Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

다이나믹 리셋 와인드업 방지방법의 확장

Extension of the Dynamic Anti-Reset Windup Method

°박 종 구† · 최 종 호‡

†성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 (Tel: 0331-290-7138; Fax: 0331-290-7231; E-mail: pjk@yurim.skku.ac.kr)
‡서울대학교 전기공학부 (Tel: 880-7310; Fax: 885-6620; E-mail: chchoi@csl.snu.ac.kr)

Abstract This paper presents a dynamical anti-reset windup (ARW) compensation method for saturating control systems with multiple conrollers and/or multiloop configuration. By regarding the difference of the controller states in the absence and presence of saturating actuators as an objective function, the dynamical compensator which minimize the objective function are derived in an integrated fashion. The proposed dynamical compensator is a closed form of the plant and controller parameters. The proposed method guarantees total stability of resulting system. An illustrative example is given to show the effectiveness of the proposed method.

1. 서 론

포화현상이 시스템에 미치는 부적절한 현상을 현상을 'reset windup'이라 하고, 이를 방지하는 구조를 'anti-reset windup (ARW)' 구조라 한다. 표준적이며 실제적인 ARW 보상방법은 대상 플랜트에 대해 포화현상을 고려하지 않고 제어기를 설계한 다음, 포화현상으로 인한 부정적인 영향을 보상하기 위하여 적절한 보상구조를 채택하는 방법이다. 이러한 보상방법을 '2단계 설계기법'이라 한다[2], [6].

2단계 설계기법은 오래 전부터 사용되어 오던 방법으로서 초창기에는 기술자의 경험에 의존하거나 많은 양의 시뮬레이션을 통한 시행착오 방법을 통하여, 특정한 시스템에 적합한 특정한 보상구조를 설계하는 데 머물렀다. 그러나 근래에 많은 연구가들이 포화요소를 갖는 제어 시스템에 대한 일반적인 보상방법을 마련하는 것에 관심을 기울여 왔다[2], [4], [6]-[8], [9].

최근의 연구결과 중에서 Park과 Choi[7],[8]는 동적 보상방법을 도입한 효과적인 ARW 보상방법을 제시한 바 있다. 본 논문에서는 이전의 보상법을 보다 일반화시킨 방법을 제시하고자 한다. 제시될 방법은 제어기의 위치 및 구조에 관계없이 적용할 수 있는 확장된 ARW 방법으로서 앞먹임 및 되먹임 제어기를 갖는 제어 시스템 및 개별적인 제어 구조에도 적용할 수 있는 보상방법이다.

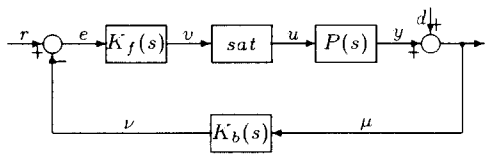

그림 1. 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템.
Fig. 1. Saturating control systems with multiple controllers.

2. 다중 제어기로 구성된 포화 제어시스템 및 문제의 설정

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템을 대표하여 두 개의 제어기 $K_f(s)$, K_b로 구성된 포화 제어 시스템을 고려하면 그림 1과 같이 도시할 수 있다. 임의의 다중 제어기 시스템은 이를 확장시키면 된다.

Park과 Choi[7]의 ARW 구조를 응용한 보상된 제어기의 구조는 그림 2에 도시하였다. 블록 $\mathcal{N}$은 대상 시스템이 다변수 시스템일 경우 제어 입력신호의 방향성 보상을 위해 도입한 것으로서, 제어 입력 신호 중에 어느 하나가 포화되었을 때 그 방향성을 유지하면서 신호의 크기를 조정하는 기능을 하는데([2],[6]), 본 논문에서 제시하는 방법과 함께 사용하는 것이 바람직하다. 블록 $\mathcal{N}$을 도입하더라도, $v(t)$에서 $u(t)$까지는 또다른 포화함수이므로 본 논문에서 설계하려는 보상기에 영향을 주지 않는다. 여기서 플랜트 및 보상된 제어기들의 동특성은 다음과 같다.

