

*dM/dr*에 의한 원형코일의 Radial Force 계산

- CALCULATION OF RADIAL FORCE IN CIRCULAR COILS USING *dM/dr* -

김기봉* 권병일**

* 삼성전자(주) 가전본부 모터팀

** 한양대학교 공학대학 전기공학과

Abstract - Circular coils are widely used in electromagnetic applications, and the force in a sets of coils consisting of more than two can be divided into three components. Among them, one component called radial force is acting on the radial axis, and it is exposed as stress or impact. Calculation of the radial force was used to be performed by introducing Ampear's law of force which is $F = J \times B$. However, many cases in analyzing a system, calculation method from the mutual inductance between the coils is often employed to get the axial force and resulting dynamics. In this case, if the calculation of radial force from the mutual inductance is possible, flow of the calculation for the system analysis would be much more simpler.

력은 응력으로만 작용하고 일로서는 나타나지 않으므로 혼동이 생길수도 있다. 본 논문은 교축력(radial force)에서도 적축력과 마찬가지로 에너지의 공식에서부터 계산되는 것을 입증하고 그 예를 들어 보이는데 목적이 있다.

2. 힘의 등식

체교하고 있는 임의의 폐회로에서, 임의의 미소시간동안에 유기된 전압과 전류에 의해, 임의의 폐회로가 한 일의 미소량은

$$dW_k = v_k i_k dt = i_k d\phi_k \quad (2-1)$$

이다. 여기서, dW_k 는 일의 미소량, v_k 는 전압, i_k 는 전류, $d\phi_k$ 는 체교자속의 미소변위이다.

1. 서 론

원형코일은, 편형코일과 마찬가지로, 많은 전자기 응용기기에서 광범위하게 사용되고 있다. 한쌍이상의 원형코일로 이루어진 전자기 응용 동력기기에서 작용하는 힘의 종류는 원형 좌표계에서의 세가지의 성분으로 표현할수 있다. 이 가운데, 원의 중심을 향하는 힘의 분력을 교축력 또는 radial force라고 하는데 이 힘은 코일에서의 응력 또는 팽창력으로 나타나며 이로인한 여러가지 영향을 운동계 전제에 끼치게 한다. 이러한 교축력 또는 radial force를 계산하는 방법은 양페트의 힘의 법칙에 의한 힘의 기본공식, $F = J \times B$,로부터 얻는 것이 일반적이다. 그러나, 시스템 해석에 있어서는 두개의 코일 사이에 나타나는 상호인더턴스에서부터 축력 또는 axial force 등을 계산하는 방법이 많이 쓰이고 있으며, 이때 교축력 또는 radial force를 구하는 것도 상호 인더턴스에서부터 구할수 있다면 계산의 흐름을 더 간단하게 해줄수 있을 것이다. 고전물리에서 일(work)이란, 물체에 어떤 힘을 가하여 어떤 거리로 이동 시킨 것을 말한다. 이러한 관계를 이용하면 일 또는 에너지의 공식에서부터 작용력 또는 힘을 구하는 방법이 널리 사용되고 있다. 그러나 원형코일에서의 교축

N 개의 폐회로를 가진 코일에 저장되는 미소에너지, dW_m

$$\text{온 } W_m = \int dW_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N i_k \phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N L_{jk} I_j I_k \quad (2-2)$$

이며, 전류가 0에서부터 I_j 까지 상승하는 동안 저장되는 전체 자기에너지에는

$$dW_m = \sum_{k=1}^N dW_k = \sum_{k=1}^N i_k d\phi_k \quad (2-3)$$

이 된다. 한편, 공급된 에너지의 총량은

$$dW_s = \sum_{k=1}^N i_k d\phi_k = dW + dW_m \quad (2-4)$$

이며, dW 는 기계적 일의 미소량이다. 식(2-2)와 (2-4)로부터

$$dW_m = \frac{1}{2} dW_s \quad (2-5)$$

의 관계가 얻어지며, 따라서

$$dW = F_t \cdot d\ell = dW_m = \nabla W_m \cdot d\ell \quad (2-6)$$

의 관계가 성립함을 알수있다. 여기서 F_t 은 미소 일량에 의해 미소거리를 움직이는 동안 작용한 힘의 크기를 말한다. 즉,

$$F_t = \nabla W_m \quad (2-7)$$

또는

$$F_t = \frac{\partial W_n}{\partial t} \quad (2-8)$$

이 힘을 알수있다.

그림 (2-1)과 같은 2개의 원형코일로 이루어진 계를 생각한다. 실제에 있어서 코일의 단면은 filamentary 상태가 면적을 가지고 있고 임의의 미소길이에서의 단면은 그림에서와 같은 것으로 가정한다.

