

# H<sub>∞</sub> 기법을 이용한 2자유도 PI 제어기 성능개선에 관한 연구

조용석\* · 박기헌\*

· : 성균관대학교 전기공학과 박사과정   \* : 성균관대학교 전기공학과 부교수

A Study on the Performance Improvement of Two-degree of Freedom  
PI Controller using H<sub>∞</sub> Technique

Yong-Seok Cho\* · Ki-Ileon Park\*

· :Sung Kyun Kwan University, Electrical Eng.   \* :Sung Kyun Kwan University, Prof. of Electrical Eng.

In the conventional H<sub>2</sub> design of PI controllers, the quadratic cost function includes only the plant output term and hence, the optimal controller often results in a very large plant input. In this paper, H<sub>∞</sub> design methodology is combined with the conventional H<sub>2</sub> design to make a trade-off between the regulation of the plant input and the plant output in a systematic way

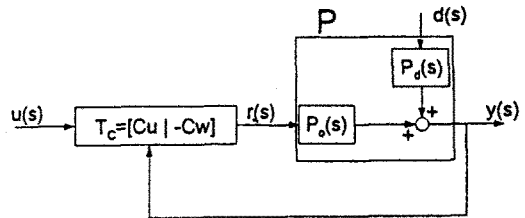


그림1. 2자유도 PI제어 시스템

## 1. 서론

일반 산업계에서는 사용이 용이하면서도 어느정도 만족스러운 응답을 주는 PID제어기가 많이 사용되고 있다[1]. 이에 대한 설계기법도 제어기술의 발전과 함께 고전적인 Ziegler-Nichols 기법에서부터 자승형태의 직분형 평가함수를 최소화시키는 최적제어 기법 등 많은 설계기법들이 연구되고 있다. 본 연구에서는 일반적으로 최적제어 설계시 사용되고 있는 표준 평가함수의 형태가 PID 제어기 설계시에는 적용되기 어려움을 밝히고 플랜트의 출력항만을 고려하는 PI 제어기의 H<sub>2</sub> 설계에서 흔히 발생하는 플랜트의 입력의 포화문제를 해결할 수 있는 체계적인 방법을 제시하였다. 또한 제한 PI 제어기 설계시 발생하는 입력추종과 외란 억제와의 조정(trade-off) 문제를 좀더 효율적으로 고려하기 위해서 2자유도 구조를 가진 PI 제어기 구조를 제시하였다.

## 2. 2 자유도 PI제어기의 구조

기준입력 추종과 외란 제거 등의 페루프 조정 기능을 동시에 고려해야 하는 경우에는 2자유도 구조의 제어기가 기존 구조의 제어기보다 더 효율적이라는 사실은 잘 알려져 있고[2] PI제어기에 대해서도 연구가 있었다[3,4].

일반적으로 폐환시스템에서 제어기에 들어오는 신호는 기준입력신호 u(s)와 제한신호 w(s)이다. 이러한 신호들을 효율적으로 처리하기 위해서는 각 신호들을 제어기가 각기 처리하는 형태, 즉 제어기 출력을 r(s) = C<sub>u</sub>(s)u(s) - C<sub>w</sub>(s)w(s)와 같은 형태로 취한다면 더 효율적일 수 있다. 이러한 구조를 갖는 제어기를 2자유도 제어기라고 하며 그림 1과 같은 구조를 갖는다[2].

그림1에서 주목할 점은 구체적인 2자유도 제어기의 구조를 명시하지 않고 단지 w(s)와 u(s)에서 r(s)까지의 전달함수 C<sub>u</sub>(s), -C<sub>w</sub>(s)만을 표시한 것이다. 2자유도 제어기의 구현

문제는 페루프 시스템의 내부 안정도 등을 고려하여 조심스럽게 다루어져야 하고, 또한 가능한 여러 구현 방법 중에 어떤 것을 선택할 지의 문제도 해결되어야 한다.