(가) 플랜트 $P(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= Ax_p(t) + Bu(t), && (1)\\ y(t) &= Cx_p(t) + Du(t), && (2)\\ u(t) &= sat(v(t)). && (3) \end{aligned}$$

(나) 보상된 제어기 $\bar{K}_f(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cf}(t) &= F_f x_{cf}(t) + G_f e(t) - \xi(t), && (4)\\ v(t) &= H_f x_{cf}(t) + L_f e(t), && (5)\\ e(t) &= r(t) - \nu(t). && (6) \end{aligned}$$

(다) 보상된 제어기 $\bar{K}_b(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cb}(t) &= F_b x_{cb}(t) + G_b \mu(t) - \eta(t), && (7)\\ \nu(t) &= H_b x_{cb}(t) + L_b \mu(t), && (8)\\ \mu(t) &= y(t) + d(t). && (9) \end{aligned}$$

여기서 $r(t) \in R^n$는 기준입력, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $y(t) \in R^n$는 출력, $v(t) \in R^m$는 제어기의 출력, $d(t) \in R^n$는 외부교란, $x_p(t) \in R^p$는 플랜트의 상태변수, 그리고 $x_{cf}(t) \in R^{q_1}$와 $x_{cb}(t) \in R^{q_2}$는 제어기들의 상태변수이다. 상태방정식을 구성하는 상수행렬들은 입출력 및 상태변수에 상응하는 차수를 갖는다. 그리고 $sat(\cdot)$는 포화 비선형을 의미한다. 또한 $\xi(t) \in R^{q_1}$, $\eta(t) \in R^{q_2}$는 보상 신호로서 그것의 동특성은 다음과 같다.

(라) 동적 보상기 $M_f(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{df}(t) &= \Phi_f x_{df}(t) + \Gamma_f \zeta(t), && (10)\\ \xi(t) &= \Sigma_f x_{df}(t) + \Lambda_f \zeta(t), && (11)\\ \zeta(t) &= v(t) - u(t). && (12) \end{aligned}$$

(마) 동적 보상기 $M_b(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{db}(t) &= \Phi_b x_{db}(t) + \Gamma_b \zeta(t), && (13)\\ \eta(t) &= \Sigma_b x_{db}(t) + \Lambda_b \zeta(t). && (14) \end{aligned}$$

여기서 Φ_f, Γ_f, Σ_f, Λ_f, Φ_b, Γ_b, Σ_b, 그리고 Λ_b등은 설계변수로서 포화 현상시 전체 시스템이 잘 동작하도록 적절히 선정하여야 한다.

3. 통합된 동적 ARW 보상기의 설계

설계목적을 효율적으로 달성하기 위하여 먼저 제어기 $K_f(s)$와 제어기 $K_b(s)$를 통합하여 다룬다. 앞서 기술된 식들로부터 다음과 같은 통합된 제어기 식을 얻는다.

(가) 통합된 제어기의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2 r(t), && (15)\\ v(t) &= Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2 r(t), && (16) \end{aligned}$$

여기서

$$x_c(t) := \begin{bmatrix} x_{cf}(t) \\ x_{cb}(t) \end{bmatrix}, \quad F := \begin{bmatrix} F_f & -G_f H_b \\ 0 & F_b \end{bmatrix}, \quad (17)$$
$$G_1 := \begin{bmatrix} G_f L_b \\ -G_b \end{bmatrix}, \quad G_2 := \begin{bmatrix} G_f \\ 0 \end{bmatrix},$$

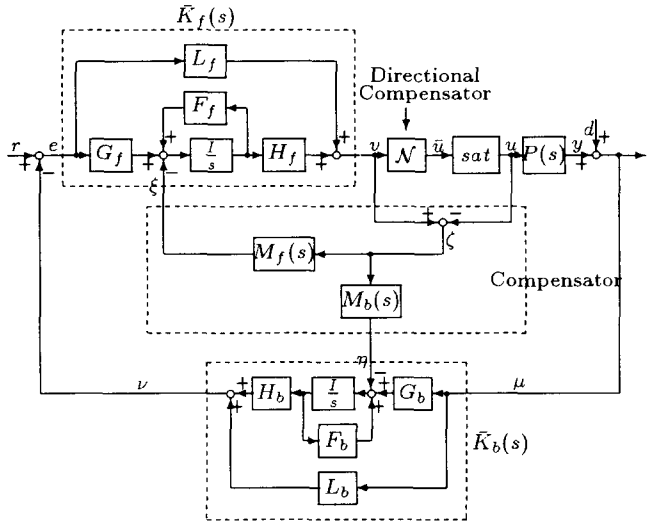

그림 2. 동적 ARW 구조를 채택한 포화 제어 시스템.
Fig. 2. Saturating control systems adopting the dynamical anti-reset windup structure.

$$H := \begin{bmatrix} H_f & -L_f H_b \end{bmatrix}, \quad L_1 := L_f L_b, \quad L_2 := L_f \tag{18}$$

이다.

