Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

QLQG/H_∞ 제어를 이용한 다변수 하드비선형 제어기 설계

Design of the Multivariable Hard Nonlinear Controller Using QLQG/H_∞ Control

°한 성 익*, 김 종 식**
* 순천공업전문대학 제어계측과 (Tel: (0661) 740 - 1352; Fax : (0661) 743 - 5106)
** 부산대학교 기계설계공학과 (Tel : (051) 510 - 2317; Fax : (051) 512 - 9835)

Abstracts We propose the robust nonlinear controller design methodology, the H_∞ - constrained quasi - linear quadratic Gaussian control (QLQG/H_∞), for the statistically-linearized multivariable system with hard nonlinearties such as Coulomb friction, deadzone, etc. The H_∞ performance constraint is involved in the optimization process by replacing the covariance Lyapunov equation with the Riccati equation whose solution leads to an upper bound of the QLQG performance. Because of the system's nonlinearity, however, one equation among three Riccati equations contain the nonlinear correction terms that are very difficult to solve numerically. To treat this problem, we use simple algebraic techniques. With some analytic transformation for Riccati equations, the nonlinear correction terms can be so eliminated that the set of a linear controller to the different operating points are designed. Synthesizing these via inverse random input describing function (IRIDF) technique, the final nonlinear controller can be designed.

Keywords Hard Nonlinearity, RIDF, QLQG, QLQG/H_∞, IRIDF

1. 서론

선형 다변수시스템에 대한 제어이론은 1960년대 이래 현재까지 큰 발전을 하고 있으나 비선형 다변수시스템에 대해서는 일관된 제어이론은 아직까지 개발되지 않고 있다. 그렇지만 충분한 연속성을 갖는 비선형 다변수시스템에 대해서는 Taylor 급수전개를 이용하여 선형화한 후 게인스케쥴링을 이용하여 비선형제어기를 설계할 수 있었다. 그러나 쿨롱마찰, 백래쉬, 사역대같은 불연속특성을 갖는 비선형의 경우 이러한 Taylor 급수전개가 불가능하므로 시스템이 충분한 저역통과필터 특성을 갖는다면 입력신호의 특성에 따라 준선형화(Quasi - linearization)기법인 SIDF(Sinusodal Input Describing Function) 기법과 RIDF(Random Input Describing Function)기법을 이용하여 선형화한 후 제어기를 설계한다. 더 일반적인 준선형화 방법인 RIDF 기법[1]을 이용한 다변수 제어기 설계는 LQG 제어기법과 결합한 QLQG 제어방법을 Beaman[2]이 발전시켰으나 Riccati 방정식에 비선형 보정항이 나타나는 문제로 실용성이 제한되었다. 이러한 문제에 대해 Kim[4]이 LQG/LTR 기법을 도입한 QLQG/LTR 방법을 개발함으로써 해결하였다.

그런데 Bernstein 과 Haddad[4]가 LQG/H_∞ 혼합 최적제어방법을 발전시켰는데 Han[5]이 LTR 기법을 이용한 QLQG/H_∞/LTR 제어기법을 이용하여 하드 비선형 제어기법을 확장하였는데 본 논문에서는 LTR 기법을 이용하지 않고 간단한 가정과 대수적인 변환을 이용한 다변수 하드비선형 제어기법을 연구한다.

2. QLQG/H_∞ 제어시스템

2.1 QLQG/H_∞ 제어

하드 비선형 다변수시스템에 대한 동적방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) + D_1 w_1(t) \qquad (1)$$

여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태벡터, $u(t) \in R^m$ 는 입력벡터, $w \in R^p$ 는 플랜트 외란벡터이다. 만일 식(1)의 하드비선형이 대칭, 단가, 불기억저장(memoryless) 특성을 갖고 충분한 저역통과 필터 특성을 유지한다면 RIDF 기법을 이용하여 통계학적으로 선형화된 시스템으로 근사시킬 수 있다. 그리고 플랜트 및 센서 입력외란과 상태변수 및 제어입력에 대한 가중함수를 포함하면 다음과 같은 n차 시스템 $G_p(s) = (N(\sigma_x), B, C)$ 를얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= N(\sigma_x)+Bu(t)+D_1 w_1(t) \\ z_1(t) &= E_1(t)x(t),\ z_2(t) = E_2(t)u(t) \\ z_{1\infty}(t) &= E_{1\infty}(t)x(t),\ z_{2\infty}(t) = E_{2\infty}(t)u(t) \\ y(t) &= Cx(t)+D_2 w_2(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

