

경계요소법을 이용한 경계에 직교하는 삼차원 격자형성법

Three-Dimensional Grid Generation Method for an Orthogonal Grid at the Boundary by Using Boundary Element Method

정 희권^{*1}, 권 장혁²

H. K. Jeong and J. H. Kwon

In the present paper, a method of nearly orthogonal grid generation in an arbitrary simply-connected 3D domain will be presented. The method is a new direct and non-iterative scheme based on the concept of the decomposition of the global orthogonal transformation into consecutive mapping of a conformal mapping and an auxiliary orthogonal mapping, which was suggested by Kang and Leal [4]. In our numerical scheme, Kang and Leal's method is extended from 2D problems to 3D problems while the advantage of the non-iterative algorithm is maintained. The essence of the present mapping method is that an iterative scheme can be avoided by introducing a preliminary step. This preliminary step corresponds to a conformal map and is based on the boundary element method(BEM). This scheme is applied to generate several nearly orthogonal grid systems which are orthogonal at boundaries.

1. 서론

격자를 형성하는 방법에는 일반적으로 크게 나눠서 3가지로 분류할 수 있다. 첫번째는 등각사상법인데 이 방법으로 격자를 구성하면 직교격자를 구성할 수 있어서 질 좋은 격자를 얻을 수 있는 반면 격자의 간격을 조절하기가 어렵고 아주 간단한 경우를 제외하고는 3차원 등각사상이 존재하지 않으므로 3차원 격자형성방법으로는 적합하지 않는 방법이다. 두번째는 대수적 방법인데 이 방법은 격자형성 시간이 빠르지만 복잡한 형상에 대해서는 격자가 꼬일수도 있으며, 경계의 불연속면이 내부 격자로 전파되어 질이 좋지 않은 격자를 형성할 수도 있다. 세번째는 미분적 방법인데 이 방법은 미분방정식을 수치적으로 풀어야 하므로 3차원 경우에는 계산시간이 많이 걸린다는 단점이 있지만 타원형 방정식 자체의 유연성(smoothness)때문에 불연속면이 내부로 전파되지 않으며, 경계조건이 아주 나쁘게 주어지지 않는 한 격자가 꼬이지 않고 조절함수(control function)를 잘 조절하면 경계에서의 직교성(orthogonality)과 원하는 곳으로 격자를 밀집(concentration)하는 기능을 줄 수 있어서 일반적으로 많이 사용하는 방법이다. 본 연구에서는 미분적 방법으로 격자를 구성하는 방법에 대해서 연구 하였다. 실제영역(physical domain)과 계산영역(computational domain)사이의 상호변환시 해가 해석적이 되려면 Cauchy-Riemann 조건을 만족해야 한다. 실제영역에서 Cauchy-Riemann 조건을 만족하는 라플라스 방정식을 다시 한번 역변환 시켜서 격자를 형성하는 방법이 Thompson 등[1,2]과 Sorenson[3]이 제안한 방법인데 이 방법은 경계조건이 그렇게 나쁘게 주어지지 않는한 실제영역에서

-
1. 한국과학기술원 항공우주공학과(대전광역시 유성구 구성동 373-1, Tel:042-869-3755)
 2. 한국과학기술원 항공우주공학과(대전광역시 유성구 구성동 373-1, Tel:042-869-3715)

격자가 거의 꼬이지 않는 장점이 있어서 지금까지 가장 널리 알려진 격자형성 방법이지만 서로 연관(coupled)되어있고 비선형(nonlinear) 미분방정식 이기때문에 계산시간이 오래 걸리고 형성된 격자가 대체로 직교하지 않는 단점이 있다. 최근들어서 3차원 계산이 많아지고 유동장 해석기법의 발달로 점성유동장 해석이 필요해짐에 따라 특히 3차원 문제의 경우 경계에서 직교격자를 만들어야 하는 필요성이 증대되고 있다. 경계에서 직교격자를 만들거나 원하는 곳에 밀집을 시키기 위해서는 조절함수를 잘 선택하거나 구해야 하는데 Thompson방법은 대체로 복잡하고 방정식을 풀면서 조절함수를 계속해서 반복해서 구해야 하므로 계산시간이 많이 걸리고 형상이 복잡한 경우에는 해가 수렴하지 않거나 수렴하더라도 좋지 못한 격자가 형성되기도 한다. 본 연구에서는 Kang[4]이 제시한 2차원 직교격자 형성방법을 3차원으로 확장하였는데 선형이고 반복법으로 풀지 않는 방법이므로 계산시간이 적게들고 정확한 경계조건이 적용되기 때문에 수렴성이 좋고 질 좋은 격자를 형성할 수 있었다.