이때 보상된 제어기 $\bar{K}_f(s)$와 $\bar{K}_b(s)$를 통합하여 기술하면 다음과 같다.

(나) 보상된 통합 제어기의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= Fx_c(t) + G_1(-\mu(t)) + G_2 r(t) - \varphi(t), && (19)\\ v(t) &= Hx_c(t) + L_1(-\mu(t)) + L_2 r(t), && (20)\\ \mu(t) &= y(t) + d(t), && (21) \end{aligned}$$

여기서 $\varphi(t) := (\xi^T(t), \eta^T(t))^T$이며 $M_f(s)$, $M_b(s)$의 통합된 동적 보상기를 $M(s)$라 할 때, 그의 동특성은 다음과 같다.

(다) 통합된 동적 보상기 $M(s) = (M_f^T(s),\ M_b^T(s))^T$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= \Phi x_d(t) + \Gamma\zeta(t), && (22)\\ \varphi(t) &= \Sigma x_d(t) + \Lambda\zeta(t), && (23) \end{aligned}$$

여기서 $x_d(t) := (x_{df}^T(t),\ x_{db}^T(t))^T$이고

$$\Phi := \begin{bmatrix} \Phi_f & 0 \\ 0 & \Phi_b \end{bmatrix}, \quad \Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_f \\ \Gamma_b \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \Sigma_f & 0 \\ 0 & \Sigma_b \end{bmatrix}, \quad \Lambda := \begin{bmatrix} \Lambda_f \\ \Lambda_b \end{bmatrix} \tag{25}$$

이다.

$x_c(t)$와 $\tilde{x}_c(t)$를 각각 포화 요소가 있었을 때와 없었을 때의 제어기의 상태 변수라 하자. 그러면 $x_c(t)$와 $\tilde{x}_c(t)$의 차이를 성능평가함수로 삼자. 성능평가함수를 J_1라 할 때 동적 보상기와 관계된 문제 설정은 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\min_{M(s)} \quad J_1 = \int_0^\infty \|x_c(t) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt \tag{26}$$

여기서 $\|\cdot\|$는 유클리디안 노옴(Euclidean norm) 이다.

위의 (26)를 최적화 하는 동적 보상기를 구하기 위해서 사전 작업으로서 플랜트의 동특성 (1)과 통합된 보상 제어기의 (19)를 포화 비선형의 동작여부에 따라 통합하여 다시 기술한다.

(라) 포화요소가 존재하지 않을 때의 폐루우프 시스템의 동특성:

앞의 (1)-(3), (15), (16), 그리고 $u(t) = v(t)$로부터 다음의 식이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_p(t) \end{bmatrix} = A_l \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} + G_r r(t) + G_d d(t), \tag{27}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_l &:= \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} && (28)\\ &:= \begin{bmatrix} F - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} H & -G_1[I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] C \\ B(I + L_1 D)^{-1} H & A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$G_r := \begin{bmatrix} G_2 - G_1 D(I + L_1 D)^{-1} L_2 \\ B(I + L_1 D)^{-1} L_2 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$G_d := \begin{bmatrix} -G_1[I - D(I + L_1 D)^{-1} L_1] \\ -B(I + L_1 D)^{-1} L_1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

이다.

(마) 포화요소가 존재할 때의 폐루우프 시스템의 동특성:

앞서 기술된 (1)-(3), (19)-(23)으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c(t) \\ \dot{\tilde{x}}_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}_p(t) \end{bmatrix} = A_{sat} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_d(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$+ \begin{bmatrix} (G_2 - \Lambda L_2) r(t) - (G_1 - \Lambda L_1) d(t) \\ +[\Lambda(I + L_1 D) - G_1 D] sat(\tilde{v}(t)) \\ \Gamma L_2 r(t) - \Gamma L_1 d(t) - \Gamma(I + L_1 D) sat(\tilde{v}(t)) \\ B sat(\tilde{v}(t)) \end{bmatrix},$$

여기서

$$A_{sat} := \begin{bmatrix} F - \Lambda H & -\Sigma & -(G_1 - \Lambda L_1) C \\ \Gamma H & \Phi & -\Gamma L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \tag{32}$$

이다. 기호 "~"는 해당 변수가 포화 요소가 존재할 때의 변수라는 것을 의미한다. 포화함수 $sat(\cdot)$가 선형영역에서 동작하는 경우 (31)은 (27)로 된다.