앞으로 플랜트 P(s)는 strictly proper로 가정하자. 그리고 PI제어기는 s=0에 극점(pole)을 갖고 있으므로 플랜트 P(s)가 s=0에 영점(zero)을 갖게 되면 극점과 영점의 상쇄가 일어나 내부 안정도가 깨지게 된다. 따라서 이 논문에서는 플랜트 P(s)는 s=0에 영점을 갖지 않는 것으로 가정한다.

제어기 C<sub>u</sub>(s)와 C<sub>w</sub>(s)의 형태는 PI구조이므로 각각

$$C_u = K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s}, \quad C_w(s) = K_{wp} + \frac{K_{wi}}{s} \quad (1)$$

으로 놓는 것이 합리적이다. 이때 두 제어기의 계수들이 같은 값을 가질 필요는 없으나 다음 분석을 통하여 K<sub>wd</sub> = K<sub>wi</sub>의 조건이 바람직하다는 것을 알 수 있다. 먼저 기준입력 u(s)가 단위 계단함수로 인가되었을 때 제어계의 오차 e(s)의 정상 상태 값이 0 이 되는 조건을 살펴보자. 제어시스템의 오차 e(s)는

$$\begin{aligned} e(s) &= u(s) - y(s) \\ &= E_u(s)u(s) - E_d(s)d(s) \end{aligned} \quad (2)$$

인데 여기서 E<sub>u</sub>(s)와 E<sub>d</sub>(s)는

$$\begin{aligned} E_u(s) &= \frac{1 + P(s)C_w(s) - C_u(s)}{1 + P(s)C_w(s)} \\ E_d(s) &= \frac{P_d(s)}{1 + P(s)C_w(s)} \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 이제  $u(s) = \frac{1}{s}$ ,  $d(s) = 0$  인 경우에  $e(t)$ 의 최종값이 0 이 될 조건은

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E_u(s) u(s) = E_u(0) = \frac{P(0)(K_{wi} - K_w)}{P(0)K_{wi}} \quad (4)$$

이 된다. 물론, 이때 제어기는 폐루프 시스템을 안정화 시켰다고 가정한다. 여기서,  $P(0) \neq 0$  이므로, 단위계단 입력에 대한 오차의 정상상태 값이 0이 되기 위한 필요조건은  $K_w = K_{wi}$  가 된다. 따라서, 앞으로는  $C_u(s)$ 와  $C_w(s)$ 를 각기

$$C_u = K_{wp} + \frac{K_i}{s}, \quad C_w(s) = K_{wp} + \frac{K_i}{s} \quad (5)$$

로 표시하겠다.

### 3. $H_2 / H_\infty$ 기법을 이용한 계수 결정법

자승(quadratic) 형태의 평가함수를 최소화시키는  $H_2$  기법은 일반 선형제어기의 설계에 성공적으로 응용되어왔으나 PI 제어기의 설계에는 별로 활용되지 않는 편이다. 이에 대한 원인은 몇가지가 있겠으나 다음의 분석은  $H_2$  기법의 PI 제어기 설계 응용에 근본적인 어려움이 있음을 보여준다.

#### 3.1 $H_2$ 기법 적용의 문제점

주파수 영역의 제어기 설계에서 표준적인 자승형태 평가함수는 기준입력  $u(s)$ 와 출력  $y(s)$ 의 차인  $e(s)$ 와 플랜트 입력항  $r(s)$ 를 조정하기 위하여

$$E_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e(s)e(-s) + kr(s)r(-s)] ds \quad (6)$$

로 잡는 것이 보통이다. PI 제어기 경우에는 기준입력  $u(s)$ 를 흔히 단위계단함수로 간주하는데, 이 경우 (6)식의 형태의 평가함수는 문제를 일으킨다는 것을 곧 알 수 있다. 먼저 그림 1에서 플랜트  $P(s)$ 가  $\frac{1}{s}$ 의 적분항을 포함하지 않는 경우에는

(6)식의 평가함수값은 항상 발산하게 된다. 즉 출력  $y(s)$ 가 계단함수 형태가 되려면 플랜트 입력이 계단함수 성분을 포함해야 하는데 이 경우 (6)식의 평가함수 값은 발산하게 된다.

