

유한요소법을 이용한 전기 비저항 탐사법의 저항역산

‘임성기’, 김민규*, 정현교*, 고창섭**

‘서울대학교 공과대학 전기공학부
“삼성전기 종합연구소 CAD/CAM 연구실

Electrical Resistivity Tomography for Inverse Problem Using FEM

Sung-Ki Lim*, Min-Kyu Kim*, Hyun-Kyo Jung*, Chang Seop Koh**

*School of Electrical Engineering, Seoul National University, Seoul, KOREA

**CAD/CAM Lab., Research & Development Center, Samsung Electro-mechanics Co.,Ltd

Abstract

A new method for electric resistivity tomography (ERT) is developed for geophysical inverse problems by adapting the sensitivity analysis. The outputs of the potential electrodes are computed using two dimensional finite element method in the wave number space by Fourier transforming the governing equations. The resistance distribution in the region of interests, which makes the computed potential distribution coincide with the measured potential, is found by minimizing the objective function using an optimization method. In this process the sensitivity analysis is introduced in order to compute the derivatives of the objective function. And an adjoint variable method is used to save the computational efforts for sensitivity coefficients.

1. 서론

지하 공간에 존재하는 파쇄대나 균열대의 분포 상황을 규명하기 위해서는 고분해능의 탐사 기술이 요구된다. 이러한 요구조건을 만족시키는 탐사 기술들 가운데 전기 비저항 탐사 자료들을 역산하여 지하구조를 영상화하는 전기 비저항 탐사 알고리듬이 개발되고 있다. 전기 비저항 탐사법(ERT)은 전류전극을 통해 전류를 흘려보내고 전위 전극에서 전위차를 측정하여 지하의 물질분포를 파악하는 탐사법이다[1,2]. 그림 1은 전기 비저항을 통해 지하구조를 파악하는 전형적인 시스템으로 몇 쌍의 전류전극과 전위 전극들로 구성되어 있다. 전위전극에서의 출력은 비저항의 분포뿐만 아니라 전극들의 위치에도 의존하게 된다. 따라서, 전위전극의 위치를 알면 측정된 전위 값들을 통해서 비저항들이 구해질 수 있게 된다.

ERT의 성능은 주로 역산방법에 의해 결정된다. 이전의 비저항 역산방법에서는 각 블록의 비저항을 SVD (Singular Value Decomposition)방법으로 구하였다[2]. 그러나, 이 방법은 전기 비저항 분포를 재구성할 때 평활 (smoothing)방법에 크게 영향을 받는 것으로 알려졌다[3].

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 계산되어진 민감도 계수와 일반적인 최적화방법을 적용시킨 새로운 알고리듬을 제시한다. 여기서 민감도 계수들은 변수들에 대한 기울기 벡터로서 사용되어진다.

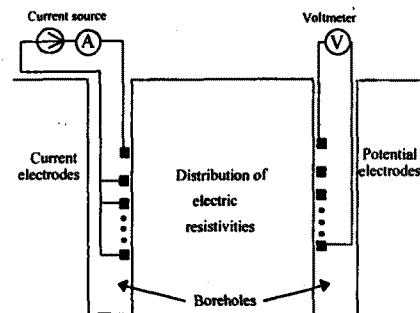


그림 1. 두 시추공 사이의 저항 측정 시스템

2. ERT의 유한요소해석

전기전도도 σ 를 갖는 동방성 매질내에서 전류밀도 J 는 Ohm의 법칙에 의해 다음과 같이 나타난다.

$$J = \sigma E = -\sigma \nabla \phi \quad (1)$$

여기서 ϕ 는 전기적 스칼라 포텐셜이다. 전하보존의 법칙으로부터 다음과 같은 전류연속방정식이 얻어진다.

$$\nabla \cdot J = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i) = I \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i), \quad (2)$$

ρ 는 직교 좌표내의 한 점 (x_i, y_i, z_i) 에서 Dirac delta 함수에 의해 표현된 체적 전하 밀도이며 I 는 그 점에서 미소체적내로 주입되는 총 체적 전류밀도이다. 식(1)과 식(2)로부터 다음의 지배방정식이 도출되어진다.

