

3차원 육방형 노심 해석을 위한 다항식전개법(PEN)

조진영, 김창효
서울대학교

요약

이 논문의 목적은 육방형 핵연료집합체로 구성된 3차원 노심을 해석하기 위한 다항식전개법을 개발하는 것이다. 이를 위해 3차원 육방형 핵연료 집합체를 6개의 3차원 프리즘노드로 분할하였다. 그리고 각 꼭지점에서의 점중성자속, 프리즘 각면의 면중성자속과 노드평균중성자속을 미지변수로 하여 다항식전개법에 의해 프리즘노드내의 중성자속분포를 근사하였다. 각 중성자속간의 관계식으로서 프리즘노드내에서의 노달중성자평형식, 두 노드사이의 면에서의 중성자류 연속관계식, 각 꼭지점에서의 중성자누설평형식을 사용하였다. 다항식전개법은 해석함수 전개법에 비해 약 3배 정도 빠르며 4군확산방정식에도 활용이 적용되었다. 그리고 VVER-1000 3차원 벤치마크 문제에서 최대출력오차 2.6%, VVER-440 3차원 벤치마크 문제에서 12 평면과 24평면으로 나눈경우 각각 최대출력오차 15%와 6.6%, SNR 3차원 문제에서 8 평면과 16 평면으로 나눈경우 각각 최대오차 5.4%와 2.6%를 보였다.

1. 서론

육방형 노심에서의 해석함수 전개법은 노심내의 출력분포 및 중성자속분포를 정확하게 묘사해 준다. 그러나 해석함수전개법에서는 해석함수와 노심의 고유치와의 관련성 때문에 고유치문제에서는 고유치의 수렴에 따라 각 관계식의 계수들을 새로이 구해야 한다. 그리고 해석함수전개법은 에너지군에 대한 확장성이 어려워 현재로서는 다군확산방정식에 대해서는 그 응용성이 확립되어 있지 않다.

이 논문의 목적은 해석함수 전개법의 이러한 단점을 대체할 수 있는 방법으로 다항식전개법을 개발하는 데 있다. 다항식전개법은 노드내에서의 중성자속 분포를 해석함수 대신에 다항식을 써서 근사하기 때문에 각 관계식들의 계수들이 노심의 고유치와 무관하며 에너지군에 대한 확장성이 자유롭다. 2차원 육방형노심에 대한 다항식전개법의 유용성은 이미 검증된 바 있으며^{1,2} 이 논문에서는 3차원 육방형노심에 대한 다항식전개법의 유용성을 해석함수전개법과의 비교를 통해 제시한다.

2. 3차원 프리즘노드와 다항식 전개법

그림 1은 다항식전개법에서 미지변수로 하는 3차원 프리즘노드의 각 중성자속항을 나타낸 것이다. 이들은 각 꼭지점에서 점중성자속 6개, $\phi_{gd^s}^m (d=x,u,p,s=0,1)$, 반경방향에 수직인 면에서의 면평균중성자속 3개, $\bar{\phi}_{gd}^m (d=x,u,p)$, 축방향에 수직인 면에서의 면평균중성자속 2개, $\bar{\phi}_{gz}^m (s=0,1)$, 노드평균중성자속 1개, $\bar{\phi}_g^m$, 등 12개이며 이들로부터 다항식전개법은 프리즘노드내의 중성자속을 아래와 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} \phi_g^m(x,y,z) = & C_{g0}^m + A_{gx}^m x + A_{gu}^m u + A_{gp}^m p + A_{gz}^m z + B_{gx}^m x^2 + B_{gu}^m u^2 + B_{gp}^m p^2 + B_{gz}^m z^2 \\ & + C_{gx}^m xz + C_{gu}^m uz + C_{gp}^m pz + D_{gz}^m z(x^2 + u^2 + p^2) + D_{gx}^m xup \end{aligned} \quad (1)$$

위의 식에서 x, u, p가 3개가 아닌 2개의 독립변수이므로 실제로 12개의 독립변수들의 조합이다. 그리고 위의 근사는 2차원 삼각형노드에서의 중성자속 근사에 z-방향성분을 추가한 것이다.