플랜트가  $\frac{1}{s}$ 의 적분항을 포함하는 경우에는 (6)식의 평가함수값이 유한하게 되고 따라서 최적제어문제가 성립된다. 그러나 이경우의 문제점은 최적제어기법을 적용할 수 있는 대상플랜트의 범위가 매우 한정되고 (우리가 제어하고자 하는 플랜트는 적분항을 포함하지 않는 경우가 대부분이다.), (6)식을 최소화시키는 (5)식의 계수를 구하는 경우 항상  $K_i$  값은 0이 되고 따라서 단순한 비례제어기가 되는데 많은 경우 비례제어기만으로는 충분한 성능이 보장되지 않는 경우가 생긴다 (대표적인 예는  $P(s) = \frac{1}{s^2}$ 의 경우를 들 수 있는데

이러한 플랜트에 대해서는 PI구조가 아닌 일반 선형제어기의 구조를 채택해야 될 것이다). 따라서 PI 제어기 경우에는 (6)식의 평가함수 대신

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(s)e(-s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_u(s)e_u(-s) ds + \frac{K_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e_d(s)e_d(-s) ds \quad (7)$$

형태의 평가함수가 많이 사용되고 있다 [3,4,5]. 여기서  $k_1$ 은 가중치 상수이다. 이 경우는 앞서서와 같은 발산문제와 대상 플랜트의 한정문제는 생기지 않지만 플랜트 입력항  $r(s)$ 를 전혀 고려하고 있지 않기 때문에  $E_2$ 를 최소화시키는 제어기를 사용하는 경우 제어기 출력  $r(s)$ 가 실제 제어기의 허용 출력범위를 벗어날 가능성이 있게 된다(극단적인 경우로, 2차 이하의 지차 플랜트에서는  $K_{wp}$ 의 최적값이  $\infty$ 로 나오는 경우도 있다). 실제로 (7)식과 비슷한 형태의 평가함수를 사용한 AI-Assed[5]의 설계결과는 플랜트 입력값이 상당히 큰 값으로 나타났고 따라서 이 설계기법은 재고한 필요가 있어 보인다. 따라서 (7)식의 평가함수를 사용할 때의 안전한 설계 방법론,  $E_2$ 를 최소화 시키는 제어기에 대하여 사물레이션을 통하여  $r(s)$ 의 크기가 정해진 범위 내에 있는지를 확인하는 방법일 것이다. 이러한 과정에서 가장 문제가 되는 것은  $r(s)$ 의 값이 너무 큰 경우 이를 줄일 수 있도록 다시 설계를 해야하는데  $r(s)$ 의 값이 줄어드는 것을 보장하는 설계법이 없기 때문에 이 후에는 시행착오에 의존해야하며 이것은 최적제어 설계의 의도에 벗어나게 된다. 다음 절에서는 이와 같은  $r(s)$ 의 처리에 대한 체계적인 방법을 제시하고 있다.

#### 3.2 $H_2/H_\infty$ 기법을 이용한 계수 결정법

전달함수  $G(s)$ 의  $H_\infty$ 노름(norm)은

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{u \neq 0} \frac{\|G(s)u(s)\|_2}{\|u(s)\|_2} = \max_{\|u\|_2=1} \|G(s)\|_2 \quad (8)$$

으로 정의되는데 여기서  $\|\cdot\|_2$ 는  $H_2$ 노름을 표시한다[6]. 따라서  $\|G(s)\|_\infty$ 의 최소화 문제는 임의의 입력에 의해 발생할 수 있는 최대출력을 최소화 시키는 문제이고 이러한 의미에서  $H_\infty$ 설계는 최악경우 설계(worst case design)로 볼 수도 있다.