여기서 $N(\sigma_x) \in R^{n\times n}$ 는 통계학적으로 선형화된 동적행렬, σ_x 는 플랜트 상태의 표준편차, $w_1(t) \in R^d$ 와 $w_2(t) \in R^d$ 는 비연성된 백색잡음벡터, $z_1(t) \in R^q, z_2(t) \in R^q, z_{1\infty}(t) \in R^{q_\infty}, z_{2\infty} \in R^{q_\infty}$ 는 각각 LQG 및 H_∞ 관점에서의 오차벡터, $D_1 \in R^{n\times d}$ 와 $D_2 \in R^{l\times d}$ 는 잡음가중행렬, $E_1 \in R^{q\times n}, E_2 \in R^{q\times m}, E_{1\infty} \in R^{q_\infty\times n}, E_{2\infty} \in R^{q_\infty\times m}$ 는 각각 LQG 및 H_∞ 관점에서의 가중행렬들이다. 이 때 n_c 차의 비선형 동적보상기는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= N_c(\sigma_c)x_c(t)+H(\sigma_x,\sigma_c)y(t) \\ u(t) &= G(\sigma_c)x_c(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

여기서, $x_c(t) \in R^{n_c}$ 는 보상기 상태백터, $N(\sigma_c) \in R^{n_c\times n_c}$ 는 동적행렬, $H(\sigma_x,\sigma_c) \in R^{n_c\times l}$ 은 필터게인행렬, $G(\sigma_c) \in R^{m\times n_c}$ 는 제어게인행렬, σ_c 는 보상기 상태의 표준편차이다. 이 보상기는

1) 폐루프시스템 (2)를 점근적으로 안정화시키고
2) $\tilde{w}(t)$ 에서 $\tilde{z}_\infty(t)$ 까지의 폐루프전달행렬 $H_N(s) \in R^{q_\infty\times p}$

$$H_N(s) = \tilde{E}_\infty (s\tilde{I}_{\tilde{n}} - \tilde{N}(\sigma))^{-1}\tilde{D} \qquad (4)$$

은 $\|H_N(s)\| \le \gamma$ 을 만족하며

3) 가격함수

$$J(N_c(\sigma),H,G) = \lim_{t\to\infty} E[x^T(t)R_1 x(t)+u^T(t)R_2 u(t)] = tr(\tilde{Q}\tilde{R}) \qquad (5)$$

로 주어지는 설계사양을 만족한다. 여기서 γ 는 주어진 상수,

$\tilde{w}(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T$, $\tilde{N} = \begin{bmatrix} N(\sigma_x) & BG \\ HC & N_c(\sigma_c) \end{bmatrix}$, $\tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & HD_2 \end{bmatrix}$,

$\tilde{E}_\infty = \begin{bmatrix} E_{1\infty} & 0 \\ 0 & E_{2\infty} \end{bmatrix}$ 이며 $\tilde{Q} = \lim_{t\to\infty} E[\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t)]$ 는 $\tilde{n}\times\tilde{n}$ 대수 Lyapunov 방정식을 만족한다.

$$\tilde{N}\tilde{Q}+\tilde{Q}\tilde{N}^T+\tilde{V}=0 \quad (6)$$

여기서 $\tilde{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & G^T R_2 G \end{bmatrix}$는 제어가중행렬, $R_1=E_1^T E_1$, $R_2=E_2^T E_2$,

$\tilde{V}=\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & HV_2H^T \end{bmatrix}$은 가우스백색잡음입력의 PSD, $V_1=D_1D_1^T$,

$V_2=D_2D_2^T$ 이다.

2.2 H_∞ 외란제거 구속을 갖는 QLQG 제어

정리 2.2: 만일 양의 반한정행렬 $\bar{Q},\bar{P},\hat{Q},\hat{P}$ 가 다음의 식들을 만족하고

$$N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}+V_1=0 \quad (11)$$

$$(N+\gamma^{-2}[\bar{Q}+\hat{Q}]R_{1\infty})^T\bar{P}+\bar{P}(N+\gamma^{-2}[\bar{Q}+\hat{Q}]R_{1\infty})+R_1$$
$$-S^T\bar{P}BR_2^{-1}B^T\bar{P}S+\Psi(\bar{P},\hat{P},\bar{Q},\hat{Q},N)-\Psi(\hat{P},\hat{Q},N)=0 \quad (12)$$

$$(N-BR_2^{-1}B^T\bar{P}S+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})\hat{Q}+\hat{Q}(N-BR_2^{-1}B^T\bar{P}S+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^T$$
$$+\gamma^{-2}\hat{Q}(R_{1\infty}+\beta^2S^T\bar{P}BR_2^{-1}B^T\bar{P}S)\hat{Q}+\bar{Q}\Sigma\bar{Q}=0 \quad (13)$$

