

이산형변수를 고려한 강박스거더교의 단면최적화
Optimization of Steel Box Girder Highway Bridges
Using Discrete Variables

김 상 호*
Kim, Sang-Hyo

이 상 호**
Lee, Sang-Ho

이 민 구***
Lee, Min-Koo

ABSTRACT

In this study, the optimization program is developed to provide preliminary designs of steel-box girder bridges with minimum cost. The advantages of steel-box girder deck, when comparing with other girder types, are higher torsional rigidity and better resistance against corrosion. To achieve more rational design, systematic design procedure is required, by which the design constraints on steel-box girder are satisfied and the design variables with minimum cost are obtained. In the proposed optimum design process, the design variables are forced to be selected from the available discrete value set. The efficiency of the developed program has been verified by comparing with previous designed sections and the resulting optimum cost with discrete variables has been compared with those of continuous variables.

1. 서 론

최근 중·장대교량의 수요가 급증함에 따라 강교량에 대한 관심이 고조되고 있다. 강교량은 기존의 콘크리트 교량에 비하여 사하중에 의한 영향이 적어서 중·장대교량에 적합하며 최근 강재의 발달로 강재의 부식에 의한 문제점도 많이 해결되었다. 특히, 강교량중에서도 강박스거더교는 강판형교에 비해 비틀림에 대한 강성이 뛰어나고 표면의 반단 외부로 노출되기 때문에 부식에도 유리하며 미적으로도 우수한 장점을 지니고 있다. 그러나 강박스거더교에 대한 기존의 실체는 설계자의 경험에 기초하여 가정된 몇가지 단면 중 설계조건과 시방서의 설계허용한계를 만족하는 단면을 선택하였다. 이러한 설계자의 경험에 의존하는 설계는 많은 불확실성을 포함하고 있으며 대부분의 경우 과다설계가 되어 최적단면을 형성하지 못하기 때문에 강박스거더의 최적설계에 대한 연구가 필요하게 되었다.

본 연구에서는 현행 도로교 시방서에 제시된 여러가지 설계허용한계와 구조거동관련 제약조건들을 만족하면서 단면제작경비가 최소로 되는 설계단면을 구성하는 프로그램을 제시하고자 한다. 또한 본 연구에서는 기존의 최적화 결과들이 실무에 직접 적용될 수 없었던 점을 감안하여 설계변수를 이산형으로 가정하여 최적설계된 강박스단면이 실무에서 적용이 가능하게 하였다.

* 연세대학교 토목공학과 부교수

** 연세대학교 토목공학과 조교수

*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

2. 단면최적설계의 문제형성

2.1 최적설계의 일반형식

구조물의 최적화란 여러가지의 구조거동조건과 기하학적조건들을 만족하면서 목적함수 (objective function) 를 최소화 혹은 최대화하는 설계변수들의 최적치를 찾는 것이다. 이러한 목적함수의 최적화 문제를 수학적 계획문제로 형성하면 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Optimize} && F(X) \\ & \text{Subject to} && G_j \leq 0, \quad H_k = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, l \\ & && X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

여기서, $F(X)$ 는 목적함수, X_i 는 설계변수, G_j 는 부등제약조건식, H_k 는 등제약조건식이며, X_i^u , X_i^l 는 X_i 의 상·하한치이다.

제약조건이란 설계가 가능하게 되기 위해서 만족시켜야하는 구속조건들을 말하며 두가지 형태로 구분할 수 있다. 첫째는 등제약조건(equality constraints)으로서 평형방정식, 적합방정식, 그리고 구성방정식과 같은 대부분의 거동 제약조건들이 여기에 속한다. 둘째는 부등제약조건(inequality constraints)으로 응력, 처짐, 진동주파수, 좌굴강도 등의 상하관계를 포함하게 된다. 설계변수들의 변화범위를 직접적으로 제한하는 한계 제약조건(side constraints)도 부등제약조건 의 일종이 된다.

2.2 대상구조의 모형화

설계문제를 정식화하는데 있어서 첫 단계는 설계변수를 설정하는 것이다. 본 연구에서 대상으로 하는 단면형상은 그림 1 과 같다.