식 (1)의 각 전개계수들은 그림 1의 각 중성자속항들로서 표현될 수 있으며 이들중 몇개를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{g0}^m = & \frac{1}{108} \{ 2(\phi_{gx1}^m + \phi_{gu1}^m + \phi_{gp1}^m + \phi_{gx0}^m + \phi_{gu0}^m + \phi_{gp0}^m) - 48(\bar{\phi}_{gx}^m + \bar{\phi}_{gu}^m + \bar{\phi}_{gp}^m) - 33(\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m) + 306\bar{\phi}_g^m \} , \\ A_{gx}^m - A_{gu}^m = & \frac{4\sqrt{3}}{3h} (\bar{\phi}_{gx}^m - \bar{\phi}_{gu}^m) , \\ A_{gu}^m - A_{gp}^m = & \frac{4\sqrt{3}}{3h} (\bar{\phi}_{gu}^m - \bar{\phi}_{gp}^m) . \end{aligned} \quad (2)$$

다항식전개법에서는 해석함수전개법과 같이 각 중성자속항들 사이의 관계식을 구하기 위해 프리즘노드내에서의 노달중성자평형식과 인접한 두 프리즘노드사이의 인접면에서의 면평균중성자류 연속관계식 및 점에서의 중성자 누설평형식을 사용한다.

프리즘 노드내에서의 노달중성자평형식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{4\sqrt{3}}{3h} \sum_{d=x,u,p} \bar{J}_{gd}^m + \frac{1}{h_z} (\bar{J}_{gz1}^m - \bar{J}_{gz0}^m) + \sum_{g'}^m \bar{\phi}_g^m = \frac{\chi_g^m}{k_{eff}} \sum_g \nu \Sigma_{fg}^m \bar{\phi}_g^m + \sum_g \Sigma_{gg}^m \bar{\phi}_g^m \quad (3)$$

여기서 $\bar{J}_{gd}^m (d=x,u,p)$ 및 $\bar{J}_{gs}^m (s=0,1)$ 은 반경방향 면평균중성자류 및 축방향 면평균중성자류로서 각각 다음과 같이 정의되며 이들을 프리즘노드내의 중성자속항들로서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{J}_{gx}^m = & -\frac{1}{hh_z^m} D_g^m \int_{-\frac{h_z^m}{2}}^{\frac{h_z^m}{2}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d}{dx} \phi_g^m(x,y,z) \Big|_{x=\frac{\sqrt{3}}{6}h} dydz , \\ = & \frac{\sqrt{3}D_g^m}{18h} \{ -2(\phi_{gx1}^m + \phi_{gx0}^m) + 7(\phi_{gu1}^m + \phi_{gp1}^m + \phi_{gu0}^m + \phi_{gp0}^m) \\ & - 96\bar{\phi}_{gx}^m - 24(\bar{\phi}_{gu}^m + \bar{\phi}_{gp}^m) - 12(\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m) + 144\bar{\phi}_g^m \} \quad (4) \\ \bar{J}_{gz1}^m = & -\frac{4\sqrt{3}}{3h^2} D_g^m \int \int \frac{d}{dx} \phi_g^m(x,y,z) \Big|_{z=\frac{1}{2}h_z^m} dx dy , \end{aligned}$$

$$= -\frac{2D_g^m}{h_z^m} (2\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m - 3\bar{\phi}_g^m) . \quad (5)$$

식 (4)과 식 (5)를 노달중성자평형식 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\left\{ \left(\frac{96}{h^2} + \frac{12}{h_z^m} \right) D_g^m + \sum_{g'}^m \right\} \bar{\phi}_g^m + \frac{8D_g^m}{h^2} (\phi_{gx0}^m + \phi_{gx1}^m + \phi_{gu0}^m + \phi_{gu1}^m + \phi_{gp0}^m + \phi_{gp1}^m) - \frac{32D_g^m}{3h^2} (\bar{\phi}_{gx}^m + \bar{\phi}_{gu}^m + \bar{\phi}_{gp}^m) - \left(\frac{8}{h^2} + \frac{6}{h_z^m} \right) D_g^m (\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m) = \frac{\chi_g^m}{k_{eff}} \sum_g \nu \Sigma_{fg}^m \bar{\phi}_g^m + \sum_g \Sigma_{sg}^m \bar{\phi}_g^m \quad (6)$$