$$-\nabla \cdot \{\sigma(x,y,z) \nabla \phi(x,y,z)\} = I \delta(x-x_s) \delta(y-y_s) \delta(z-z_s) \quad (3)$$

전기 전도도가 y 축에 대해 변화하지 않는다고 가정하면, σ 는 x 와 z 의 함수인 2 차원 구조이며 나머지는 3 차원식으로 바뀌게 된다. 식(3)은 3 차원 공간 내에서 유한요소법으로 해석해야 하지만 이것은 너무나 많은 시간과 기억용량이 요구된다. 따라서 계산상의 편의를 위해 y 를 파수 k_y 영역으로 Fourier 변환시키면 식(3)은 변환된 공간 (x,k_y,z) 에서의 문제로 변환된다. Fourier 변환과 그 역변환은 다음과 같다.

$$\tilde{\phi}(x,k_y,z) = \int_0^\infty \phi(x,y,z) \cos(k_y y) dy \quad (4-a)$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\phi}(x,k_y,z) \cos(k_y y) dk_y \quad (4-b)$$

여기서 $\tilde{\phi}$ 와 ϕ 는 y 축에 대하여 우함수들이다.

(4)의 변환에 의해 2 차원 전기전도도 $\sigma(x,z)$ 가 분포되어 있는 공간에서 (x_s, y_s, z_s) 위치의 점전원에 의한 3 차원 전위분포 $\phi(x,y,z)$ 는 2 차원적으로 변환된 전위 $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ 로 바뀌어진다. 그리고 지배 방정식은 다음과 같다.

$$-\nabla \cdot \{\sigma(x,z) \nabla \tilde{\phi}(x,k_y,z)\} + k_y^2 \sigma(x,z) \tilde{\phi}(x,k_y,z) = \tilde{Q} \delta(x-x_s) \delta(z-z_s) \quad (5)$$

여기서 $\tilde{Q} = \frac{I}{2A}$ 이며 A 는 전원이 가해지는 점에서의 표면적이다. 식(5)은 Galerkin 근사화를 통해 유한요소법으로 쉽게 풀 수 있다. 경계조건은 다음의 3 가지 경우들이 고려되어진다. 첫째는 지표면에서 전류의 법선 성분이 0인 homogeneous Neumann 경계조건이며 두번째는 점전원과 관심 영역으로부터 충분히 멀어진 곳에서 전위값이 0이 되는 homogeneous Dirichlet 경계조건이다. 마지막은 점전원이나 관심영역으로부터 충분히 멀리 떨어지지 못한 경우로, 이때의 전위 $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ 는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\tilde{\phi}(x,k_y,z) = C J_0(k_y \gamma) \quad (6)$$

여기서 C 는 상수이며, γ 는 점전원으로부터의 거리, 그리고 J_0 는 0 차의 Bessel 함수이다. 따라서 경계조건은 다음으로 주어진다.

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(x,k_y,z)}{\partial n} + \frac{k_y J_0(k_y \gamma)}{J_0'(k_y \gamma)} \tilde{\phi}(x,k_y,z) = 0 \quad (7)$$

전위 $\phi(x,y,z)$ 는 k_y 공간에서 구해낸 $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ 를 역변환함으로써 구해진다. k_y 가 연속적인 선형요소들로 나누어지고 $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ 가 각 요소에서 선형적으로 변한다고 가정하면 $\phi(x,y,z)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^L \int_{k_y}^{k_y'} \tilde{\phi}(x,k_y,z) \cos(k_y y) dk_y \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^L D_k(y) \tilde{\phi}(x,k_y,z) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 L 은 선형요소들의 갯수이며, $D_k(y)$ 는 k 번째 요소의 적분값이다.