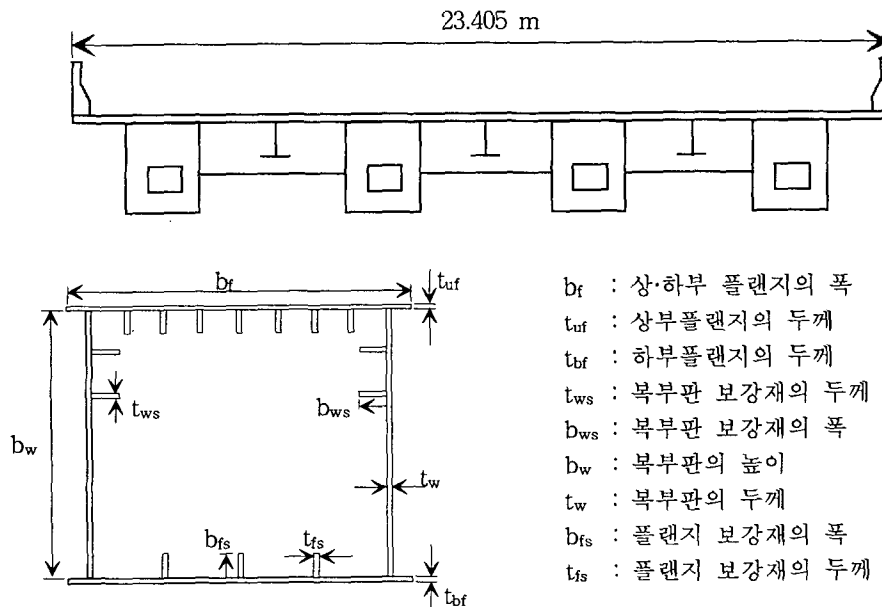


그림 1 대상구조의 단면

2.3 목적함수

본 연구에서 목적함수는 단위비용과 설계변수의 함수로 유도되는 경비함수를 선정하였다.

$$C_t = C_c \times V_c + C_s \times V_s \quad (1)$$

여기서, C_s : 강재의 단가 V_s : 강재의 물량
 C_c : 콘크리트의 단가 V_c : 콘크리트의 물량

2.4 설계변수 제약조건

강박스거더교의 최적설계를 위한 제약조건식은 식 2 ~ 식 6 과 같다.

1) 작용응력 제약조건

식 2 는 강박스거더의 플랜지와 복부판에 작용되는 휨응력과 전단응력이 각각의 허용응력을 초과하지 않도록 제한하는 조건이다.

$$\sigma_s - \sigma_{sa} \leq 0 \quad \tau_s - \tau_{sa} \leq 0 \quad (2)$$

여기서, σ_s : 강재의 휨응력 σ_{sa} : 강재의 허용휨응력
 τ_s : 강재의 전단응력 τ_{sa} : 강재의 허용전단응력

2) 합성응력 제약조건

식 3 은 휨응력과 전단응력이 모두 허용응력의 45%를 초과할 경우 고려하는 조건이다.

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2 \leq 1.2 \quad (3)$$

3) 기하학적 설계변수 제약조건

식 4 는 강박스거더의 단면형태를 유지하기 위한 기하학적인 제약조건으로, 박스거더의 플랜지 및 복부판의 두께와 길이에 대하여 적절한 형태의 상·하한치를 결정한다. 또한 취급이나 제작상의 편의를 고려하여 제약조건을 정한다. 예를 들어 복부판의 높이의 범위는 다음과 같다.

$$(b_w)_{min} \leq b_w \leq (b_w)_{max} \quad (4)$$

여기서, $(b_w)_{max}$, $(b_w)_{min}$: 복부판 길이의 상·하한치

4) 설계변수 한계 제약조건

도로교 표준시방서에 제시된 복부판(수평보강강재 2단 사용)과 상·하부 플랜지의 최소두께는 식 5 와 같다. (강종, SWS50)

$$\frac{b_w}{310} \leq t_w, \quad \frac{b_f}{48fn} \leq t_{wf}, \quad \frac{b_f}{48fn} \leq t_{bf} \quad (5)$$

여기서, n : 종방향 보강재에 의해서 구분되는 패들의 수효 ($n \geq 2$)

f : 응력구배계수, 즉, $f = 0.65\left(\frac{\phi}{n}\right)^2 + 0.13\left(\frac{\phi}{n}\right) + 1.0$ 이다.