인접한 두 프리즘 노드 m-1과 m의 인접면에서의 면평균중성자류 연속관계식은 두 프리즘 노드에 대해 각각 존재하는 면평균중성자류 사이의 연속식을 적용하여 구할 수 있다. 면평균중성자류식 (4)를 사용하여 x-방향에 대해 성립하는 면 평균중성자류 연속관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 96(D_g^{m-1} + D_g^m) \bar{\phi}_{gx}^m + 24D_g^{m-1} (\bar{\phi}_{gu}^{m-1} + \bar{\phi}_{gp}^{m-1}) + 24D_g^m (\bar{\phi}_{gu}^m + \bar{\phi}_{gp}^m) \\ & + 12D_g^{m-1} (\bar{\phi}_{gz1}^{m-1} + \bar{\phi}_{gz0}^{m-1}) + 12D_g^m (\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m) - 144D_g^{m-1} \bar{\phi}_g^{m-1} - 144D_g^m \bar{\phi}_g^m \\ & + 2D_g^{m-1} (\phi_{gx1}^{m-1} + \phi_{gx0}^{m-1}) + 2D_g^m (\phi_{gx1}^m + \phi_{gx0}^m) - 7(D_g^{m-1} + D_g^m) (\phi_{gu1}^m + \phi_{gu0}^m + \phi_{gp1}^m + \phi_{gp0}^m) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

그리고 식 (5)를 사용하여 z-방향으로 인접한 두 프리즘 노드의 인접면에서 성립하는 면평균중성자류 연속관계식을 구하면 다음과 같다.

$$2 \left\{ \frac{D_g^{m-1}}{h_z^{m-1}} + \frac{D_g^m}{h_z^m} \right\} \bar{\phi}_{gz0}^m + \frac{D_g^{m-1}}{h_z^{m-1}} \bar{\phi}_{gz1}^{m-1} + \frac{D_g^m}{h_z^m} \bar{\phi}_{gz1}^m - 3 \frac{D_g^{m-1}}{h_z^{m-1}} \bar{\phi}_g^{m-1} - 3 \frac{D_g^m}{h_z^m} \bar{\phi}_g^m = 0. \quad (8)$$

노심내 존재하는 각 점에서는 중성자누설 평형식은 한 점을 둘러싸는 12개의 프리즘노드에서의 중성자 누설항들의 합으로 표현된다. 각 프리즘노드에서의 중성자 누설항은 아래와 같이 정의할 수 있으며 이를 프리즘노드내에 존재하는 각 중성자항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L_{gx1}^m & \equiv -D^m \left(\frac{d}{du} + \frac{d}{dp} + \frac{d}{dz} \right) \phi_g^m(x, y, z) \Big|_{(-\frac{\sqrt{3}}{3}h, 0, \frac{1}{2}h_z^m)} , \\ & = -\frac{\sqrt{3}D_g^m}{18h} \{ 38\phi_{gx1}^m + 11(\phi_{gu1}^m + \phi_{gp1}^m) + 10\phi_{gx0}^m + (\phi_{gu0}^m + \phi_{gp0}^m) - 36(\bar{\phi}_{gu}^m + \bar{\phi}_{gp}^m) \\ & \quad - 60\bar{\phi}_{gz1}^m - 12\bar{\phi}_{gz0}^m + 72\bar{\phi}_g^m \} + \frac{D_g^m}{h_z^m} \{ -\phi_{gx1}^m + \phi_{gx0}^m - 3(\bar{\phi}_{gz1}^m + \bar{\phi}_{gz0}^m) + 6\bar{\phi}_g^m \} . \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)를 사용하여 점에서의 중성자누설평형식을 구하면 12개 프리즘노드에 존재하는 각 중성자항들 사이의 관계식을 구할 수 있다.

3. 수치실험 및 분석

다항식 전개법의 계산정확도와 계산속도를 검증하기 위해 VVER-1000 및 VVER-440 3차원 2군 벤치마크 문제와 SNR 3차원 4군 벤치마크 문제에 적용하였다. 벤치마크문제의 기