여기서,

$$S=(I_n+\beta^2\gamma^{-2}\hat{Q}\bar{P})^{-1},$$

$$\Psi(\bar{P},\hat{P},\bar{Q},\hat{Q},N(\sigma_x))=2\mathrm{tr}[(\bar{P}+\hat{P})\frac{\partial N(\sigma_x)}{\partial(\bar{Q}+\hat{Q})}(\bar{Q}+\hat{Q})],$$

$$\psi(\hat{P},\hat{Q},N(\sigma_x))=2tr[\hat{P}\frac{\partial N(\sigma_x)}{\partial\hat{Q}}\hat{Q}]$$

그리고

$$N_c(\sigma_c)=N-BR_2^{-1}B^T\bar{P}S-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty} \quad (14)$$

$$H=QC^TV_2^{-1},\quad G=-R_2^{-1}B^T\bar{P}S \quad (15)$$

라고 하면 $\tilde{N}$ 이 점근적으로 안정하면 $(\tilde{N}(\sigma),\tilde{D})$ 는 안정가능하다. 이 경우 보상기는 플랜트 $G_p(s)$ 를 안정화시키고 식(9)를 만족한다. 또한 보조가격함수는 다음과 같이 주어진다.

$$tr(\tilde{Q}_\infty\tilde{R}_\infty)=tr[(\bar{Q}+\hat{Q})R_1+\hat{Q}S^T\bar{P}BR_2^{-1}B^T\bar{P}S] \quad (16)$$

증명 : 참고문헌 [4], [5]참조, 생략.

정리 2.2의 결과는 선형시스템의 방정식[4]에 대응하는 통계학적으로 선형화된 시스템에 대한 방정식이며 다른 점은 식(12)가 수치적으로 매우 풀기 어려운 비선형 보정항을 포함하고 있다는 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 LTR기법을 사용하지 않고 공분산 및 Lagrangian 행렬에 대한 간단한 대수적 변환을 통해 Riccati 방정식에 포함된 비선형 보정항을 간단하게 소거하여 제어기의 파라미터를 편리하게 설계할 수 있는 제어방법을 제시한다.

2.3 형태 I

I) 1 단계 :

보조정리 2.1: $\bar{P},\hat{Q}\in N^n$ 으로 두고 $Z=\bar{P}S$ 로 정의하면 $Z=Z^T=S^T\bar{P}$ 이고, $S=(I_n+\beta^2\gamma^{-2}\hat{Q}\bar{P})^{-1}$, 그리고 $Z\in N^n$ 으로 된다. 만일 $\bar{P}$ 가 양의 한정행렬이면 Z 는 양의 한정행렬이고

$$Z=(\bar{P}^{-1}+\beta^2\gamma^{-2}\hat{Q})^{-1} \quad (17)$$

정리 2.2 : $\bar{Q}\in N^n$ 으로 두고 만일 (15), (16)을 만족하는 $\bar{P}\in P^n$, $\hat{Q}\in N^n$ 이 존재한다면 $Z=\bar{P}S$ 에 대해 (11), (12), (13)은 다음과 같이 표현되고

$$N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}+V_1-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}=0 \quad (18)$$

$$(N-\Sigma Z+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})\hat{Q}+\hat{Q}(N-\Sigma Z+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^T$$
$$+\gamma^{-2}\hat{Q}(R_{1\infty}+\beta^2Z\Sigma Z)\hat{Q}+\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}=0 \quad (19)$$

$$(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}+\gamma^{-2}\hat{Q}[R_{1\infty}-\beta^2R_1])^TZ$$
$$+Z(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}+\gamma^{-2}\hat{Q}[R_{1\infty}-\beta^2R_1])$$
$$+R_1-Z(\Sigma+\gamma^{-2}\beta^2\hat{Q}[\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}\beta^2R_1]\hat{Q})Z+\gamma^{-2}\beta^2ZQC^TV_2^{-1}CQZ$$
$$+(I_n-\gamma^{-2}\beta^2Z\hat{Q})\Psi(Z,\hat{P},\bar{Q},\hat{Q},N)(I_n-\gamma^{-2}\beta^2\hat{Q}Z)=0 \quad (20)$$

보상기 (N_c,H,G) 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$N_c=N-\Sigma Z-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}, \quad (21)$$

$$H=\bar{Q}C^TV_2^{-1},\quad G=-R_2^{-1}B^TZ \quad (22)$$

증명: [4], [5] 참조, 생략.