ϕ : 응력구배, 즉, $\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1}$

σ_1, σ_2 : 각각 보강된 판의 양면의 응력 (kg/cm^2), ($\sigma_1 \geq \sigma_2$)

압축응력을 정(正)으로 한다.

5) 국부좌굴에 대한 제약조건

박스거더의 상·하부 플랜지가 n개의 보강재로 보강된 경우 국부좌굴에 대한 허용응력은 플랜지의 두께에 따라 식 6 에 의해 결정된다. (강종, SWS50)

$$\frac{b_f}{24fn} \leq t \text{ 인 경우, } \sigma_{sa} = 1,900 \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (6.a)$$

$$\frac{b_f}{48fn} \leq t < \frac{b_f}{24fn} \text{ 인 경우, } \sigma_{sa} = 1,900 - 39\left(\frac{b_f}{fn} - 24\right) \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (6.b)$$

$$\frac{b_f}{80fn} \leq t < \frac{b_f}{48fn} \text{ 인 경우, } \sigma_{sa} = 2,200,000\left(\frac{fn}{b_f}\right)^2 \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (6.c)$$

3. 최적설계의 개요 및 프로그램 개발

3.1 반복 최적화 과정

대부분의 수치방법에 의한 최적화기법들은 설계변수들의 초기설계점으로 부터 시작하여 목적함수의 값을 개선시키거나 제약조건들의 만족도를 높이는 방향으로 반복적으로 수행된다. 이러한 반복과정을 가장 일반적인 형태로 표현하면 식 7 과 같다.

$$X^q = X^{q-1} + \alpha^* S^q \quad (7)$$

여기서 q 는 반복횟수이고 S 는 설계공간에서 탐사방향 (search direction) 이다. α^* 는 탐사방향 S 에서의 이동거리 (step length) 이다.

3.2 배상함수법(Penalty Function Method)

본 연구에서 이용한 Interior Penalty Function Method는 Transformation Methods 의 대표적인 방법이며 Penalty Value, R값을 조정하므로써 최적치의 근사값을 구할 수 있는 방법이다.

배상함수법에서 이용하는 배상함수는 식 8 과 같이 정의된다.

$$P(x, R) = f(x) + \Omega(R, g(x), h(x)) \quad (8)$$

여기서, R : penalty 매개변수(parameters)

Ω : R과 g(x), h(x) 의 함수, penalty 항

g(x) : 부등제약조건(inequality constraints)

h(x) : 등제약조건(equality constraints)

식 8 에서 penalty 항을 결정하는 방법은 여러가지가 있지만, 본 연구에서는 penalty 항이 음의 값을 갖지 않도록 하는 inverse penalty 알고리즘을 이용한다. 배상함수에 의해서 구해진 무제약조건을 갖는 비선형 목적함수의 최적화를 수행하는 알고리즘은 Davidon-Fletcher-Powell Method 를 이용한다. 또한, DFP Method 에 의한 무제약 단일변수함수(unconstrained single-variable function)의 최적화방법은 황금분할법(golden section method)을 이용하였다.

3.3 이산형변수의 고려방법

현재까지 트러스, 아치 및 콘크리트 구조물등 여러가지 형식에 대하여 많은 최적화기법들이 연구되어 왔다. 그러나 이러한 연구들이 실무에 곧바로 적용되지 못하고 연구이론으로만 발전한 이유는 첫째, 연구자와 실무자들 사이에 충분한 정보교환이 이루어지지 않았고 둘째, 이론전개의 편의를 위해 많은 알고리즘이 이산형변수 대신에 주로 연속형변수(continuous variables)를 사용했기 때문이다.