2. 격자형성 방정식

2-1. 2차원 격자형성 방정식

Thompson등[1,2]이 제시한 격자형성 방정식은 상호 연관되어 있어서 조절함수를 잘 조절하지 못하면 경계에서 뿐만 아니라 내부에서도 직교격자를 형성하기가 어렵다. 그래서 직교격자를 형성하는 방법으로 Ryskin & Leal[5]은 다음과 같은 covariant 라플라스 방정식을 사용하여 단순연결된 영역에서 직교격자를 형성하였다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1)$$

여기서, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$

$$f(\xi, \eta) = \frac{h_\eta}{h_\xi} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} = \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}}$$

여기서 $f(\xi, \eta)$ 는 distortion function이고, 격자의 가로 세로비를 의미한다. 그리고 h_ξ, h_η 는 scale factor이다. 그러나 (1)식은 $f(\xi, \eta)$ 의 정의 때문에 비선형식이며, $f(\xi, \eta)$ 를 구하기 위해서 Ryskin은 반복법으로 구했다. 한편, Kang & Leal[4]과 Oh & Kang[6]은 경계요소법(boundary element method)을 도입하여 $f(\xi, \eta)$ 를 정확히 구해서 (1)식을 선형이 되게하여 반복하지 않고 직접 푸는 방법을 제시하였다. 이 방법은 그림 1에서처럼 보조영역(u,v)를 도입해서 계산영역(ξ, η)와 실제영역(x,y)사이의 경계점 일치는 보조영역(u,v)와 실제영역(x,y)사이로 변환시키는 방법이다. 보조영역(u,v)의 경계점의 분포는 경계요소법으로 얻는다. 이 방법의 mapping관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_0 = T_c \cdot T_\theta \quad (2)$$

여기서 T_c 는(u,v)에서(x,y)로의 등각변환이고 T_θ 는 (ξ, η)와 (u,v)로의 직교변환을 나타낸다. 위의 관계식으로 부터 $f(\xi, \eta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f = f_c \cdot \bar{f} \quad (3)$$

여기서 $f_c = 1$ 이므로 $f(\xi, \eta)$ 는 다음과 같다.

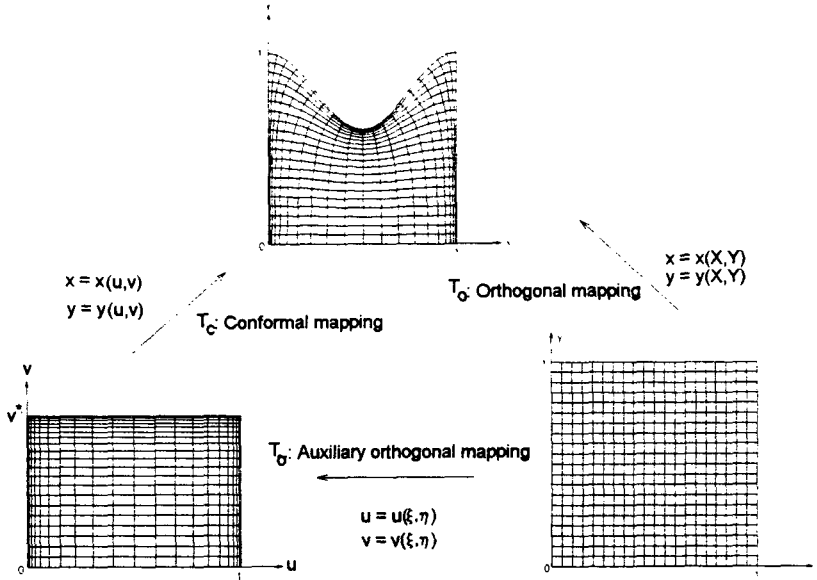


Fig 1. Decomposition of orthogonal mapping

$$f(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi, \eta) = \frac{\tilde{h}_\eta}{\tilde{h}_\xi} = \sqrt{\frac{\tilde{G}_{22}}{\tilde{G}_{11}}} = \sqrt{\frac{u_\eta^2 + v_\eta^2}{u_\xi^2 + v_\xi^2}} \quad (4)$$