그림 2에서 플랜트 $P(s)$가 불안정한 시스템이라면, 포화요소를 가진 제어 시스템을 결코 광역적(global)으로 안정화시킬 수 없다. 왜냐 하면 제어입력의 제한 때문에 목적하는 위치에 상태변수를 근접시킬 수 없는 그러한 상태값이 항상 존재하기 때문이며, 이는 포화되었을 때 되먹임 루우프가 끊어지는 상태가 된다는 것을 고려한다면 쉽게 이해할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 개루우프적으로 안정한 플랜트만을 다룬다. 이를 포함하여 보상행렬을 설계하는 데 필요한 가정을 다음과 같이 한다.

(A.1) 플랜트 $P(s)$는 안정하다. 즉 (1)에서 시스템 행렬 A는 안정한 고유치를 갖는다.

(A.2) 포화요소가 없을 때의 선형 제어기 $K_f(s)$, K_b는 성능과 안정도 면에서 만족할 만한 특성을 준다.

(A.3) 선형 폐루우프 플랜트의 시스템 행렬 $S = A - B(I + L_1 D)^{-1} L_1 C$는 안정한 고유치를 갖는다.

정리 1: 그림 2와 같은 동적 되먹임 ARW 구조에서, 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성능평가함수 (26)을 최소화시키는 동적 보상기 $M_f^*(s)$, $M_b^*(s)$는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M_f^*(s) = G_f L_b \times \Delta(s), \quad M_b^*(s) = -G_b \times \Delta(s), \tag{33}$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta(s) &:= \Lambda_\delta + \Sigma_\delta (sI - \Phi_\delta)^{-1} \Gamma_\delta, && (34)\\ \Phi_\delta &:= A - B(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b C, && (35)\\ \Gamma_\delta &:= B(I + L_f L_b D)^{-1}, && (36)\\ \Sigma_\delta &:= [I - D(I + L_f L_b D)^{-1} L_f L_b] C, && (37)\\ \Lambda_\delta &:= D(I + L_f L_b D)^{-1} && (38) \end{aligned}$$

이다. 이를 상태 공간식으로 나타내면

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \Phi_\delta x_\delta(t) + \Gamma_\delta \zeta(t), && (39)\\ \varphi(t) &= G_1 \Sigma_\delta x_\delta(t) + G_1 \Lambda_\delta \zeta(t) && (40) \end{aligned}$$

이다. 즉

$$\begin{aligned} x_{df}(t) &= x_{db}(t) = x_\delta(t), && (41)\\ \Phi_f^* &= \Phi_b^* = \Phi_\delta, && (42)\\ \Gamma_f^* &= \Gamma_b^* = \Gamma_\delta, && (43)\\ \Sigma_f^* &= G_f L_b \Sigma_\delta, \quad \Sigma_b^* = -G_b \Sigma_\delta, && (44)\\ \Lambda_f^* &= G_f L_b \Lambda_\delta, \quad \Lambda_b^* = -G_b \Lambda_\delta && (45) \end{aligned}$$

이다.

증명: 지면 관계상 생략함. ■

정리 1의 결과는 그림 3과 같이 도시할 수 있다. 동적 보상기의 구성요소인 Φ_δ, Γ_δ, Σ_δ, Λ_δ는 앞먹임 및 되먹임 제어기 그리고 플랜트의 구성요소의 결합으로 결정되지만 그의 차수는 플랜트의 차수와 동일하다.

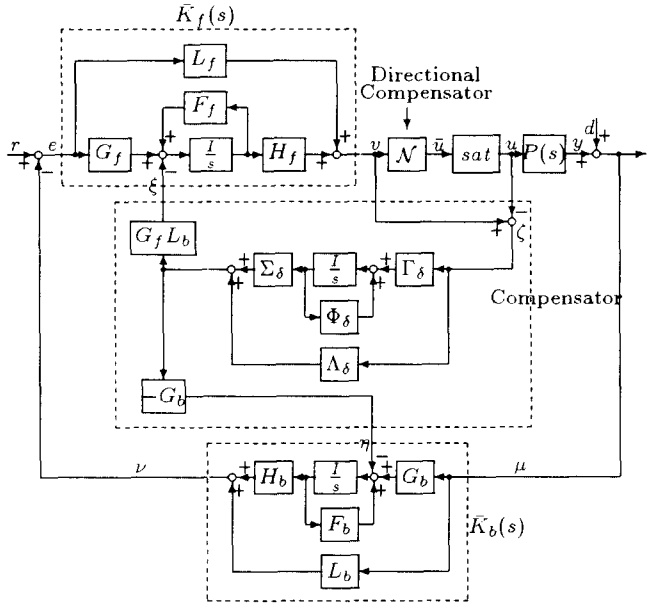

그림 3. 통합된 동적 ARW 구조를 채택한 포화 제어 시스템.
Fig. 3. Saturating control systems adopting the unified dynamical anti-reset windup structure.