II) 2 단계 :

LQG 와 H_∞ 가중치를 같이 둔다면, 즉,

$$R_{1\infty}=R_1,\ \beta=1,\quad \hat{Q}=\gamma^2Z^{-1},\quad Z=Z_\infty. \quad (23)$$

정리 2.3: 다음을 만족하는 $\bar{Q}\in N^n$ 와 $Z_\infty\in P^n$ 가 존재한다.

$$N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}+V_1-\bar{Q}C^TV_2^{-1}\bar{Q}=0 \quad (24)$$

$$(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^TZ_\infty+Z_\infty(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})$$
$$+R_{1\infty}-Z_\infty\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}Z_\infty\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}Z_\infty=0 \quad (25)$$

그리고 보상기 (N_c,H,G) 는 최종적으로 다음과 같이 주어진다.

$$N_c=N-\Sigma Z_\infty-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty} \quad (26)$$

$$H=\bar{Q}C^TV_2^{-1},\quad G=-R_2^{-1}B^TZ_\infty \quad (27)$$

증명 : 식(19)로부터,

$$\gamma^{-2}Z_\infty(61)Z_\infty$$
$$=(N-\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^TZ_\infty+Z_\infty(N-\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})$$
$$+(\gamma^{-2}[R_{1\infty}+Z_\infty\Sigma Z_\infty]\gamma^2+\gamma^2Z_\infty\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}Z_\infty \quad (28)$$
$$=(N-\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^TZ_\infty+Z_\infty(N-\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})$$
$$+R_{1\infty}-Z_\infty\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}Z_\infty\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}Z_\infty=0$$

식(23)에 대해 식(20)으로부터

$$(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^TZ_\infty+Z_\infty(N+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})$$
$$+R_{1\infty}-Z_\infty\Sigma Z_\infty+\gamma^{-2}Z_\infty QC^TV_2^{-1}CQZ_\infty \quad (29)$$
$$+(I_n-\gamma^{-2}\gamma^2Z_\infty Z_\infty^{-1})\Psi(Z_\infty,\hat{P},\bar{Q},\hat{Q},N)(I_n-\gamma^{-2}\gamma^2Z_\infty^{-1}Z_\infty)=0$$

(29)를 고찰하면 마지막의 비선형 보정항이 간단하게 소거됨을 알 수 있다. 그리고 (28), (29)는 주어진 정의와 가정에 의해 다음과 같은 동일식으로 나타나므로 결과적으로 1개의 Riccati 방정식이 줄어들게된다. □

2.4 형태 II

I) 단계 I

보조정리 2.2

$$Y=(Z^{-1}+\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q})^{-1}=(\bar{P}^{-1}+\gamma^{-2}\beta^2[\bar{Q}+\hat{Q}])^{-1} \quad (30)$$

로 정의하고 만일 $\bar{P}$ 가 양의한정이면, 보조정리 2.1로부터 Y 도 양의 한정이다.

정리 2.4: $\bar{Q}\in N^n$ 로두고 만일 (12), (13)을 만족하는 $\bar{P}\in P^n$ 와 $\hat{Q}\in N^n$ 가 존재한다면, Y 에 대해 (11), (12), (13)은 다음과 같이 표현되고

$$N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}+V_1-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}^T=0 \quad (31)$$

$$(N-\Sigma[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1}+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})\hat{Q}$$
$$+\hat{Q}(N-\Sigma[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1}+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^T$$
$$+\hat{Q}(\gamma^{-2}R_{1\infty}+\gamma^{-2}\beta^2[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1}\Sigma[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1}[Y^{-1} \quad (32)$$
$$-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1})\hat{Q}$$
$$+\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}^T=0$$

$$(N+[\bar{Q}+\hat{Q}][\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}\beta^2R_1])^TY$$
$$+Y(N+[\bar{Q}+\hat{Q}][\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}\beta^2R_1])+R_1$$
$$+\gamma^{-2}\beta^2(YV_1Y+YDY)-Y\Sigma Y$$
$$-\gamma^{-2}\beta^2Y([\bar{Q}+\hat{Q}][\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}\beta^2R_1][\bar{Q}+\hat{Q}])Y$$
$$+(I_n-\gamma^{-2}\beta^2Y[\bar{Q}+\hat{Q}])\Psi(Y,\hat{P},\bar{Q},\hat{Q},N)(I_n-\gamma^{-2}\beta^2[\bar{Q}+\hat{Q}]Y)=0 \quad (33)$$

보상기 (N_c,H,G) 는 다음과 같이 주어진다.

$$N_c=N-\Sigma[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1}-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty} \quad (34)$$

$$H=\bar{Q}C^TV_2^{-1}, \qquad G=-R_{2\infty}^{-1}B^T[Y^{-1}-\gamma^{-2}\beta^2\bar{Q}]^{-1} \quad (35)$$

증명 : [4], [5] 참조, 생략.