3. 민감도 해석을 이용한 ERT

ERT 시스템에서 얻고자 하는 것은 전류전원에 대해 측정된 전위분포를 나타내는 전기 비저항의 분포이다. 만약 전극과 전류전원의 분포를 알고 있다면 전위분포는 전기 비저항에 관한 함수로 나타나게 된다. 이러한 시스템에서, 많은 시추공을 파는 것은 높은 비용이 요구되므로 일반적으로 2 개의 시추공만을 가지고 측정한다. 이러한 제한을 극복하고 보다 많은 자료를 확보하기 위하여 여러 가지 경우의 전류전극 배치들에 대하여 측정이 이루어지게 된다. 결국, 원하는 전기비저항의 분포는 다음의 목적함수를 0으로 수렴시킬 때 얻을 수 있다.

$$F = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{j=1}^n (\phi_{p,j}(r_j) - \phi_{p,j,0}(r_j))^2 \quad (9)$$

여기서 n 은 전위전극들의 개수, N_c 는 전류전극 배치들의 수이며 $\phi_{p,j}(r_j)$ 와 $\phi_{p,j,0}(r_j)$ 는 각각 p 번째 전류전극 배치에 대해 r_j 위치에서 계산된 전위값과 실제로 측정된 전위값들이다. F 는 전위 $\phi_{p,j}(r_j)$ 가 $\tilde{\phi}_p(x,k_y',z)$ 로서 k_y' 공간에서 정의된 함수이므로 결국 $\tilde{\phi}_{p,j}$ 의 함수가 된다. 관심 영역을 작은 요소들로 분할한 후 i 번째 요소의 전기전도도 σ_i 대한 목적함수의 민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\sigma_i} &= \sum_{p=1}^{N_c} \left\{ \sum_{i=1}^L \frac{\partial F}{\partial \tilde{\phi}_{p,i}} \frac{d\tilde{\phi}_{p,i}}{d\sigma_i} \right\} \\ &= -\sum_{p=1}^{N_c} \left\{ \sum_{i=1}^L \frac{\partial F}{\partial \tilde{\phi}_{p,i}} [K_{p,i}]^{-1} \frac{d[K_{p,i}]}{d\sigma_i} \{\tilde{\phi}_{p,i}\} \right\} \\ &= \sum_{p=1}^{N_c} \left\{ \sum_{i=1}^L [\lambda]_{p,i} \frac{d[K_{p,i}]}{d\sigma_i} \{\tilde{\phi}_{p,i}\} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $[K_{p,i}]$ 는 p 번째 전류전극 배치에서의 k_y' 에 대한 시스템 행렬이며 $\tilde{\phi}_{p,i}$ 는 $\tilde{\phi}_p(x,k_y',z)$ 이고 λ 는 다음의 식을 만족시키기 위해 정의된 보조변수이다 [4].

$$\begin{aligned} [K_{p,i}] \cdot \{\lambda\} &= -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\phi}_{p,i}} \\ &= \sum_{j=1}^L (\phi_p(r_j) - \phi_{p,0}(r_j)) \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^L D_k(y_j) \sum_{i=1}^3 N_i(x_i, z_i) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 D_k 는 k 번째 요소에 대하여 선형 형상함수에 $\cos(k_y y)$ 를 곱한 후 선적분한 값이다.

식(11)로부터 민감도 계수들을 계산한 후에는 다음과 같은 기울기 형태의 최적화 알고리듬을 사용해서 전기전도도 벡터를 새로이 구한다.

$$[\sigma]_{new} = [\sigma]_{old} + s \frac{dF}{d[\sigma]} \quad (12)$$

여기서 s 는 한 스텝의 길이이며 목적함수를 선형화 시킴으로써 극소화 되어진다.