(1)식을 전개하고 (4)식을 대입하여 정리하면 다음과 같은 선형인 격자형성 방정식을 얻을 수 있다.

$$f^2 \left(\bar{r}_{\xi\xi} - \frac{u_\xi u_{\xi\xi} + v_\xi v_{\xi\xi}}{u_\xi^2 + v_\xi^2} \bar{r}_\xi \right) + \left(\bar{r}_{\eta\eta} - \frac{u_\eta u_{\eta\eta} + v_\eta v_{\eta\eta}}{u_\eta^2 + v_\eta^2} \bar{r}_\eta \right) = 0 \quad (5)$$

(x,y)와 (u,v)사이의 경계점 변환은 경계요소법을 이용해서 얻을 수 있다. 즉 (u,v)영역 에서 다음과 같은 라플라스 방정식을 경계요소법으로 풀면 (u,v)영역의 정확한 경계값들을 얻을 수 있다. 경계요소법의 절차는 참고문헌 [5]에 나와있다.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

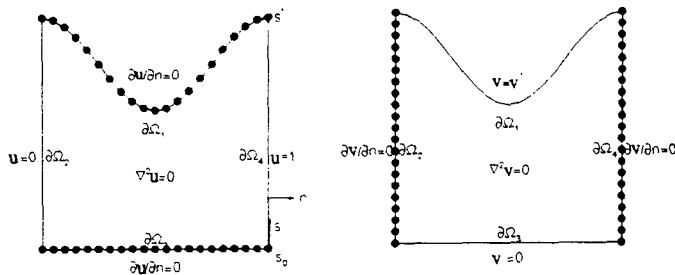


Fig 2. Two conjugate Laplace equations with boundary conditions

그림 2에서와 같이 경계조건으로는 Dirichlet조건은 $u=0, u=1, v=0, v=v$ 이며, Neumann 조건은

$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ 으로 주어진다. $\nabla^2 u = 0$ 을 풀면 Neumann 조건으로 주어진 면에서는 u 값을 얻고, Dirichlet 조건으로 주어진 면에서는 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 값을 얻는다. v^* 는 다음식으로 부터 얻을 수 있다.

$$v^* = \int_{\partial\Omega_4} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (7)$$

이런식으로 경계요소법을 이용해서 (6)식을 2번 풀면 경계에서 u, v 값들을 얻을 수 있으며 이 값들은 (x, y) 영역의 경계값들과 일치한다. 그리고 2차원 직교격자형성절차는 다음과 같다.

- 1) 경계요소법을 이용하여 보조영역(u, v)의 경계에서 u, v 값을 구한다.
- 2) 경계에서 얻어진 값들로 부터 보간법으로 내부에서의 u, v 값을 구한다. 이때 사용되는 보간법은 경계에서 직교성을 이루게 하는 Hermite 보간법을 사용한다.
- 3) distortion function $f(\xi, \eta)$ 를 각 점에서 구한다.
- 4) (5)식을 풀어서 격자를 형성한다.

2-2. 3차원 격자형성 방정식

2차원의 경우와 마찬가지로 3차원 격자형성 방정식은 다음과 같은 직교좌표계 라플라스 방정식을 이용하여 격자를 형성할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \bar{r}_\xi \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}} \bar{r}_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \bar{r}_\zeta \right) = 0 \quad (8)$$

여기서, g_{11} , g_{22} , g_{33} 은 scale factor이다. (8)식에서 g_{11} , g_{22} , g_{33} 가 정확히 결정된다면 (8)식은 선형이 됨을 알 수 있다. 그림 3에서처럼 보조영역(u, v, w)를 도입하고 계산영역(ξ, η, ζ)와 실제영역(x, y, z)사이의 경계점 일치는 보조영역(u, v, w)와 실제영역(x, y, z)사이로 변환된다.