본 연구에서는 강판의 제작치수에 대한 충분한 자료조사와 함께 제작 및 설계에 관련되는 설계변수를 이산형변수로 취급하여 프로그램에 포함되는 여러가지 제약조건들을 실제 현장조건과

가깝게 하였다. 그러나 프로그램의 효율성을 높이고 목적함수와 제약조건의 계산량을 줄이기 위해 각각의 설계변수들을 연속형변수로 가정하고 배상합수법을 이용하여 최적치의 근사값을 결정한 후, 연속형변수들중에서 이산형변수로 고정시킬 수 있는 변수를 결정하고 나머지 변수들을 이용해 다시 최적설계를 수행하였다. 이러한 반복과정을 통하여 모든 변수들을 이산형으로 결정하여 최적의 설계변수의 이산값(discrete values)을 찾는 알고리즘을 도입하였다.

4. 예제

본 연구에서 제안한 강박스거더의 최적화 프로그램의 타당성을 검토하기 위하여 기존에 설계되어 시공된 교량단면과 본 연구의 최적설계를 이용한 강박스거더의 최적단면을 비교·검토하였다. 대상박스거더의 단면형상은 그림 1 과 같으며, 대상구조에 이용된 재료의 특성과 단위경비는 표 1 과 같다.

표 1 재료특성 (단위 : kg/cm²) 표 2 재료의 단위경비

	콘크리트	강재(SWS50)		콘크리트	강재
탄성계수	2.5×10 ⁵	2.04×10 ⁶	재료비	118,000 원/m ³	396,000 원/ton
허용압축응력	108.0	1,900	노무비	127,000 원/m ³	485,000 원/ton
허용인장응력	-	1,900	제작경비	2,700 원/m ³	645,000 원/ton
허용전단응력	-	1,100	합계	247,700 원/m ³	1,526,000 원/ton

표 1 의 재료특성은 허용응력설계법에 기초하여 도로교시방서에 제시된 콘크리트와 강재(SWS50)의 탄성계수 및 허용응력을 나타낸 것이며, 표 2 의 단위경비는 시간에 따라 다소 변동할 수 있으나, 현장 품셈을 기초로 콘크리트의 단위부피(m³) 및 강재의 단위중량에 따른 경비를 나타낸 것이다.

예제 1

본 예제에서는 제안된 최적프로그램의 타당성을 검토하기 위하여 기존에 설계된 서울외곽순환고속도로의 내순대교의 한 단면과 동일한 조건으로 최적화한 단면을 비교·검토하였다. 내순대교의 본 구간은 지간 60m 의 단순교 구간의 중앙부로 단면에 최대모멘트가 작용하는 구간이다. 그림 1 과 동일한 단면의 단면제원과 가해진 하중조건은 표 3 과 같다.

표 3 단면제원과 하중조건

단면제원		하중조건	
복부판 높이(b _w)	2,800 mm	합성전 사하중 모멘트	2776.221 (t·m)
복부판 두께(t _w)	10.0 mm		
상·하부플랜지 폭(b _f)	2,400 mm	합성후 사하중 모멘트	164.238 (t·m)
상부플랜지 두께(t _{uf})	28.0 mm		
하부플랜지 두께(t _{bf})	36.0 mm	활하중 모멘트	1634.219 (t·m)
상부플랜지 보강재 수	7		
하부플랜지 보강재 수	3		
복부판 보강재 수	2	전 단 력	20.707 (ton)

표 3 의 단면은 4개의 박스거더로 구성된 내손대교의 내측거더 중앙부의 단면제원이며 실제 구조계산서에 제시된 하중재하법과 구조해석을 이용하였다. 이러한 단면제원을 초기값으로 하여 최적설계를 실시한 결과는 표 4, 표 5 와 같다.

표 4 대상단면의 최적설계 결과 1

		초 기 값 (실제설계단면)	연속형 최적값 1 (b_w, b_f 고정)	이산형 최적값 1 (b_w, b_f 고정)
복부판의 높이(b_w)		2,800 mm	2,800 mm	2,800 mm
복부판의 두께(t_w)		10.0 mm	9.04 mm	10.0 mm
상·하부 플랜지의 폭(b_f)		2,400 mm	2,400 mm	2,400 mm
상부 플랜지의 두께(t_{uf})		28.0 mm	19.06 mm	20.0 mm
하부 플랜지의 두께(t_{bf})		36.0 mm	30.94 mm	32.0 mm
해석결과 (kg/cm^2)	강재의 인장응력	1629.1	1897.0	1823.6
	강재의 압축응력	-1467.1	-1899.5	-1817.5
	콘크리트의 응력	-40.93	-45.65	-44.91
	전 단 응력	36.98	40.91	36.89
단위길이 제작단가 (천원/m)		2,786.6	2,319.6	2,441.6