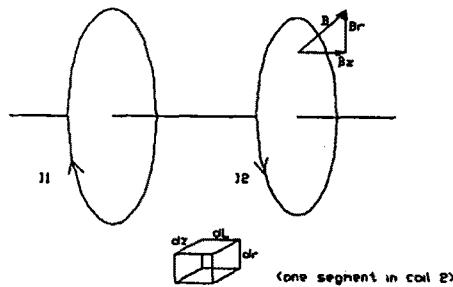


그림 2-1. 두개의 동축 원형코일

원형좌표계에서 두개의 코일이 서로 평행이라고 가정하고 식(2-8)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_n}{\partial t} &= \frac{\partial W_n}{\partial (\bar{r} + \bar{\theta} + \bar{z})} = \frac{\partial W_n}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial W_n}{\partial \bar{z}} \\ &= \bar{F}_r + \bar{F}_z \end{aligned} \quad (2-9)$$

이된다. 식(2-9)에서의 철학이 직교분력이 된다.

미소구간에서의 자속량의 변화가 선형적이라 가정하고 편미분을 이산화식으로 치환하여 표시하면 식(2-10)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_n}{\partial r} &= \frac{\nabla W_n(r_1, r_2)}{\nabla r} = \frac{W_n(r_{11}, r_{21}) - W_n(r_{12}, r_{22})}{r_{11} - r_{12}} \\ &\quad + \frac{W_n(r_{11}, r_{21}) - W_n(r_{12}, r_{22})}{r_{21} - r_{22}} \end{aligned} \quad (2-10)$$

여기서 r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} 는 t 시간에서와 $t + \Delta t$ 시간에 서의 각각의 코일의 반경을 나타낸다.

한편, 에너지와 자속밀도의 공식에서

$$L_\mu I_j I_k = \phi_\mu I_k = B_\mu S_k I_k \quad (2-11)$$

을 구하여

$$\begin{aligned} d(L_\mu I_j I_k) &= \bar{B}_\mu I_k dS_k \\ &= B_{\mu_{-r}} I_k dz_k d\ell_k + B_{\mu_{-z}} I_k dr_k d\ell_k \end{aligned} \quad (2-12)$$

을 얻는다. 식(2-12)를 식(2-9)에 대입하면,

$$\bar{F}_r + \bar{F}_z = \frac{\partial}{\partial z} (B_{\mu_{-r}} I_k dz_k d\ell_k) + \frac{\partial}{\partial r} (B_{\mu_{-z}} I_k dr_k d\ell_k)$$

$$= B_{\mu_{-r}} I_k d\ell_k + B_{\mu_{-z}} I_k d\ell_k \quad (2-13)$$

이되어, 식(2-13)은 Ampere의 힘의 공식을 나타낸다. 이와 같이, 인덕턴스의 미소변위에 대한 변화분을 이용하면 작용력을 계산할수 있음을 알수있다.

3. 변형 (deformation)

일반적으로 코일은 rigid body로 간주하여 해석하고 있다. Rigid body란, 어떠한 경우에도 변형이 없는 것을 지칭한다. 그러나 자연계에서 이상적인 rigid body는 존재하지 않는다. 자연계의 모든 물질은 힘을 받게되면 미세하거나 가시적이거나 변형이 존재하게 된다. 변형은 작용력의 크기에 따라 또는 변형된 형상에 따라 탄성변형(elastic deformation), 영구변형(plastic deformation) 및 파괴(fracture or rupture)로 구분된다.[2] 미소응력이라고 하더라도 Young's modulus에 상관된 변형을 하고, 이는 일(work)가 존재했음을 의미한다. 작용력이 없어진 뒤 다시 탄성변형 이전의 상태로 코일이 회복하였다하여도 이는 재질의 탄성력이 일을 한것이 된다. 스프링을 눌렀다가 힘을 떼면 원래의 상태로 돌아오는데 이러한 과정에, 서의 역학은 같은 것이다.

4. 인덕턴스의 계산

그림(2-1)과 같은 코일에 있어서 각각의 코일에는 자기인덕턴스(self inductance), 코일과 코일 상호간에는 상호인덕턴스(mutual inductance)가 존재한다.

4-1. 자기인덕턴스의 계산

원형코일에 작용하는 자기인덕턴스는 내부인덕턴스(internal inductance)와 외부인덕턴스(external inductance)로 구분된다. 자속에 관한 기본공식[1]에서부터 유도된, 그림 (2-1)에서와 같은 원형코일에서 내부인덕턴스, L_μ 는

$$L_\mu = \frac{\mu_0 r}{4} \quad (4-1)$$

이며, 외부인덕턴스는

$$\begin{aligned} L_o &= \frac{\mu_0 r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_1 - \theta_0)}{[2r(r - r_0) + r_0^2]} \\ &\quad \frac{d\theta_1 d\theta_0}{-2r(r - r_0) \cos(\theta_1 - \theta_0)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (4-2)$$

이다. 여기서 r_0 는 코일 두께의 1/2이며, r 은 코일 반경이다.[4]