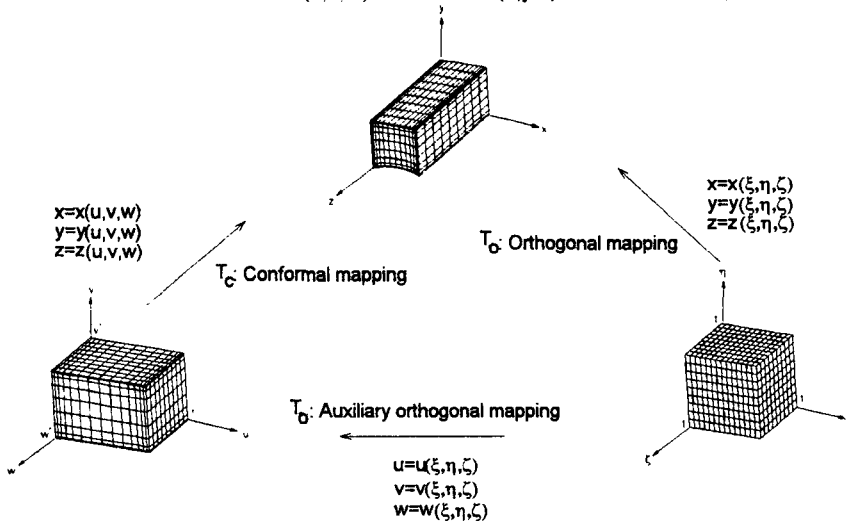


Fig 3. Decomposition of 3D mapping

3차원에서는 등각변환시 scale factor가 1이 된다는 보장은 없지만 여기서는 scale factor를 1로 가정하

면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{g}_{ii_0}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\mathbf{g}}_{ii_0}(\xi, \eta, \zeta) \quad (i=1,2,3 \text{ no sum}) \quad (9)$$

(8)식을 전개하고 (9)식을 대입하여 정리하면 다음과 같은 선형인 3차원 격자형성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{g}}_{22} \tilde{\mathbf{g}}_{33} \left(\bar{r}_{\zeta\zeta} - \frac{u_\zeta u_{\zeta\zeta} + v_\zeta v_{\zeta\zeta} + w_\zeta w_{\zeta\zeta}}{u_\zeta^2 + v_\zeta^2 + w_\zeta^2} \bar{r}_\zeta \right) \\ & + \tilde{\mathbf{g}}_{11} \tilde{\mathbf{g}}_{33} \left(\bar{r}_{\eta\eta} - \frac{u_\eta u_{\eta\eta} + v_\eta v_{\eta\eta} + w_\eta w_{\eta\eta}}{u_\eta^2 + v_\eta^2 + w_\eta^2} \bar{r}_\eta \right) \\ & + \tilde{\mathbf{g}}_{11} \tilde{\mathbf{g}}_{22} \left(\bar{r}_{\zeta\zeta} - \frac{u_\zeta u_{\zeta\zeta} + v_\zeta v_{\zeta\zeta} + w_\zeta w_{\zeta\zeta}}{u_\zeta^2 + v_\zeta^2 + w_\zeta^2} \bar{r}_\zeta \right) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(x,y,z)와 (u,v,w)사이의 경계점 변환은 경계요소법을 이용해서 얻을 수 있다. 즉 (u,v,w)영역에서 다음과 같은 라플라스 방정식을 경계적분법으로 풀면 (u,v,w)영역의 정확한 경계값들을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad \nabla^2 v = 0 \quad , \quad \nabla^2 w = 0 \quad (11)$$

경계조건으로는 Dirichlet조건은 $u=0, u=1, v=0, v=v^*, w=0, w=w^*$ 이며, Neumann 조건은 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ 으로 주어진다. $\nabla^2 u = 0$ 을 풀면 Neumann 조건으로 주어진 면에서는 u값을 얻고, Dirichlet조건으로 주어진 면에서는 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ 값을 얻는다. v^* 와 w^* 는 2차원의 경우에서와 같은 방법으로 얻는다. 이런식으로 경계요소법을 이용해서 (11)식을 3번 풀면 경계면에서 u,v,w값들을 얻을 수 있으며 이 값들은 (x,y,z)영역의 경계값들과 일치한다.

3차원 직교격자형성절차는 2차원의 경우와 같다.

3. 격자형성 결과

3-1. 2차원 격자

제시된 격자형성방법으로 2개의 2차원 형상에 대해 적용하였다. 첫번째 경우는 그림 1에서와 같이 파형곡면에 대해서 격자(21×21)를 형성하였다. 그림에서 알 수 있듯이 보조영역(u,v)에서 직교를 이루고 있으므로 내부격자가 직교성을 유지하고 있다. 이 경우는 보조영역(u,v)에서 직교를 이루도록 아래 경계면을 위 경계면의 분포와 일치 시켰으므로 가능하게 되었는데 영역 전체에서 직교격자를 이루는 장점이 있지만 어느 경계 한 부분을 재배치 시켜야하는 단점이 발생하게 된다. 그러나 대부분의 유동문제에 있어서 다른 부분 보다도 경계면근처에서 직교성을 유지하는것이 필요하므로 그림4처럼 파형곡면 주위로 직교성을 유지하도록 하였다. 이 경우는 경계면을 재배치 하지 않고 주어진 경계점들로 격자를 형성한 것이며, 보조영역에서 파형곡면 쪽을 제외하고서는 정확히 직교하지 않으므로 실제영역의 격자도 그림 1보다는 직교성을 이루지 않는다. 두번째 경우는 그림 5와 같이 단순화된 cascade에 대해 격자(67×17)를 형성한 경우인데 경계에서 격자가 직교성을 이루고 있음을 볼 수 있다.