준해는 참고문헌 3 및 참고문헌 4에 제시된 DIF3D 유한차분법 계산결과를 사용하였다. 그리고 효율성을 검증하기 위해 VVER-1000 과 VVER-440문제에 대해서 해석함수 전개법 과 비교하였다. 해석함수 전개법은 3차원 프리즘노드내에서 다음과 같이 전개하였다.²

$$\begin{aligned} \xi_g^m(x,y,z) = & C_{g0}^m + A_{gx}^m SN x_g^m x + A_{gu}^m SN x_g^m u + A_{gp}^m SN x_g^m p + A_{gz}^m SN x_g^m z \\ & + B_{gx}^m CS x_g^m x + B_{gu}^m CS x_g^m u + B_{gp}^m CS x_g^m p + B_{gz}^m CS x_g^m z + C_{gx}^m SN \beta^m x_g^m x SN \beta_z^m x_g^m z \\ & + C_{gu}^m SN \beta^m x_g^m u SN \beta_z^m x_g^m z + C_{gp}^m SN \beta^m x_g^m p SN \beta_z^m x_g^m z . \end{aligned} \quad (10)$$

위에서 x_g^m 은 해석함수 전개법에서 사용하는 바와 같으며 β^m, β_z^m 는 아래의 조건을 만족 하는 값이다.

$$\beta^{m^2} + \beta_z^{m^2} = 1, \quad \beta^m = \frac{2}{\sqrt{3h_z^{m^2} + 4h^2}} h, \quad \beta_z^m = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3h_z^{m^2} + 4h^2}} h_z^m.$$

표 1 에서 표 3 까지는 다항식전개법을 VVER-1000문제와 VVER-440문제에 적용한 결과 및 SNR 벤치마크문제에 적용한 결과를 해석함수전개법과 비교하여 나타낸 것이다. VVER-440문제와 SNR 문제는 30° 대칭조건을, VVER-1000문제는 60° 대칭조건을 사용하였다. 다항식전개법과 해석함수 전개법의 가속화를 위해 모두 SOR(Successive Over-Relaxation)법과 Two-Parameter Chebyshev Extrapolation법을 사용하였다.

계산속도측면에서 다항식 전개법은 VVER-1000문제와 VVER-440문제에서 해석함수전개법에 비해 계산속도가 약 3 배 빠름을 알 수 있다. 그러나 다항식 전개법은 VVER-1000 문제에서는 잘 근사해 내지만 VVER-440 문제에서는 다소 오차가 큼을 알 수 있다. 이는 다항식전개법이 VVER-440과 같이 중성자속 변화가 심하게 나타나는 부분이 존재하는 문제에서 중성자속분포를 잘 모사하지 못하기 때문으로 풀이된다. SNR 벤치마크문제에서는 16개의 평면으로 나눈경우에 다항식전개법이 잘 적용될 수 있음을 알 수 있다.

4. 결론

다항식전개법은 육방형 노심을 다군확산방정식으로 해석하는데 잘 적용되었다. 계산속도에서 해석함수 전개법에 비해 약 3 배 빠르며 4 에너지군에 대해서도 훌륭히 적용되었다. 그러나 중성자속의 변화가 심한 노심에서는 정확성이 떨어짐을 알 수 있었다. 다항식전개법의 정확도를 높이기 위해서 노드의 크기를 줄이거나 중성자속 분포의 고차다항식 전개 및 WRM 법등의 사용을 검토해야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. J.Y.Cho and C.H.Kim, "Polynomial Expansion Method for Hexagonal Core Analysis," 1995 ANS Winter Meeting, San Francisco, October 29 - November 2, 1995.(to be presented)

2. 김 창효 등, "신형원자로 노심분석 전산체계 개발," 한국원자력연구소, KAERI/CM-147/94 (1995)
3. Y.A.Shartilla and Y.A.Chao, "Benchmark Problems for Two Group Hexagonal Geometry Nodal Diffusion Codes," Proceedings of International Conference on Mathematics and Computations, Reactor Physics, and Environmental Analyses, Portland, Oregon, April 30-May 4, 1995.
4. "Benchmark Problem Book," ANL-7416, Suppl.3, p.861, Argonne National Laboratory(Dec. 1985).