식(4-2)에서 elliptic integral 을 이용하여 정리한뒤, 내부 인덕턴스와 외부인덕턴스를 합하여 자기인덕턴스를 구한다.

$$L_s = L_i + L_e = \frac{\mu_0 r}{4} + \mu_0 r \left[\left(\frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K - \frac{2}{\kappa} E \right] \quad (4-3)$$

여기서, κ 는 modulus 이고, E , K 는 각각 제1종 및 제2종 complete elliptic integrals 이다. [2]

4-2. 상호인덕턴스의 계산

자속에 관한 기본공식[1] 에서부터 상호인덕턴스, L_s 또는 M 가 유도된다. 임의의 경우 두개의 코일은 비동축인 상태로 가정되어야 하며, 아래의 상호 인덕턴스는 다음 식 (4-4)와 같이 나타낼수도 있다.[3]

$$M = \frac{N_j N_k \Delta \phi_2}{(2M+1)(2N+1)(2m+1)} \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n \sum_{p_1=0}^{N_p^2} [(B_r r_k \Delta z)^2 + (B_z r_k \Delta r)^2]^{1/2} \quad (4-4)$$

두개의 코일이 동축으로 놓인 경우는 비동축 이격거리가 없는 경우이므로 식(4-4)에서 $y=0$ 로 두거나 식(4-5) [4] 와 같은 결과식을 이용하여 구한다.

$$M = 2\pi\mu_0(R_1 R_2)^{3/2} n_1 n_2 [C(R_1, R_2, z_1) - C(R_1, R_2, z_2) + C(R_1, R_2, z_3) - C(R_1, R_2, z_4)] \quad (4-5)$$

식(4-5)에서의 계수는 참고문헌[3]에서와 같다.

5. 시스템 방정식의 이용

전자력 응용기계의 동력해석을 위하여는 시간적 해석영역 을 비교적 길게 고려한다. 많은 가변인자를 가지고 가속 벡터, 속도, 응력, 운동손실, oscillation 등의 물리적 인자를 고려하기 위하여 sampling time 은 짧고 duration 은 길게 설정한다. 이러한 경우 iteration number 는 수백회에 이르는데 이러한 해석에 적합한 것으로 lumped circuit analysis 를 들수 있다. 직축 구동속력을 v_s , 질량을 m_s , 인덕턴스 matrix 의 직축변위에 대한 미분을 $[G]$ 라고 하면 운동계의 방정식은 다음과 같이 된다.

$$([L] + [M]) \frac{d}{dt} [I] = [V] - [R][I] - v_s [G][I] \quad (4-6)$$

$$m_s \frac{d v_s}{dt} = \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{k=1}^{N_k} [I_j][I_k][G] \quad (4-7)$$

$$F_s = [I_j]^T [G][I_k] \quad (4-8)$$

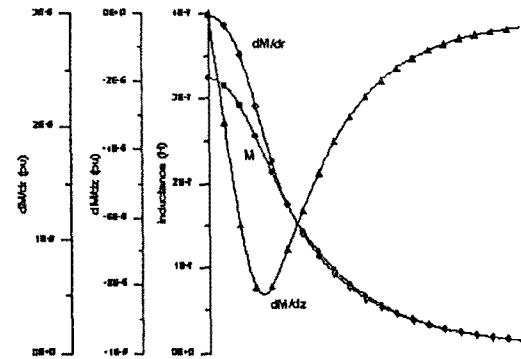
이러한 시스템 방정식속에 인덕턴스의 교축 변위에 대한 미분을 사용하면 바로 교축 응력, 즉 radial force, 를 얻을수 있고, 이로부터 변형에 대한 해석을 구할수 있다.

식(4-8)과 같은 모양으로 교축력을 나타내면 식(4-9)과 같다.

$$F_s = [I_j]^T [H][I_k] \quad (4-9)$$

여기서 $[H]$ 는 인덕턴스의 교축변위에 대한 미분을 나타낸 것이다.

이러한 방법에 의해 참고문헌[3]에서 사용된 원형코일을 계산한 상호인덕턴스, dM/dz , dM/dr 의 결과는 그림(5-1)에서 나타난바와 같다.



그림(5-1). 상호인덕턴스, dM/dz , dM/dr 의 계산결과

REFERENCES

- [1] R.Plonsey and R.E.Collin, "Principles and Applications of Electromagnetic Fields", McGraw-Hill, 1961
- [2] Jaxk A. Collins, "Failure of Materials in Mechanical Design", John Wiley & Sons, Inc. 1993
- [3] Ki-Bong Kim, "Mutual Inductance of the Non-Coaxial Coils in Coll Gun", 94 대한전기학회 추계학술 대회 논문집 (1994. 11. 18), pp. 120-123
- [4] T.H. Fawzi and P.E. Burke, "The Accurate Computation of Self and Mutual Inductances of Circular Coils", IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-97, No. 2, Mar/Apr. 1978, pp.464-468