2) 단계 II

$$\hat{Q}=\gamma^2Y^{-1}-\bar{Q}, \quad Y=Y_\infty. \quad (36)$$

정리 4.4 : (23)이 만족된다면, 다음을 만족하는 $\bar{Q}\in N^n$ 와 $Y_\infty\in P^n$ 가 존재하고

$$N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}+V_1-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}=0 \quad (37)$$

$$N^TY_\infty+Y_\infty N+R_{1\infty}+\gamma^{-2}Y_\infty V_1Y_\infty-Y_\infty\Sigma Y_\infty=0 \quad (38)$$

보상기 (N_c,H,G) 는 다음과 같이 최종적으로 주어진다.

$$N_c=N-\Sigma(Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q})^{-1}-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty} \quad (39)$$

$$H=\bar{Q}C^TV_2^{-1}, \qquad G=-R_{2\infty}^{-1}B^T(Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q})^{-1} \quad (40)$$

여기서, $\rho(\bar{Q}Y_\infty)\le\gamma^2$, $\rho(\cdot)$ 는 최대고유값

증명 : 식 (36)을 (32)에 대입하면

$$(N-\Sigma[Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q}]^{-1}+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})[\gamma^{-2}Y_\infty^{-1}-\bar{Q}]$$
$$+[\gamma^{-2}Y_\infty^{-1}-\bar{Q}](N-\Sigma[Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q}]^{-1}+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty})^T$$
$$+[\gamma^{-2}Y_\infty^{-1}-\bar{Q}](\gamma^{-2}R_{1\infty}+\gamma^{-2}[Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q}]^{-1}\Sigma[Y_\infty^{-1}-\gamma^{-2}\bar{Q}]^{-1}[Y_\infty^{-1} \quad (41)$$
$$-\gamma^{-2}\bar{Q}]^{-1})[\gamma^{-2}Y_\infty^{-1}$$
$$-\bar{Q}]+\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q}=0$$

윗 식을 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\gamma^2NY_\infty^{-1}+\gamma^2Y_\infty^{-1}N^T-\gamma^2\Sigma+\gamma^2Y_\infty^{-1}\gamma^{-2}R_{1\infty})\gamma^2Y_\infty^{-1}$$
$$-(N\bar{Q}+\bar{Q}N^T+\gamma^{-2}\bar{Q}R_{1\infty}\bar{Q}-\bar{Q}C^TV_2^{-1}C\bar{Q})=0 \quad (42)$$

$\gamma^{-2}Y_\infty$ 를 (42)의 좌우측에 곱하면

$$N^TY_\infty+Y_\infty N+R_{1\infty}+\gamma^{-2}Y_\infty V_1Y_\infty-Y_\infty\Sigma Y_\infty=0 \quad (43)$$

이것으로 (38)이 얻어진다. 동시에 식(36)에 대해 식(33)을 정리하면

$$(N+\gamma^2Y_\infty^{-1}[\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}R_{1\infty}])^TY_\infty$$
$$+Y_\infty(N+\gamma^2Y_\infty^{-1}[\gamma^{-2}R_{1\infty}-\gamma^{-2}R_{1\infty}])$$
$$+R_{1\infty}+\gamma^{-2}Y_\infty V_1Y_\infty-Y_\infty\Sigma Y_\infty-\gamma^{-2}Y_\infty\gamma^2Y_\infty^{-1}[\gamma^{-2}R_{1\infty} \quad (44)$$
$$-\gamma^{-2}R_\infty^{-1}]\gamma^{-2}Y_\infty^{-1}Y_\infty$$
$$+(I_n-\gamma^{-2}Y_\infty\gamma^2Y_\infty^{-1})\Psi(Y_\infty,\hat{P},\bar{Q},N)(I_n-\gamma^{-2}\gamma^2Y_\infty^{-1}Y_\infty)=0$$

으로 주어지는데 마지막 항을 살펴보면 비선형 보정항이 소거되고 있음을 알 수 있으며 정리하면 식(43)으로 동일하게 나타난다. 결과적으로 형태 II에서도 비선형 보정항이 소거됨과 동시에 Riccati 방정식도 1개 줄어들고 있음을 알 수있다.