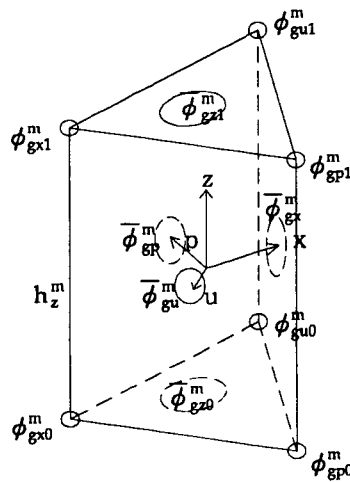


그림 1. 3차원 프리즘 노드 m에서의 각 증성자속

표 1. VVER-1000 3차원 벤치마크 문제의 계산결과 요약

Method of Solution	node width (cm)	k_{eff}	Upper Core Power Error(%)		Lower Core Power Error(%)		CPU(m) on Pentium90
			ϵ_{max}^a	ϵ_{avg}^b	ϵ_{max}^a	ϵ_{avg}^b	
DIF3D	-	1.01135	-	-	-	-	-
AFEN	13.625	1.01146	1.70	0.80	1.54	0.81	7.0
PEN	13.625	1.01092	2.36	1.17	2.55	0.92	2.3

표 2. VVER-440 3차원 벤치마크 문제의 계산결과 요약

Method of Solution	Number of Planes	node width (cm)	k_{eff}	Relative Node Power Error(%)		CPU(m) on Pentium90
				ϵ_{max}^a	ϵ_{avg}^b	
DIF3D	-	-	1.01132	-	-	-
AFEN	12	8.487	1.01162	3.20	0.73	19.6
PEN	12	8.487	1.01013	15.0	3.81	6.3
PEN	24	8.487	1.01006	7.64	2.36	12.7

표 3. SNR 벤치마크 문제의 수치계산 결과

g	Region	Reference	PEN		DIF3D-Nodal		HEXNOD 8 Planes	
			8 Planes	16 Planes	8 Planes	18 Planes	DT	NT
1	Inner Core	4.0569E+6	0.59	0.05	-0.25	-0.31	-0.05	-0.46
	Outer Core	2.4870E+6	0.80	0.36	0.61	0.54	-0.18	2.35
	Radial Blanket	3.0649E+5	0.85	0.33	-0.41	-0.39	-0.08	-4.96
	Axial Blanket	3.6273E+5	-4.47	-1.39	-1.04	-0.02	0.02	-5.78
	Control Rod	1.2640E+6	0.87	0.40	-0.54	-0.32	-0.42	-6.43
	Follower	2.3688E+6	0.30	-0.03	-0.51	-0.55	0.10	-4.78
2	Inner Core	1.9072E+7	-0.10	-0.06	-0.17	-0.17	0.03	-0.49
	Outer Core	1.0594E+7	0.06	0.06	0.19	0.17	0.02	0.54
	Radial Blanket	2.2209E+6	1.27	0.77	0.94	0.95	0.01	-0.52
	Axial Blanket	3.4705E+6	2.43	0.30	-0.36	-0.15	-0.15	-2.19
	Control Rod	6.1898E+6	1.52	0.49	-0.50	-0.37	-0.23	-2.63
	Follower	1.2375E+7	0.36	0.12	-0.11	-0.12	0.00	-0.80
3	Inner Core	1.7579E+6	-0.79	0.28	-0.13	-0.06	0.04	-0.56
	Outer Core	9.2860E+5	-0.68	-0.25	-0.24	-0.18	0.24	0.32
	Radial Blanket	3.0960E+5	1.74	1.16	1.90	1.91	0.06	0.06
	Axial Blanket	5.2703E+5	5.44	1.51	0.12	-0.07	-0.34	-1.97
	Control Rod	4.6361E+5	1.85	0.30	-1.73	-1.45	0.28	-1.93
	Follower	1.3897E+6	0.81	0.38	0.69	0.58	-0.24	-0.19
4	Inner Core	3.2706E+5	-1.61	-0.39	0.16	0.21	-0.14	-0.64
	Outer Core	1.5343E+5	-1.65	-0.48	-0.13	-0.25	0.25	0.10
	Radial Blanket	9.0518E+4	2.40	1.46	2.60	2.55	0.30	1.01
	Axial Blanket	1.9564E+5	0.51	2.63	1.05	0.53	-0.29	-1.15
	Control Rod	5.3702E+4	2.81	-0.24	-4.43	-3.76	1.47	-2.15
	Follower	3.4029E+5	2.55	1.21	1.35	0.96	-0.56	1.23
k_{eff}		1.00989	1.00852	1.00982	1.01151	1.01125	1.01038	1.01603
CPU Time (m)		--	4.65	9.50	0.24	0.64	0.13	0.16
Computer		--	Pentium90		IBM 370/195		CYBER 176	