그림 1에서 플랜트 입력  $r(s)$ 는

$$r(s) = R_u(s)u(s) - R_w(s)d(s) = [R_u(s) \quad R_w(s)] \begin{bmatrix} u(s) \\ -d(s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R_u(s) = \frac{C_u(s)}{1 + P(s)C_w(s)}, \quad R_w(s) = \frac{C_w(s)}{1 + P(s)C_w(s)} \quad (10)$$

이 되는데 여기서  $[R_u(s) \quad R_w(s)]$ 의  $H_\infty$ 노름을 최소화 시키는 제어기를 찾는 문제를 생각하자(상수  $k_2$ 는 가중치 상수이다). 이러한 최소화 문제는  $\begin{bmatrix} u \\ -d \end{bmatrix}$ 의 입력에 의하

여 발생할 수 있는 플랜트 입력  $r(s)$ 의 최대  $H_2$ 노름값을 최소화 시키는 제어기를 찾는 것이고 따라서 (6)식의 자승형 평가함수를 사용하는 경우와 같이  $r(s)$ 의 값을 억제하는 효과가 있다. 그러나 (6)식의 경우와는 달리  $r(t)$ 의 정상상태 값이 꼭 0이 아니어도 최적화 문제는 성립하게 된다. 그러므로

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(s)e(-s) \quad (11)$$

$$E_{\infty} = \| [R_u \ k_2 R_w] \|_{\infty}$$

의 두 개의 평가함수를 동시에 사용하는  $H_2/H_{\infty}$ 설계법은  $E_2$ 를 단독으로 사용하는 설계법의 단점을 보완할 수 있게 된다.

집합  $C_s$ 를 주어진 플랜트를 안정화시키는 모든 PI제어기  $C(s)$ 의 집합으로 정의하고  $\hat{E}_2$ 와  $\hat{E}_{\infty}$ 를 각기

$$\hat{E}_2 = \min_{C(s) \in C_s} E_2, \quad \hat{E}_{\infty} = \min_{C(s) \in C_s} E_{\infty} \quad (12)$$

으로 정의하자. 또한 평가함수  $E_2$ 의 값을  $\hat{E}_2 + \alpha$ 보다 작게 하는 모든 PI제어기  $C(s)$ 들의 집합을  $C_{\alpha}$ 로 표시하자. 즉,

$$C_{\alpha} = \{C(s) \mid E_2 \leq \hat{E}_2 + \alpha, C(s) \in C_s\} \quad (13)$$

로 정의하자. 이제  $C_{\alpha}$ 에 속하는 제어기  $C(s)$ 중에서 평가함수  $E_{\infty}$ 를 최소화 시키는 제어기를  $C_{\alpha\beta}(s)$ 라 하고 이때의 값을  $\beta_{\alpha}$ 로 표시하자. 즉

$$\beta_{\alpha} = \min_{C(s) \in C_{\alpha}} E_{\infty} = E_{\infty}(C_{\alpha\beta}(s)) \quad (14)$$

항상  $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$ ,  $\alpha_1 < \alpha_2$ 가 성립하므로  $\beta_{\alpha_1} \geq \beta_{\alpha_2}$ 가 되고 따라서  $\alpha$ 값을 변화시키면서  $C_{\alpha\beta}(s)$ 를 구하고 각  $C_{\alpha\beta}(s)$ 에 대한  $\beta_{\alpha}$ 값과  $E_2$  값을 그래프로 나타내면 앞에서 서술한 성질 때문에 항상 그림 2와 같은 형태의 결과를 얻을 수 있다.

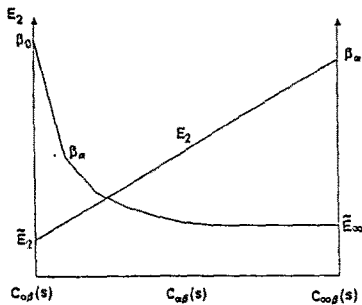


그림 2. 전방후방을 가진 2자유도 PI제어기 구조

그래프에서 관찰할 수 있듯이 제어기  $C_{\alpha\beta}(s)$ 와  $C_{\infty\beta}(s)$ 는 평가함수들 중의 한쪽 값을 최소화 시키지만 다른 쪽의 평가함수 값이 크므로 적합한 제어기가 아님을 알 수 있다.