이 결과들은 Bernstein[6]의 선형시스템에 적용한 기법을 하드비선형 시스템에 대해 확장한 것으로서 이 기법을 도입하면 가장 문제가 되는 비선형 보정항이 제시한 대로 일정한 조건하에 간단하게 소거되어 LTR기법을 이용하지 않고 비선형 보정항이 포함된 수정된 Riccati 방정식을 처리할 수 있 수 있으며 통계학적 선형게인을 제외하면 선형시스템과 동일한 형태의 식으로 나타난다는 결과를 알 수 있다..

입력잡음의 강도(Intensity)에 따른 D.F.게인의 정확한 값은 공분산 Lyapunov 방정식대신에 아래와 같은 보상된 폐루프 시스템에 대한 Riccati 방정식을 풀어서 얻을 수 있다.

$$\tilde{N}\tilde{Q}_\infty+\tilde{Q}_\infty\tilde{N}+\gamma^{-2}\tilde{Q}_\infty\tilde{R}_\infty\tilde{Q}_\infty+\tilde{V}=0 \quad (45)$$

그리고 여러 입력범위의 통계학특성에 의존하는 D.F.게인들에 대한 비선형함수들은 IRIDF기법을 이용하여 합성할 수 있다. 상세한 것과 설계절차는 참고문헌[5] [6]을 참조한다.

3. 설계 예

쿨롱마찰을 갖는 직렬직접구동 로보트암[3]을 QLQG/H_∞ 제어 시스템에 대한 다변수 비선형제어기 설계 예로 선정하였다. 직접구동 암 시스템은 다음의 관성텐서를 갖는다.

$$H_{11}=I_1+m_1g_1^2+I_2+m_2\times(l_1^2+g_2^2+2l_1g_2\cos\theta_2)$$
$$H_{22}=I_2+m_2g_2^2, \quad H_{12}=I_2+m_2g_2^2+m_2l_1g_2\cos\theta_2 \quad (46)$$

여기서, $I_i,m_i,g_i,l_i(i=1,2)$ 는 각각 관성, 질량, 질량중심으로부터의 거리, 링크의 길이를 나타낸다. 질량중심거리 g_2 와 중력효과를 무시하면 시불변 쿨롱마찰을 포함하는 직접구동 암은 다음의 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}=x_2,\ \dot{x}_2=\frac{1}{J_1}\left[-\tau_{c1}(x_2)+\tau_{c2}(x_4)+u_1-u_2\right]$$
$$\dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=\frac{1}{J_1}\left[\tau_{c1}(x_2)-u_1\right]+\frac{1}{J_1}\left[-\tau_{c2}(x_4)-u_2\right] \quad (47)$$

여기서, $[x_1,x_2,x_3,x_4]^T=[\theta_1,\dot{\theta}_1,\theta_2,\dot{\theta}_2]^T$

$$[u_1,u_2]^T=[\tau_1,\tau_2]^T,\ J_1=H_{11}-\frac{\partial H_{12}^2}{\partial H_{22}},\ J_2=H_{22}-\frac{\partial H_{12}^2}{\partial H_{11}}$$

$H_{11}=5\ kg\,m^2$, $H_{12}=H_{22}=0.15\ kg\,m^2$

RIDF 기법을 이용하면, 통계학적으로 선형화된 플랜트는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t)=N(\sigma_x)x(t)+Bu(t)+D_1w_1(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+D_2w_2(t) \quad (48)$$

여기서,

$$N=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -0.207N_1 & 0 & 0.207N_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0.207N_1 & 0 & -6.873N_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.207 & -0.207\\ 0 & 0\\ -0.207 & 6.873\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ N_1=\frac{T_{c1}\sqrt{(2/\pi)}}{\sigma_{x2}},\ N_2=\frac{T_{c2}\sqrt{(2/\pi)}}{\sigma_{x4}}$$

N_1 과 N_2 는 쿨롱마찰 τ_{c1} 과 τ_{c2} 에 대한 D.F. 게인, σ_{x2} 와 σ_{x4} 는 상태변수 x_2 와 x_4 의 표준편차, 쿨롱마찰 토오크 T_{c1} 과 T_{c2} 는 각각 15(Nm), 5(Nm)이다.