ARW 구조의 채택 이유는 포화요소가 동작할 때, 즉 $v(t)$와 $u(t)$ 사이에 차이가 발생할 때 제어기를 보상하여 시스템의 성능저하를 완화하는 것이다. 그러므로 구동기가 포화상태에서 벗어난 후에는 보상작용을 중지시켜 선형 시스템으로 동작하도록 하는 것이 바람직하다. 이는 구동기가 포화상태에서 벗어날 때마다 동적 보상기의 상태변수를 $x_\delta(t) = 0$으로 초기화시킴으로써 실현시킬 수 있다.

이러한 재초기화 과정을 채택하는 경우, 제시된 동적 보상기 $M^*(s) = G_1\Delta(s)$는 다음과 같은 성능평가함수 J_2를 $J_2 = 0$으로 최소화시킨다.

$$\min_{M(s)} \quad J_2 = \int_{t\in E} \|x_c(t,i) - \tilde{x}_c(t)\|^2 dt, \tag{46}$$

여기서 $\|\cdot\|$는 유클리디안 노음(Euclidean norm)이고, E는 측정 가능한 집합(measurable set)으로 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i = \{t | t \in [t_{s_i},\ t_{e_i}]\}$, $i = 1,2,\cdots$,로 정의된다. t_{s_i}와 t_{e_i}는 각각 i번째 포화가 시작되는 시간과 끝나는 시간을 의미한다. 목적함수 내의 상태변수 $x_c(t,i)$, $t \in E_i$는 원래부터의 포화되지 않은 시스템에서의 제어기의 상태변수가 아니라, $(x_c^T(t_{e_{(i-1)}}),\ x_p^T(t_{e_{(i-1)}}))^T = (\tilde{x}_c^T(t_{e_{(i-1)}}),\ \tilde{x}_p^T(t_{e_{(i-1)}}))^T$를 초기상태로 하여 $t_{e_{(i-1)}}$ 이후에 선형 폐루우프 시스템 (27)이 발전해 나갈 제어기의 상태변수이다. 동적 보상기의 초기화 과정은 t_{e_i}, $i = 1,2,\cdots$,에서 매번 일어나므로, 각각의 포화구간 E_i, $i = 1,2,\cdots$,을 분리해서 다룰 수 있다. 예를 들어 구간 E_2를 고려하자. 여기서 정리 1의 결과를 적용하면 모든 t, $t \in E_2$,에 대하여 $\tilde{x}_c(t) = x_c(t,2)$를 만족한다. 마찬가지로 $\tilde{x}_c(t) = x_c(t,i)$, $t \in E_i$, $i \geq 3$가 성립한다. 따라서 정리 1의 $M^*(s)$와 재초기화 과정을 도입하면 성능평가함수 $\min J_2 = 0$으로 최소화시킨다. 시스템이 포화되지 않은 구간에서는 $\tilde{x}_c(t) = x_c(t,i)$이다. 이로부터 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 2 : 대상 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 동적 보상기 $M^*(s)$와 재초기화 과정을 도입한 포화 시스템은 다음의 성능평가함수 J_3를 $\min J_3 = 0$으로 최소화시킨다.

$$J_3 = \int_0^{\infty} \|x_c(t,i) - \tilde{x}_c(t)\|^2, \tag{47}$$

여기서 $x_c(t,i)$는, $t \in E_i$, $t_{e_{(i-1)}}$ 이후에 선형 폐루우프 시스템 (27)이 발전해 나갈 제어기의 상태변수이다.

제시된 동적 보상기의 구성요소를 보면 제어기와 플랜트의 상태공간상의 토대(basis)에 좌우되는 것처럼 보인다. 제어기 측면에서 보면 이러한 관찰은 사실이다. 왜냐 하면 그림 3의 동적 ARW 구조 자체가 제어기의 상태 공간상의 특정한 실현(realization)에 대한 보상이기 때문이다. 제어기의 상태공간 실현이 바뀌면 그에 따라 동적 보상기도 변화되어야 한다는 의미이다. 그러나 플랜트의 상태공간 실현에 대해서는 다음의 정리처럼 좌우되지 않는다.

정리 3 : 앞의 (34)에 제시된 동적 보상기 $\Delta(s)$는 플랜트의 상태공간상의 토대(basis)의 선택에 무관하다.