가장 합리적인 선택은  $\beta_{\alpha}$ 값은 충분히 줄어들었으나  $E_2$ 값의 증가는 별로 크지 않은 지점의 제어기를 선택하는 것일 것이다.

#### 4. 예제

그림 3은 그림1의 제어기(=  $T_c$ )의 내부구조를 구체적으로 구현한 것이다. 우선 직분기는 개환 루프방으로 하면 불안정한 함수가 루프밖에 존재하게되므로 그 시스템은 항상 불안정하게 된다. 따라서 다음과 같은 구조를 생각할 수 있다(6).

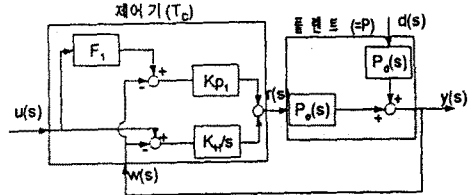


그림 3.  $\alpha$ 변화에 대한  $E_2, \beta_{\alpha}$ 의 변화

그림3에서 플랜트 입력  $r(s)$ 는

$$r(s) = C_u(s)u(s) - C_w(s)w(s)$$

$$= (F_1 k_{p1} + \frac{F_1 k_{i1}}{s})u(s) - (k_{w1} + \frac{k_{i1}}{s})w(s) \quad (8)$$

$$= (k_{up} + \frac{k_i}{s})u(s) - (k_{wp} + \frac{k_i}{s})w(s)$$

이므로 제어기  $C_u(s)$ 과  $C_w(s)$ 는

$$C_u(s) = F_1 k_{p1} + \frac{k_{i1}}{s}, \quad C_w(s) = k_{w1} + \frac{k_{i1}}{s} \quad (9)$$

이 된다. 따라서  $k_{p1}, k_{i1}, F_1$ 와  $k_{wp}, k_i$ 와의 관계는

$$k_{p1} = k_{wp}, \quad k_{i1} = k_i, \quad F_1 = \frac{k_{up}}{k_{wp}}$$

이 된다. 모의 실험은 그림 3과 같은 구조를 가질 경우이다.

본 연구에서 고려한 플랜트는 다음과 같다.

$$P_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}, \quad P_d(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)^2}$$

이거시 기준입력에 대한 오차  $e_u(s)$ 와 외란에 대한 오차  $e_d(s)$ 는

$$e_u = \frac{1 + P(s)[C_w(s) - C_u(s)]}{1 + P(s)C_w(s)} d(s)$$

$$= \frac{s^3 + 5s^2 + 8s + 4 + (k_{wp} - k_{up})}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (k_{wp} + 4)s + k_i}$$

이고 기준입력에 대한 플랜트 입력  $R_u(s)$ 와 외란에 의한 플랜트 입력  $R_w(s)$ 는

$$R_u(s) = \frac{C_u}{1+PC_w}$$

$$= \frac{k_{wp}s^4 + (5k_{wp} + k_i)s^2 + (4k_{wp} + 8k_i)s + 4k_i}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (k_{wp} + 4)s + k_i}$$

$$R_w(s) = \frac{P_o C_w}{1+PC_w}$$

$$= \frac{k_{wp}s^2 + (3k_{wp} + k_i)s + 3k_i}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + (k_{wp} + 4)s + k_i}$$

이다.

다음 그림은 가중치  $k_1, k_2$  변화에 대한  $H_\infty$  노름의 크기 변화이다.  $\alpha$ 의 변화에 따라서  $H_\infty$  노름의 크기가 줄어들고 있음을 알 수 있고, 특히  $\alpha = 0.2 \sim 0.3$ 부근에서  $H_2$ 노름의 상승 값에 비해  $H_\infty$  노름의 크기가 급격히 줄어들고 있음을 알 수 있다. 따라서 이 부근에서의 PI 계수값을 선택한다. 다음 그림은 본 논문에서 제시한 기법을 이용한 제어기와  $H_2$  설계 기법을 이용한 제어기를 비교한 것이다.