설계사양

1)임의의 일정한 입력에 대해 과도응답이 양호하고 정상상태 오차가 0이고 교차주파수는 약 10 rad/s.

2)명령추종 및 외란제거를 위한 최대특이값이 $\omega<1$ rad/s 이하에서 -20 dB 이하,모델링오차 및 센서잡음 저감도를 위해 $\omega>100$ rad/s 이상에서 -20 dB 이하.

관심있는 작동범위에 대해 가상입력 V_2 의 0-평균백색잡음의 강도(V_2)는 표 3.1과 같이 선정하였다.

표 3.1 주어진 작동점에 대한 플랜트의 표준편차 및 D.F. 게인

V_2	4	3	1	0.1	0.01	0.001
N_1	0.197	0.228	0.398	1.263	3.997	12.652
N_2	0.025	0.028	0.049	0.156	0.492	1.557
σ_{x2}	60.79	52.44	30.05	9.473	2.994	0.946
σ_{x4}	163.58	140.71	81.14	25.65	8.11	2.563

설계파라미터로서 $\gamma = 0.2$,

$\boldsymbol{D}_1 = [1\,0\,0\,0;\,0\,0\,1\,0;0\,0\,0\,0;\,0\,0\,0\,0]^T$, $\boldsymbol{D}_2 = [0\,0\,0.1\,0;\,0\,0\,0\,0]$,

$\boldsymbol{E}_{1\infty} = [1\,0\,0\,0;\,0\,0\,1\,0;0\,0\,0\,0;\,0\,0\,0\,0]$, $\boldsymbol{E}_{2\infty} = [0\,0\,1\,0;\,0\,0\,0\,1]^T \times 3.2\times10^{-4}$

으로 각각 선정하였다. 보상기의 D.F. 게인(N_{c1}, N_{c2})는 플랜트와 동일하고 표준편차는 σ_{c2}, σ_{c4} 만이 플랜트의 값과 일치하였다. 입력의 통계학적 특성에 무관한 제어게인과 필터게인은 다음과 같다.

$G_{11} = 3658,\quad G_{12} = 178,\quad G_{14} = 4.65,$

$G_{22} = 23.68,\quad G_{23} = 5.28,\quad G_{24} = 29.29$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 11.55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.55 & 0 \end{bmatrix}^T$$

표 3.2 주어진 작동점에서의 제어게인

V_2	4	3	1	0.1	0.01	0.001
G_{13}	-20.40	-21.38	-21.22	-20.45	-18.07	-10.97
G_{21}	-21.76	-21.78	-21.94	-22.71	-25.08	-32.16

보상기에 구현할 비선형함수들은 IRIDF[6]기법에 의해 보상기의 D.F. 게인(N_{c1}, N_{c2})는 각각 15, 5의 크기를 제어게인 G_{13}, G_{21}에 대해서는 각각 -12.37, 2.45의 크기를 갖는 쿨롱마찰 비선형 함수를 구할 수 있다.

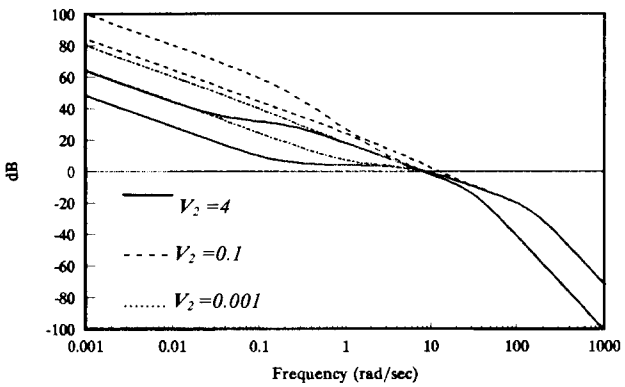

Fig. 3.1 Singular values plot of the loop TFM of nonlinear plant connected with the LQG/ H_∞ controller

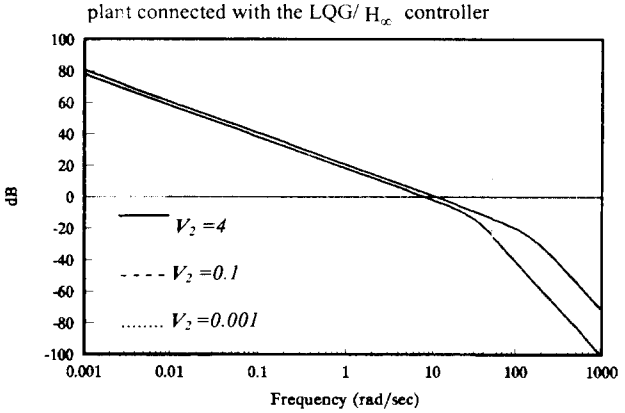

Fig. 3.2 Singular values plot of the loop TFM of nonlinear plant connected with the QLQG/ H_∞ controller

이 결과에서 QLQG/ H_∞ 제어기법은 입력의 크기변동에 덜 민감하고 양호한 성능을 보이고 있어 하드 비선형시스템에 대해 성능-강인성이 뛰어난 방법임을 보이고 있다.