표 5 대상단면의 최적설계 결과 2

	연속형최적값 2 (b_f 고정)	이산형최적값 2 (b_f 고정)	연속형최적값 3	이산형최적값 3
복부판의 높이(b_w)	3,093 mm	3,100 mm	3,105 mm	3,100 mm
복부판의 두께(t_w)	10.15 mm	10.0 mm	10.33 mm	10.0 mm
상·하부 플랜지의 폭(b_f)	2,400 mm	2,400 mm	2,853 mm	2,900 mm
상부 플랜지의 두께(t_{uf})	15.40 mm	16.0 mm	13.76 mm	14.0 mm
하부 플랜지의 두께(t_{bf})	26.73 mm	28.0 mm	22.28 mm	24.0 mm
단위길이 제작단가 (천원/m)	2,239.3	2,289.5	2,226.1	2,286.1

본 예제에서는 실제 단면과 최적단면의 결과를 비교하였다. 최적값 1 은 복부판의 높이와 플랜지의 폭을 고정하여 최적설계를 수행한 결과이다. 본 결과에서는 강판두께만의 최적화로 약 12.4% 의 경비를 절감할 수 있었다. 최적값 2 는 플랜지폭을 고정시키고 최적설계를 수행한 결과이고 최적값 3 은 모든 변수를 자유롭게 하여 최적설계를 수행하였다. 두 경우 모두 최초의 설계단면에 비하여 각각 17.8%, 18.0% 의 경비를 절감할 수 있었다. 각각의 경우에서 연속형 최적값으로 나타낸 항은 강판의 제작치수와 관계없이 최적화시킨 단면으로 가장 이상적인 단면이지만, 실제 제작과 시공은 거의 불가능한 단면이다. 이산형 최적값으로 나타낸 단면은 연속형 최적값을 기초로 산출한 결과이며, 연속형에 비하여 다소 과대설계되었으나, 실제 제작과 시공이 가능하도록 단면제원을 설정하였으며, 강재의 인장·압축응력에 대한 안전수준도 비슷한 것으로 나타났다. 이산형 최적값을 얻기 위하여, 연속형 최적값에서 이산형 값에 가장 가까운 변수부터 차례로 이산형으로 변환하여 다시 최적설계를 수행하는 단계적 최적화기법을 이용하였다.

예제 2

본 예제에서는 내손대교의 구간중 2경간 연속교(2@65m=130m)의 중앙지점부의 단면을 선정하였다. 본 구간도 그림 1 과 같이 4개의 강박스거더로 구성되어 있으며, 본 예제에서 대상으로 하는 단면은 하중의 영향이 큰 내측거더로 하였다. 연속교의 중앙지점부는 부모멘트가 작용되므로 합성단면을 고려할때 바닥판 콘크리트의 인장력을 무시하고 철근의 인장력만을 고려하고 상·하부 플랜지의 보강재의 갯수와 복부판 보강재의 위치가 달라지게 된다. 대상단면의 단면제원과 작용된 하중조건은 표 6 과 같다.

표 6 단면제원과 하중조건

단 면 제 원		하 중 조 건	
복부판 높이(b_w)	2,800 mm	합성전 사하중 모멘트	-3484.507 (t·m)
복부판 두께(t_w)	14.0 mm		
상·하부플랜지 폭(b_f)	2,400 mm	합성후 사하중 모멘트	-382.168 (t·m)
상부플랜지 두께(t_{uf})	40.0 mm		
하부플랜지 두께(t_{bf})	40.0 mm	활하중 모멘트	-1907.514 (t·m)
상부플랜지 보강재 수	3		
하부플랜지 보강재 수	7	전 단 력	-447.483 (ton)
복부판 보강재 수	2		

표 6 의 하중조건은 실제 구조계산서에 제시된 하중재하법과 구조해석을 이용하였다. 이러한 단면제원을 초기값으로 하여 최적설계를 실시한 결과는 표 7, 표 8 과 같다.