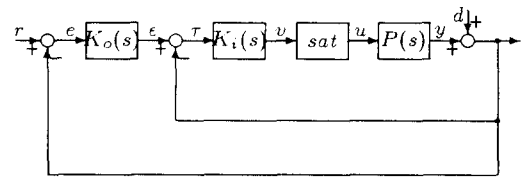

그림 4. 다중 루우프 포화 제어 시스템.
Fig. 4. Multiloop control systems with saturating actuators.

증명 : 지면 관계상 생략함. ■

4. 다중 루우프 포화 제어 시스템의 리셋 와인드업 방지

다중 루우프 포화 제어 시스템을 대표하여 그림 4와 같은 내외 루우프로 구성된 시스템을 고려한다. 임의의 다중 루우프 시스템은 이 시스템을 확장하면 된다.

플랜트의 상태 방정식은 (1)-(3)과 동일하며 제어기들의 상태방정식은 다음과 같다.

(가) 내측 제어기 $K_i(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ci}(t) &= F_i x_{ci}(t) + G_i \tau(t), && (48)\\ v(t) &= H_i x_{ci}(t) + L_i \tau(t), && (49)\\ \tau(t) &= \epsilon(t) - \mu(t), && (50)\\ \mu(t) &= y(t) + d(t). && (51) \end{aligned}$$

(나) 외측 제어기 $K_o(s)$의 동특성:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{co}(t) &= F_o x_{co}(t) + G_o e(t), && (52)\\ \epsilon(t) &= H_o x_{co}(t) + L_o e(t), && (53)\\ e(t) &= r(t) - \mu(t). && (54) \end{aligned}$$

다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템에서와 마찬가지로 관측자 형태의 포화 보상기법을 도입한다. 앞의 2절 및 3절의 보상기 설계절차를 참조하면, 다중 루우프 포화 시스템에 대한 동적 보상기를 얻을 수 있다.

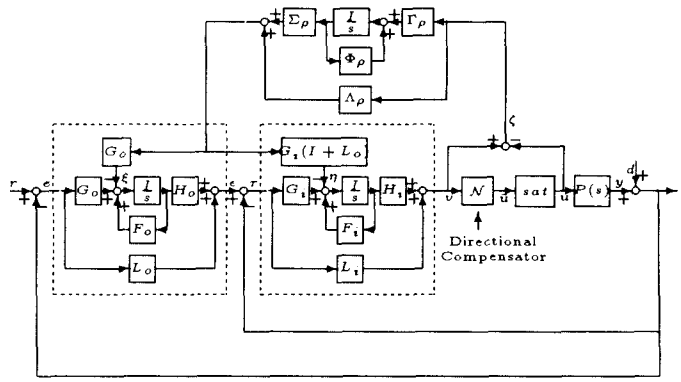

그림 5. 동적 ARW 구조를 채택한 다중 루우프 포화 제어 시스템.
Fig. 5. Multiloop control systems with saturating actuators adopting an dynamic anti-reset windup structure.

정리 4: 그림 5와 같은 동적 되먹임 ARW 구조에서, 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다 하자. 그러면 성능평가함수 (26)을 최소화시키는 동적 보상기는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$M_i^*(s) = G_i(I + L_o) \times \nabla(s), \quad M_o^*(s) = G_o \times \nabla(s), \tag{55}$$

여기서

$$\begin{aligned} \nabla(s) &:= \Lambda_\rho + \Sigma_\rho(sI - \Phi_\rho)^{-1}\Gamma_\rho, && (56)\\ \Phi_\rho &:= A - B(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}L_i(I + L_o)C, && (57)\\ \Gamma_\rho &:= B(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}, && (58)\\ \Sigma_\rho &:= [I - D(I + L_i(I + L_o)D)^{-1}L_i(I + L_o)]C. && (59)\\ \Lambda_\rho &:= D(I + L_i(I + L_o))^{-1} && (60) \end{aligned}$$

이다. 이를 상태 공간식으로 나타내면

$$\begin{aligned} \dot{x}_\rho(t) &= \Phi_\rho x_\rho(t) + \Gamma_\rho \zeta(t), && (61)\\ \xi(t) &= G_i(I + L_o)\Sigma_\rho x_\rho(t) + G_i(I + L_o)\Lambda_\rho \zeta(t), && (62)\\ \eta(t) &= G_o\Sigma_\rho x_\rho(t) + G_o\Lambda_\rho \zeta(t) && (63) \end{aligned}$$

이며, $\xi(t)$와 $\eta(t)$는 각각 내(inner) 제어기와 외(outer) 제어기에 대한 ARW 보상신호이다.