4.결론

선형제어방법인 LQG/ H_∞ 혼합최적제어 방법을 하드비선형 시스템에 대해 하드비선형 요소를 RIDF 기법에 의해 준선형화한

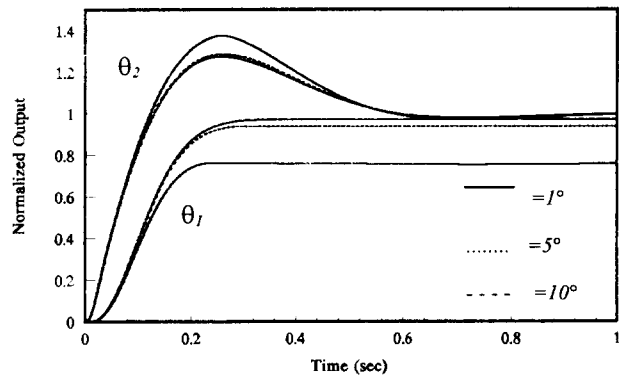

Fig. 3.3 Normalized step responses of the LQG/ H_∞ control system; $[1, 1]^T$ input direction

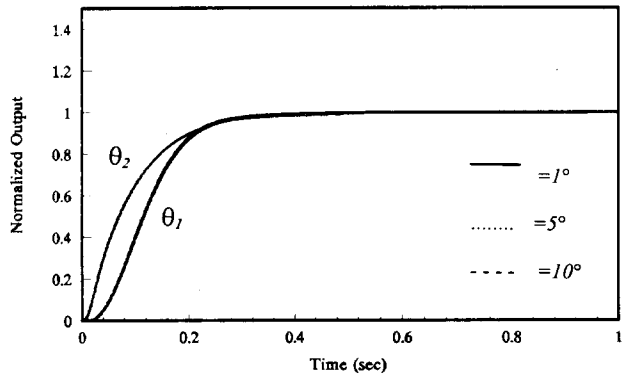

Fig. 3.4 Normalized step responses of the QLQG/ H_∞ control system ; $[1, 1]^T$ input direction

후 최적화한 결과 선형제어기법과는 달리 Riccati 방정식에 수치적으로 풀기 어려운 비선형 보정항을 포함하는 문제가 발생하였다. 그러나 간단한 대수적인 조작을 통해 이러한 보정항을 소거할 수 있으므로 제어기 설계가 쉽게 수행될 수 있음을 보였다. 그리고 최종 비선형 제어기는 IRIDF 기법을 도입하여 합성하였다. 이러한 비선형 제어기 방법인 QLQG/ H_∞ 제어를 쿨롱마찰을 포함하는 로보트 서보시스템에 적용하여 시뮬레이션을 수행한 결과 다변수 하드 비선형시스템에 대한 우수한 제어방법임을 알 수 있다.

5. 참고문헌

[1]Gelb, A. and Vander Velde, W.E., Multipl-Input Describing Function and Nonlinear System Design, McGraw-Hill, 1968.

[2]Beaman, J.J., " Non-linear Quadratic Control," *Int. J. of Control, vol.* 39, no. 2, pp. 343 - 361, 1984.

[3]Kim, J.S., " QLQG/LTR Control for Hard Non-linear Multivariable Systems," *IMechE. J. of Sys. and Contr. Eng.*, vol. 208, pp. 177-197, 1994.

[4]Bernstein, D.S. and Haddad, W.M., " LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach," *IEEE, Trans. A.C.*, vol. 34, no. 8, pp. 831 - 847, 1989.

[5]한성익, " H_∞ 성능구속조건을 갖는 강인한 QLQG 제어," 박사 학위논문, 기계설계공학과, 부산대, 1995.

[6]Suzuki, A. and Hedrick, J.K., " Nonlinear Controller Design by An Inverse Random Input Describing Function Method," *Proc. ACC*, pp. 1236 - 1241, 1985.