor 전개하면 $G(\mathbf{x}^*) = 0$ 이므로

$$G(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial G(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) = 0 \quad (17)$$

$\frac{\partial G(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}}$ 는 \mathbf{x}^* 에서 계산된 $G(\mathbf{x})$ 의 \mathbf{x} 에 대한 1차 미분값을 의미한다. 따라서 원점으로 부터 파괴면까지의 최단거리 β 는 다음과 같다.

$$\beta = -\frac{\sum_i \frac{\partial G(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} x_i^*}{|\nabla G(\mathbf{x}^*)|} = \sum_i \alpha_{x_i} x_i^* \quad (18)$$

$$\alpha_{x_i} = -\frac{\frac{\partial G(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}}{|\nabla G(\mathbf{x}^*)|} \quad (19)$$

$$|\nabla G(\mathbf{x}^*)| = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right)^2} \quad (20)$$

5. 수치해석 예제 및 결론

그림1과 같은 사장교를 수치해석 예제로 사용하였다. 여기서 Cable부재는 트러스로, 보 및 주탑은 Frame요소로 간주하여 해석 하였으며 각각의 Cable요소는 420t (1, 4, 5, 8부재) 및 450t (2, 3, 6, 7부재)로 긴장되어 있다. 이 경우 절점9에서 집중하중이 작용할때 확률변수의 변이에 따른 Y방향의 변위를 표1과 같은 두가지의 경우에 대하여 신뢰성해석을 수행하였다. 첫번째 경우는 각 부재의 확률변수가 탄성계수 및 단면 2차모멘트로서 모두 정규 분포로 가정하여 500번의 모의분석을 수행하였다. 그림2와 그림4은 부재14번의 탄성계수와 단면 2차 모멘트의 변이를 보인것이며 그림3와 그림5는 가정한 분포가 정규분포임을 나타내고 있다. 그림6은 절점9에서의 Y방향 변위도의 분포를 나타내고있다. 두번째 경우는 탄성계수와 단면 2차 모멘트외에 추가로 하중을 확률변수로 고려하여 동일한 방법으로 수치해석을 수행하였다. 그림7은 하중의 변이 및 그 분포를 나타낸 것이며 그림8은 하중이 고려된 경우의 절점9에서의 Y방향의 변위도의 분포를 나타내고 있다.

표1. 선택된 확률변수의 예

해석 경우	선택 확률 변수
경우 1.	E, I
경우 2.	E, I, P

본 예제의 결과로 모의기법을 정확해로 보았을때 응답면 기법은 모의기법에 비하여 대단히 빠른 시간내에 신뢰성 해석을 수행할 수 있었지만 예제 경우1은 경우2의 결과와는 달리 선형적인 해석임에도 불구하고 모의 기법의 결과와 상당히 다른 결과를 보이고 있다. 그것은 Cable부재는 트러스, 보 및 주탑은 Frame 요소로서 전 부재가 동일한 성질의 것이 아니고, 경우1처럼 재료 요소에 대한 해석은 응답면 기법의 한계상태 방정식이 처짐에 직접적인 영향을 미치는 하중이 포함된 경우(경우2)와는 달리 처짐의 역비례 작용을 하는 재료상수(탄성계수, 단면 2차 모

먼트 등) 만으로는 정확해에 가까운 결과를 얻기 힘든 응답면 기법의 해석적인 한계를 보이고 있다고 생각된다. 반면에 하중이 포함된 경우2는 위와같이 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

표2. 응답면 기법의 해석 결과(경우1)

해석 방법	β	파괴 확률
모의기법	2.52	0.00586
1차 다항식법	1.062	0.1446
2차 다항식법	1.092	0.1378
수정 1차 다항식법	1.065	0.1439

표3. 응답면 기법의 해석 결과(경우2)

해석 방법	β	파괴 확률
모의기법	0.635	0.264
1차 다항식법	0.564	0.287
2차 다항식법	0.622	0.267
수정 1차 다항식법	0.60	0.274

본 논문은 평면 프레임 및 트러스 요소를 확률 유한 요소로한 몬테칼로 모의 기법 및 응답면 기법에 관한 연구로서 구조물의 안전성 평가에 적용할수 있는 훌륭한 방법이라 생각된다. 본 연구에서 제안된 방법은 부재 생산시, 또는 시공에서 발생할 수 있는 재료상수의 오차를 고려하여 구조해석시 안전성 검토를 실시할 수 있으며 특히 응답면 기법은 몬테칼로 모의 기법의 단점인 과도한 해석 시간을 최소화 하여 정확해에 가까운 안전계수를 얻을 수 있었다. 그러나 응답면 기법은 부재상수값의 편차가 크고 복잡한 경우 그리고 재료상수만 고려된 경우에는 한계 상태 방정식에 문제가 있음을 알 수 있었으며 이에 대한 더욱 깊은 연구가 진행되어야 할 것으로 생각된다.