3-2. 3차원 격자

3차원 격자형성 방법으로 그림 6과 같은 임의의 날개에 대해서 단순한 H-H 형태로 격자를 형성하였다. 문제의 제산을 간단히 하기위해서 날개위의 격자의 수를 절반으로 줄여서 그림7과 같이 내부

격자를 형성하였는데 날개의 경계면에서 대체로 직교격자를 형성하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 경계에서 직교하는 3차원 격자형성 방법을 제시했는데 이 방법은 Kang[5]이 제시한 2차원 직교격자 형성방법을 3차원으로 확장한 것이다. 본래 비선형인 방정식을 경계요소법을 이용하여 먼저 scale factor들을 구할 수 있으므로 최종적으로 선형이 되게하여 다른 방법들[1,2,3]과는 달리 반복법으로 풀지 않기 때문에 계산시간이 훨씬 빠르고 식이 간단하여 3차원 격자형성 방법으로 적합하다고 할 수 있다.

후기

본 연구는 국방과학연구소에서 시행하고 있는 기초연구사업인 “3차원 유동해석 기법에 관한 연구”의 연구결과 일부이며, 본 연구의 지원에 대하여 심심한 사의를 포함합니다. 또한 본 논문에 대하여 많은 토론을 해주신 포항공대 강인석 교수님과 과학원 항공우주공학과 이강덕 씨께도 감사사를 드립니다.

참고문헌

1. Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A and Mastin, C.W., "Numerical Grid Generation: Foundation and Applications", North-Holland 1985.
2. Thompson, J.F., " A General Three-Dimensional Elliptic Grid Generation System on a Composite Block Structure", *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.64,1987,pp.377~411
3. Sorenson, R.L., " Three-Dimensional Elliptic Grid Generation About Fighter Aircraft for Zonal Finite-Difference Computations ", AIAA paper 86-0429, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, 1986.
4. Kang, I.S. and Leal, L.G., " Orthogonal Grid Generation in a 2D Domain via the Boundary Integral Technique ", *Journal of Computational Physics*, vol.102,1992,pp.78~87
5. Ryskin, G. and Leal, L.G., " Orthogonal Mapping ", *Journal of Computational Physics*, vol.50,1983,pp.71~100
6. Oh, H.J. and Kang, I.S., " A Non-iterative Scheme for Orthogonal Grid Generation with Control Function and Specified Boundary Correspondence on Three Sides ", *Journal of Computational Physics*, vol.112,1994,pp.138~148

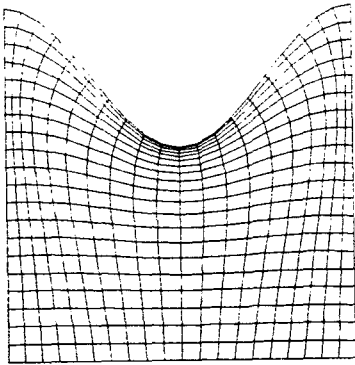
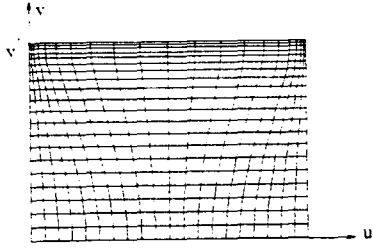


Fig 4. Generation of nearly orthogonal grids on the boundary

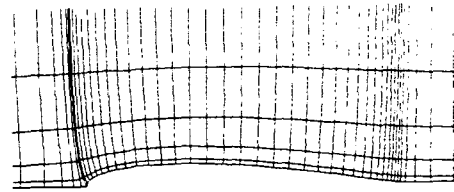
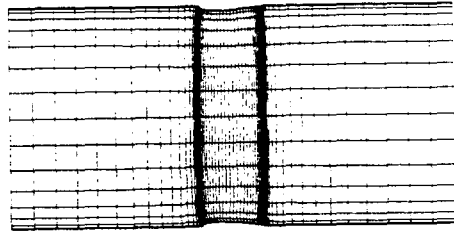