표 7 대상단면의 최적설계 결과 1

		초 기 값 (실제설계단면)	연속형 최적값 1 (b_w, b_f 고정)	이산형 최적값 1 (b_w, b_f 고정)
복부판의 높이(b_w)		2,800 mm	2,800 mm	2,800 mm
복부판의 두께(t_w)		14.0 mm	13.06 mm	14.0 mm
상·하부 플랜지의 폭(b_f)		2,400 mm	2,400 mm	2,400 mm
상부 플랜지의 두께(t_{uf})		40.0 mm	38.04 mm	38.0 mm
하부 플랜지의 두께(t_{bf})		40.0 mm	40.13 mm	40.0 mm
해석결과 (kg/cm ²)	강재의 인장응력	1717.0	1792.5	1780.9
	강재의 압축응력	-1775.7	-1792.4	-1783.5
	콘크리트의 응력	693.0	718.0	714.3
	전 단 응 력	-570.8	-611.8	-570.8
단위길이 제작단가 (천원/m)		3,515.0	3,399.2	3,457.5

표 8 대상단면의 최적설계 결과 2

	연속형최적값 2 (b_f 고정)	이산형최적값 2 (b_f 고정)	연속형최적값 3	이산형최적값 3
복부판의 높이(b_w)	3,139 mm	3,100 mm	3,224 mm	3,200 mm
복부판의 두께(t_w)	11.33 mm	12.0 mm	11.10 mm	12.0 mm
상·하부 플랜지의 폭(b_f)	2,400 mm	2,400 mm	2,285 mm	2,300 mm
상부 플랜지의 두께(t_{uf})	33.56 mm	34.0 mm	33.49 mm	34.0 mm
하부 플랜지의 두께(t_{bf})	35.58 mm	36.0 mm	35.54 mm	36.0 mm
단위길이 제작단가 (천원/m)	3,115.5	3,179.5	3,040.6	3,135.4

본 예제에서는 예제 1의 경우와는 달리 단면이 전단력을 크게 받고 있기 때문에 식 2에 제시된 복부판과 플랜지의 접합부에 작용되는 합성응력이 제약조건으로 작용되었다. 예제 2의 경우도 실제설계단면에 비하여 1.6% ~ 10.8% 정도의 제작경비를 절감하는 결과를 보였다.

5. 결론

본 연구에서는 강박스거더 도로교의 최적설계 프로그램을 제안하였다. 이 최적설계 프로그램은 시방서에 제시된 여러가지 제약조건과 구조거동조건들을 고려하여 최적화하므로써 단면의 제작경비를 줄이고 단면 각 부분의 안전수준을 비슷한 정도로 유지하는 단면을 설계할 수 있다. 또한 본 연구에서는 연속형변수와 이산형변수에 대한 최적설계를 비교하고, 실무에 직접 적용되어 제작·시공을 용이하게 할 수 있는 단면을 선정하여 최적설계에서 이산형변수를 고려하는 방법을 제안하였다. 예제들을 통하여 검토 및 분석된 결론은 다음과 같다.

1. 기술자의 경험에 의해 직관적으로 설계된 기존의 강박스거더 단면에 비해, 본 연구에서 제안하는 최적설계 프로그램에 의한 단면은 최적경비설계와 함께 각 부재의 안전수준을 비슷한 정도로 유지할 수 있었다.
2. 단면의 설계에서 최적설계 프로그램이 실무에서 제작과 시공에 용이하게 적용되기 위해서는 각각의 변수를 이산형변수로 고려하는 것이 타당하다.

감사의 글

본 논문은 1994년도 포항종합제철주식회사의 철강분야 대학연구비 지원에 의하여 연구되었으며 이에 심심한 사의를 표합니다.

6. 참고문헌

1. 건설부, 도로교표준시방서, 1992.
2. 한국전산구조공학회, "구조물의 최적설계," 제 3 회 전산구조기술강습회, 1991.
3. 서진호, "강박스거더 도로교의 단면최적화에 관한 연구," 석사학위논문, 연세대학교 본대학원, 1994.
4. Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*, McGraw Hill Inc., 1984.
5. Xanthakos, P. P. *Theory and Design of Bridges*, John Wiley And Sons, Inc., 1994.