6. 참고문헌

1. Hasofer, A. M. and Lind, N. C., "Exact and Invariant Second Moment Code Format", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No EM1 1974.
2. Young, S, Chung, "Response Variability of Reinforced Concrete Frame by the Stochastic Finite Element Method," The Proceeding of the Second Korea-France Joint Seminar on Computational Mechanics & Structural Engineering, Seoul, Korea Sep, 6, 9, 1993.
3. Yamazaki, F, Shinozuka, M., "Stochastic Finite Element Analysis," Stochastic Structural Dynamic, Elsevier Applied Concrete Science, 1988.
4. Wong, F. S., "Uncertainties in Dynamic Soil-Structure Interaction," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No. 2, 1984.
5. 박 성 현, "회귀 분석", 민영사, 1991
6. Ouyopornprasert, W., and Bucher, C. G., "An Efficient Scheme to Determine Response Functions for Reliability Analyses," Internal Working Report No. 30, Institute of Engineering Mechanics Innsbruck, Austria, 1988.
7. 이 대 형, "구조물의 탄성계수 변이에 따른 확률 유한요소 해석," 중앙대학교 대학원, 석사 학위논문, 1994.
8. 김 기 중, "확률 유한요소 해석을 위한 개선된 응답면 기법," 연세대학교 대학원 석사학위논문, 1992.
9. 건설부, "도로교 시방서," 건설부, 1992.

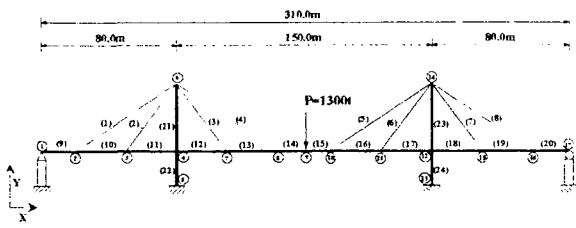


그림1 사장교 해석 예제

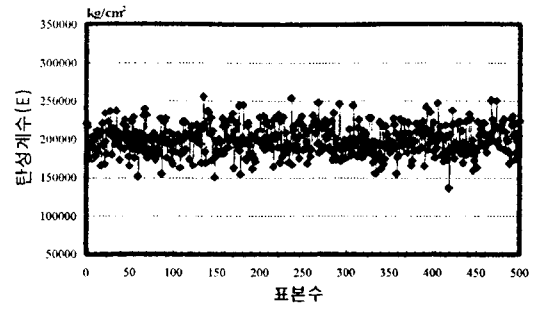


그림2 부재14의 탄성계수의 변이도

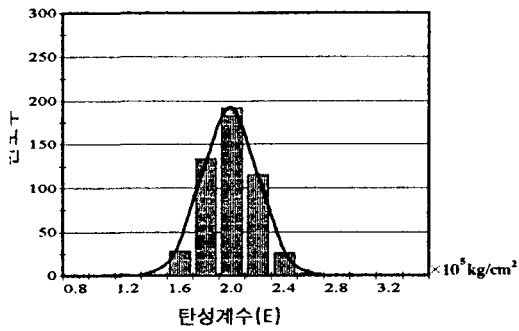


그림3 부재14의 탄성계수의 분포도

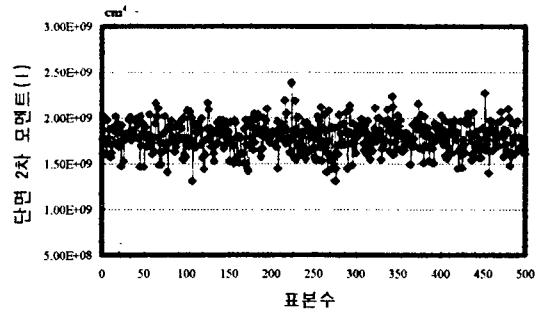


그림4 부재14의 단면 2차 모멘트의 변이도

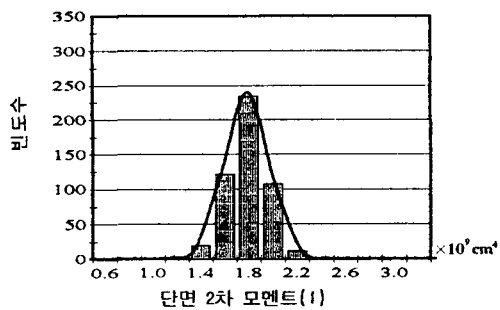


그림5 부재14의 단면 2차 모멘트의 분포도

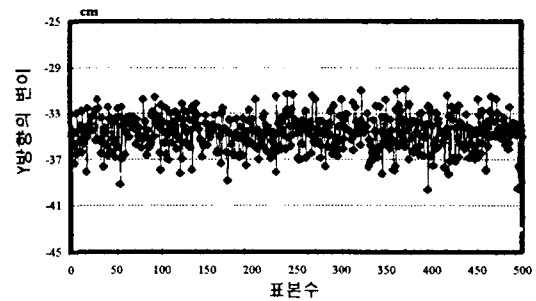


그림6 절점9에서의 Y방향 변이도(경우1)

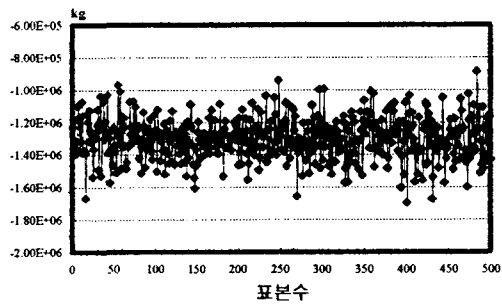


그림7 절점 하중(P)의 변이도

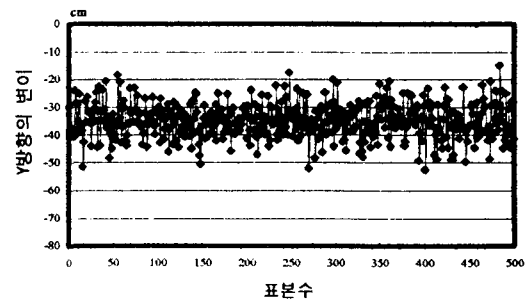


그림8 절점9에서의 Y방향 변이도(경우2)