Fig 5. Grid generation around a cacades

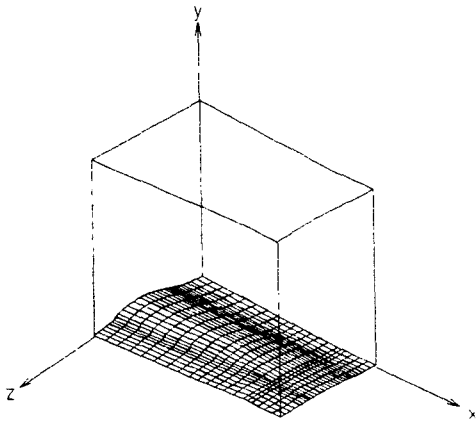


Fig 6. Block topology of an wing

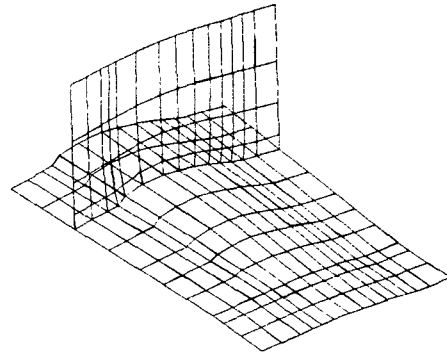


Fig 7. Generation of field grids around an arbitrary wing

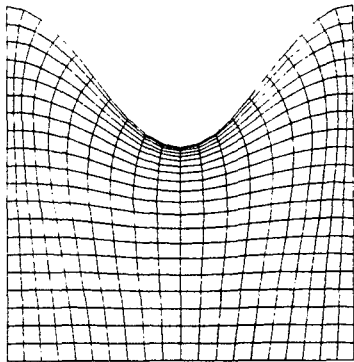
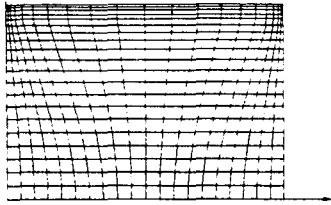


Fig 4. Generation of nearly orthogonal grids on the boundary

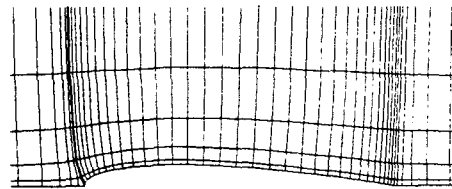
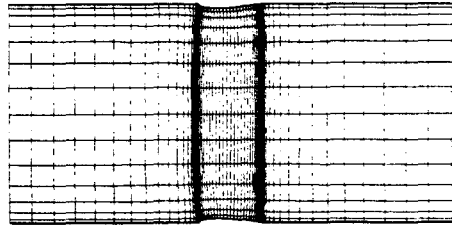


Fig 5. Grid generation around a cascades

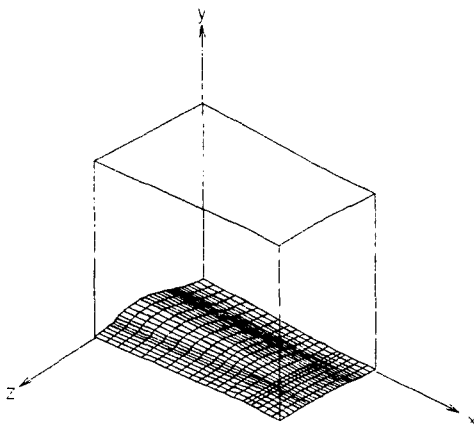


Fig 6. Block topology of an wing arbitrary wing

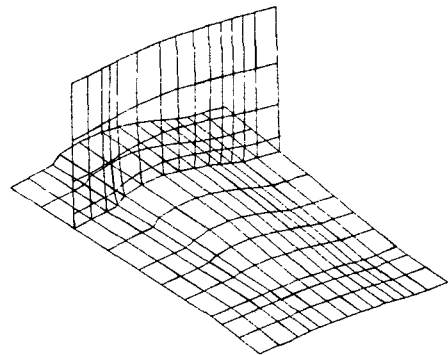


Fig 7. Generation of field grids around an