증명: 지면 관계상 생략함. ■

정리 4의 결과를 도시하면 그림 5와 같다. 정리 1 및 정리 4의 결과를 결합하면, 임의의 다중 제어기 및 다중 루우프 포화 제어 시스템에 대한 동적 포화 보상기를 유도할 수 있다.

5. 보상된 전체 시스템의 안정도

본 절에서 안정도에 대한 언급은 다중 제어기로 구성된 포화 제어 시스템에 한하나, 다중 루우프 제어 시스템 또한 유사한 결과를 얻을 수 있다. 먼저 정리 1의 결과인 통합된 동적 보상기 $\Delta(s)$를 고려할 때, 포화요소가 존재할 때의 폐루우프 시스템의 동특성은 (31)과 (34)-(38)로부터 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c(t) \\ \dot{\tilde{x}}_\delta(t) \\ \dot{\tilde{x}}_p(t) \end{bmatrix} = A_{nl} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t) \\ \tilde{x}_\delta(t) \\ \tilde{x}_p(t) \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$+ \begin{bmatrix} (G_2 - G_1\Lambda_\delta L_2)r(t) - (G_1 - G_1\Lambda_\delta L_1)d(t) \\ +[G_1\Lambda_\delta(I + L_1D) - G_1D]sat(\tilde{v}(t)) \\ \Gamma_\delta L_2 r(t) - \Gamma_\delta L_1 d(t) - \Gamma_\delta(I + L_1D)sat(\tilde{v}(t)) \\ Bsat(\tilde{v}(t)) \end{bmatrix},$$

여기서

$$A_{nl} := \begin{bmatrix} F - G_1\Lambda_\delta H & -G_1\Sigma_\delta & -(G_1 - G_1\Lambda_\delta L_1)C \\ \Gamma_\delta H & \Phi_\delta & -\Gamma_\delta L_1 C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \tag{65}$$

이다. 기호 "~"는 해당 변수가 포화 요소가 존재할 때의 변수라는 것을 의미한다. 여기서 다음과 같은 정리를 말할 수 있다.

정리 5 : 그림 3과 같은 포화요소를 가진 제어 시스템이 아래 조건을 만족시킨다 하자.

1. 포화요소가 존재하지 않을 때의 선형 시스템이 가정 (A.1)-(A.3)을 만족시킨다.

2. 동적 보상기가 (34)-(38)로 설계되었다.

그러면 이 제어 시스템은 전체적으로 안정(totally stable)하다.

증명 : 지면 관계상 생략함. ■

6. 시뮬레이션 예제

본 절에서는 시뮬레이션을 통하여 제시된 ARW 방법의 유용성을 살피도록 한다. 다음의 전달 함수로 표현된 플랜트를 고려하자.

$$P(s) = \frac{2}{s + 2/3}$$

여기서 제어 입력은 ± 0.5로 제한되어 있다고 하자. 이러한 플랜트에 대하여 선형 시스템의 성능을 고려하여 다음과 같은 앞먹임 및 되먹임 제어기가 설계되어 있다고 가정한다.

$$K_f(s) = \frac{2s+3}{s}, \quad K_b(s) = \frac{0.5s+15}{s+15}$$

플랜트는 다음과 같은 상태 공간 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_p(t) = -\frac{2}{3}x_p(t) + u(t), \quad y(t) = 2x_p(t).$$

마찬가지로 앞먹임 및 되먹임 제어기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_{cf}(t) = e(t), \quad v(t) = 3x_{cf}(t) + 2e(t),$$
$$\dot{x}_{cb}(t) = -15x_{cb}(t) + \mu(t), \quad \nu(t) = 7.5x_{cb}(t) + 0.5.$$

기준 입력은 $r(t) = 1,\ t \geq 0$라 하였다. 그림 6에 각각 포화 비선형이 없는 선형 시스템의 출력 $y(t)$와 플랜트에 인가되는 제어 입력 $u(t)$를 실선으로 도시하였다. 그림에서 알 수 있듯이 응답 특성은 기준 입력을 잘 추종한다. 그런데 포화 비선형이 존재한다면 제어 입력이 초기에 포화 상한값 0.5를 넘으므로 포화 현상이 발생되어 시스템의 성능을 저하시키게 된다. 이를 그림 6의 점선으로 도시하였다.