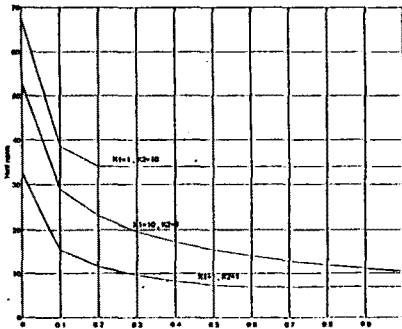


그림 4. 가중치( $K_1, K_2$ ) 변화에 대한  $H_\infty$  노름의 크기 변화

본 논문에서 제시한 방법으로 설계시  $\alpha = 0.3, k_1 = 1, k_2 = 1$  일 경우가 가장 우수하게 나타나므로 이 값을 선택하였다. 그림에서도 알 수 있듯이 플랜트 입력응답과 플랜트 출력응답이  $H_2$  설계기법보다는 전체적으로 우수하게 나타남을 볼 수 있다.

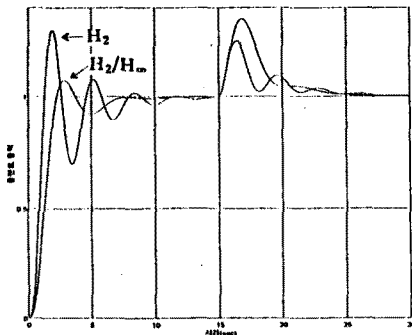


그림 5. 플랜트 출력응답 비교

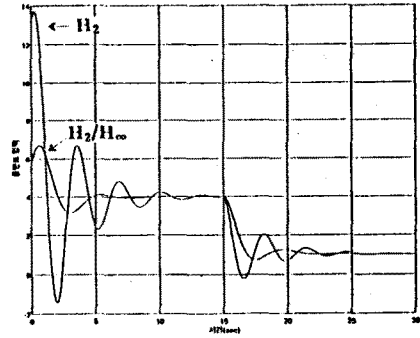


그림 6. 플랜트 입력응답 비교

## 5. 결론

일반적으로 궤환 PI제어기는 입력추종과 외란억제를 동시에 고려할 수 없기 때문에 어느 하나에 맞추어 설계해야 한다. 본 연구에서는 두가지 목적을 좀더 효율적으로 고려할 수 있는 2자유도 제어기 구조를 제시하였다. 플랜트의 출력만을 고려하는  $H_2$  제어기를 사용하는 경우 플랜트 입력의 포화가 일어날 소지가 항상 존재하고 있다. 본 연구에서는 기존의  $H_2$  설계법에  $H_\infty$  기법을 추가시켜 플랜트 입력의 포화문제를 체계적으로 해결할 수 있는 기법을 제시하였다.

## 6. 참고문헌

- [1] K.J. Åström and T. Hägglund, "Automatic tuning of PID controller", Institute society of America(1988)
- [2] D.C. Youla and J.J. Bongiorno, Jr. "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Winner-Hopf design", IEEE Trans, on Automatic Control, Vol.AC-30, No.7, pp.652-665, July 1985
- [3] E. Eitelberg, "Regulating and tracking PI(D) controller", Int. J. Control, Vol.45, No.1, pp.91-95, 1987
- [4] P. Hippe, Ch. Wurthaler and F. Dittrich, "Corredence comments on 'A regulating and tracking PI(D) controller'", Int. J. control, Vol. 46, No.5, pp.1851-1856, 1987
- [5] Salem A.K. Assadi and Lamy A.M. Al-chalabi, "Optimal gain for Proportional- integral-Derivative Feedback", IEEE Control System Magazine, 1987
- [6] John C. Doyle, Bruce A. Francis and Allen R. Trnänenbaum, "Feedback control theory", Maxwell macmillan, 1992