4. Numerical Example

제안된 알고리듬을 검증하기 위하여 간단한 모형에 대해 실험이 수행되어진다. 이 모형은 xz 평면상에서 전기 비저항이 $\rho = 14 [\mu\Omega m]$ 인 물질로 채워진 $20 \times 61 [cm]$ 의 반무한 공간속에 $\rho = 28 [\mu\Omega m]$ 인 균일 물질로 채워진 사각블록이 들어가 있는 구조이다. 이러한 구조가 그림 2에 도시되어 있다. 모든 전극들은 $y = 0$ 의 동일 공간내에 있으며 전류전극 쌍의 수는 4개이고, 각쌍의 위와 아래의 전극에 각각 $+1[A]$ 와 $-1[A]$ 의 전류가 공급되어진다. 전위전극들의 총 개수는 10개이며 전체영역은 25개의 사각형들로 분할된다. 이때 각 사각블록의 전기 비저항이 구하고자 하는 변수가 된다.

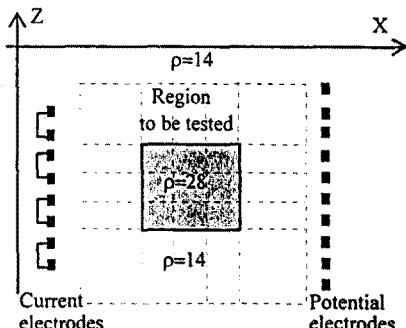


그림 2. 전기 전도도의 모델링

먼저 파수 k_y 에 대해 전위값들의 변화를 확인한다. 여기서 파수 k_y 는 다음과 같이 정의되어진다.

$$k_y = 0.006 \cdot 1.63^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

그림 3은 파수에 대해 지수적으로 감소하는 전위의 변화를 보여준다.

여기서 파수는 0부터 19까지가 고려된다. 역산 결과들은 변수들을 90번 경신한 후에 얻어지며 수렴된 전기전도도의 결과를 그림 4에 나타낸다. 구해진 전기전도도가 실제 값과 정확히 일치하지는 않으나 $\rho = 28 [\mu\Omega m]$ 의 내부영

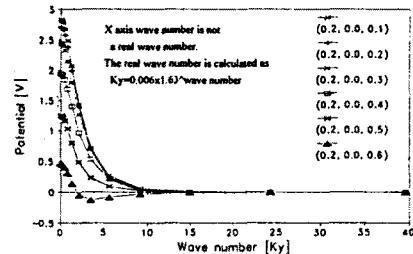


그림 3. 파수에 대한 전위의 변화

역이 $\rho = 14 [\mu\Omega m]$ 의 외부영역과 확실히 구별됨을 확인할 수 있다. 전류전극 쌍들의 수를 늘리는 방법을 통해 자료의 수를 보다 많이 확보함으로써 더욱더 향상된 결과를 얻을 수 있을 것이다.

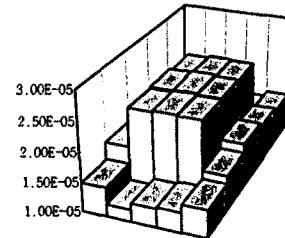


그림 4. 수렴된 전기 전도도

5. 결론

이 논문에서는 유한요소법과 민감도 해석을 이용하여 지하공간구조내의 전기 비저항값들을 영상화하는 새로운 알고리듬이 제시되어졌다. 또한 보조변수의 도입을 통해서 민감도 계수들에 대한 계산시간을 상당히 감소시킬 수 있었다. 여기서 개발된 알고리듬은 3차원 유한요소해석을 통해서 3차원적인 지하공간구조의 규명에 적용될 수 있음을 물론이고 일반적인 역산문제들에 쉽게 응용될 수 있을 것이다.

REFERENCE

- [1] A.Dey and H.F.Morrison, "Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures," Geophys. Prosp., Vol.27, pp.106-136, 1979
- [2] W. Daily and E.Owen, "Cross-borehole resistivity tomography," Geophysics, Vol.56, No.8, pp.1228-1235, 1991
- [3] M.J.Lee, *Cross-Borehole DC Resistivity Imaging*, Ph.D. Dissertation, Seoul Nat'l Univ., 1993, Korea
- [4] I.H.Park, B.T.Lee and S.Y.Hahn, IEEE Trans. on Magn., Vol.27, pp.4142-4145, September, 1991