이제 이러한 시스템에 제시된 방법을 적용해 보자. 동적 보상기 $M_f^*(s)$ 및 $M_b^*(s)$의 상태 공간 표현은 (39)와 (40)에 의하여

$$\dot{x}_\delta(t) = -2.6667x_\delta(t) + \zeta(t),$$
$$\xi(t) = x_\delta(t), \quad \eta(t) = -2x_\delta(t).$$

와 같이 얻어진다. 예제 시스템은 가정 (A.1)-(A.3)을 만족하므로 정리 5에 의하여 안정도를 보장받는다. 보상된 시스템은 그림 6에서 확인할 수 있는 바와 같이 선형 시스템의 응답 특성을 보다 근접하게 추종한다.

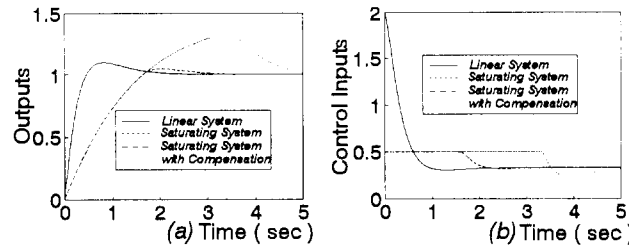

그림 6. 시스템의 응답 특성. (a) 시스템 출력 $y(t)$. (b) 제어 입력 $u(t)$.

Fig. 6. Responses of the system. (a) Outputs $y(t)$. (b) Control inputs $u(t)$.

7. 결 론

본 논문은 다중 제어기 및 다중 루우프로 구성된 포화 제어 시스템에서의 동적 ARW 보상방법을 연구하였다. 포화요소가 존재하지 않는다고 가정한 상태에서의 다변수 선형 제어 시스템에 대한 만족할 만한 응답특성을 주는 선형 제어기는 이미 구성되어 있는 경우, 포화 상황하에서 성능저하를 완화하기 위하여 추가적인 동적 보상기를 효과적으로 설계하는 법을 기술하였다. 제시된 동적 ARW 보상구조의 선정은 표준적인 ARW 구조인 Åström과 Wittenmark의 관측자 기법구조를 응용한 형태이다.

제시된 동적 보상기는 기준 입력이나 외부교란 그리고 포화치등에 무관하게 결정되며, 제어기와 플랜트의 매개변수들로써 직접적으로 구해지는 형태를 갖기 때문에, 2단계 설계기법에서 미리 선형 제어기가 설계되어 있기만 하면 직접적으로 쉽게 구해진다. 제시된 보상방법의 역할은 포화 현상시 제어기의 상태변수를 포화 요소가 없었을 때의 제어기가 가질 상태변수에 그대로 유지시키는 것이다.

기존의 ARW 방법이 안정도 보장 면에서 문제가 있었던 데 반하여, 제시된 동적 보상방법은 전체적 안정도를 비교적 넓은 대상 시스템에 대하여 보장해 준다. 따라서 제시된 방법은 성능향상과 안정도 보장을 동시에 만족시키는 보상방법이다. 또한 설계과정이 간단하기 때문에 실제적인 응용성을 가지고 있다.

참고 서적

[1] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 1984.

[2] P. J. Campo and M. Morari, "Robust Control of Processes subject to Saturation Nonlinearities," *Computers Chem. Engng.*, Vol. 14, No. 4/5, pp. 343-358, 1990.

[3] R. Hanus, M. Kinnaert, and J. L. Henrotte, "Conditioning Technique, A General Anti-windup and Bumpless Transfer Method," *Automatica*, Vol. 23, No. 6, pp. 729-739, 1987.

[4] M. V. Kothare, P. J. Campo, M. Morari, and C. N. Nett, "A Unified Framework for the Study of Anti-windup Designs," *Automatica*, Vol. 30, No. 12, pp. 1869-1883, 1994.

[5] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular Perturbation Approximation of Balanced Systems," *Int. J. Control*, Vol. 50, No. 4, pp. 1379-1405, 1989.

[6] J. -K. Park and C. -H. Choi, "A Compensation Method for Improving the Performance of Multivariable Control Systems with Saturating Actuators," *Control - Theory and Advanced Technology*, Vol. 9, No. 1, pp. 305-323, 1993.

[7] J. -K. Park and C. -H. Choi, "Dynamic Compensation Method for Multivariable Control Systems with Saturating Actuators," *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 40, No. 9, pp. 1635-1640, Sep., 1995.

[8] J. -K. Park and C. -H. Choi, "Dynamical Anti-Reset Windup Method for Discrete-Time Saturating Systems," *Proc. of IEEE Int'l Conf. on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 2926-2931. Dec., 1994.

[9] K. S. Walgama and J. Sternby, "Inherent Observer Property in a Class of Anti-Windup Compensators," *Int. J. Control*, Vol. 52, No. 3, pp. 705-724, 1990.