

M단계 예측방법을 이용한 혼돈현상 제어

Control of Chaos Using M-step Ahead Prediction

이철목, 권영석, 이균경

경북대학교 전자·전기공학부 (Tel: 950-5546; E-mail: lcm@palgong.kyungpook.ac.kr)

Abstract We develop an efficient technique of controlling chaos using M -step ahead prediction with the OGY method. It has smaller transient time than the OGY method, and prevents burst phenomena that occur in noisy environment. This technique is very simple and needs small memory compared with targeting algorithms. Numerical examples show that the proposed algorithm has good performance, especially in noisy environment.

Keywords Chaos, Control, M -step ahead prediction, OGY method, Targeting

1. 서론

최근 들어 혼돈현상은 많은 학자들에 의하여 연구되어지고 있다. 혼돈현상은 어떤 경우는 바람직한 현상이지만 대부분의 경우는 그러하지 않기 때문에 혼돈현상을 주기적인 것으로 바꾸는 혼돈현상의 제어는 많은 흥미를 끌고 있다[1,2]. Ott, Grebogi, Yorke (OGY) [3]는 접근 가능한 시스템 매개변수에 단순히 작은 시종속적인 변화를 줌으로써 혼돈흡인집합내의 불안정 주기적 궤도(UPO: Unstable Periodic Orbit)를 안정화하였다. 이 방법은 지금까지 다양한 실제 시스템[4,5]에 성공적으로 적용되어지고 있으며 하나의 주기적 궤도에서 다른 주기적 궤도로의 전환(switching)[3,4,6]에도 적용이 가능하다. 반면 혼돈현상을 보이지 않는 시스템용 위와 비슷한 특성을 갖도록 제어하기에는 일반적으로 큰 제어 신호를 필요로 한다. 하지만 OGY 방법은 두 가지의 단점을 가지고 있다. 첫째로 OGY 방법은 혼돈흡인집합내의 한 궤도를 제어가 가능한 영역으로 가져오기 위하여 에르고드적 방랑성(ergodic wandering)에 의존하기 때문에 특정한 불안정 주기적 궤도를 안정화하기 위하여 일반적으로 많은 시간이 요구된다. 둘째로 주변 잡음이 존재하는 경우 잡음에 의하여 궤도가 제어가 가능한 영역을 벗어나게 되어 OGY 방법은 파열현상(burst phenomenon)을 갖게되고 그러한 궤도는 제어가 가능한 영역으로 다시 들어가기까지 혼돈 현상을 보인다. 일반적으로 실제 시스템에서는 잡음의 영향을 피할 수 없으므로 후자는 치명적인 단점이라 할 수 있다.

Barreto 등 [6]은 불안정 주기적 궤도를 원하는 시스템상태의 근처로 가져오기까지 걸리는 과도 시간을 줄이기 위한 나무 타겟팅(tree targeting) 방법을 이용하여 전환(switching) 알고리즘을 제안하였다. 나무 타겟팅 방법에서는 많은 가지를 갖는 나무가 미리 만들어지고 궤도는 그 나무로 인도되어진다. 일단 궤도가 나무의 한 가지 위에 올려지게 되면 궤도는 제어 입력 없이도 원하는 목표점까지 나무를 따라 움직이게 된다. 하지만 이러한 나무 타겟팅 방법은 나무를 만드는데 많은 기억용량이 필요하며 잡음이 존재하는 상황에서 궤도는 미리 만들어진 나무를 따라 움직이지 않고 잡음으로 인해 나무를 떠나게 된다. 따라서 나무 타겟팅 방법은 잡음이 있는 환경

하에서는 부적합하다고 할 수 있다.

본 논문에서는 M 단계 예측방법을 이용하여 과도기 시간을 줄이고 주변 잡음에 강한 알고리즘을 제안한다. 제안한 알고리즘은 미래의 시스템 상태를 여러 개의 매개변수에 대하여 예측한 후 알맞은 매개변수를 선택하는 방법이다. 제안한 알고리즘은 OGY 방법에 기반을 두고 있으므로 먼저 OGY 방법에 대하여 설명한다.

2. OGY 방법

OGY 방법에서 시스템은 다음과 같은 N 차의 비선형 방정식으로 나타난다고 가정한다.

$$\xi_{n+1} = f(\xi_n, p) \quad (1)$$

여기서 p 는 접근 가능한 시스템 매개변수로서 어떤 기준값 p_0 를 중심으로 작은 범위 내에서 변화될 수 있다고 가정하고 그러한 매개변수 변화의 범위는 $|\delta p_n| < \delta p_0$ 로 한정되어진다. 고차의 시스템으로 쉽게 확장이 가능하므로[8,9] 문제를 단순히 하기 위하여 본 논문에서는 2차의 시스템만을 고려하기로 하고 불안정한 주기적 궤도는 흡인집합내의 불안정한 고정점, ξ_F ,으로 가정한다. OGY 방법의 개념은 먼저 궤도가 원하는 불안정한 고정점 근처에 올 때까지 기다려서 다음의 반복(iteration)이 불안정한 고정점의 안정한 집합체(manifold)상에 오도록 매개변수 p 를 변화시키는 것이다. 그렇게 하기 위하여 불안정한 고정점 ξ_F 와 매개변수의 기준값 p_0 근처에서 다음과 같이 f 를 1차 근사화 한다.

$$\delta \xi_{n+1} = A \delta \xi_n + w \delta p_n \quad (2)$$

위의 식에서 $\delta \xi_n = \xi_n - \xi_F$, $\delta p_n = p_n - p_0$ 이며 $A = D_{\xi} f(\xi_F, p_0)$, $w = \frac{\partial f}{\partial p}(\xi_F, p_0)$ 이다. 행렬 A 는 다시 $A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s$ 로 나타내어 질 수 있으며 $e_u(e_s)$ 는 $\lambda_u(\lambda_s)$ 를 고유치로 가지는 시스템의 불안정(안정)한 고유벡터이다. f_u 와 f_s 는 $f_s \cdot e_u = f_u \cdot e_s = 0$ 와 $f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1$

을 만족하는 벡터이다. ξ_{n+1} 이 고정점의 안정한 집합체 상에 오는 조건은 $f_u \cdot \delta \xi_{n+1} = 0$ 으로부터 얻어지며 이로부터 새로운 제어 변수 $p_n = p_0 + \delta p_n$ 에 대한 제어공식이 얻어진다.

$$\delta p_n = - \frac{\lambda_u}{f_u \cdot w} f_u \cdot \delta \xi_n \quad (3)$$

제어는 얻어진 제어변수의 변화량 δp_n 이 허용된 변화범위내 ($|\delta p_n| < \delta p_*$)에 있을 경우에만 행해지며 그렇지 않은 경우 δp_n 은 영(0)이 된다. 즉 제어는 ξ_n 이 제어가능영역 $|\delta \xi_n^u| < \delta \xi_*$ 내에 존재하는 경우에만 인가 된다. 여기서 $\delta \xi_n^u = f_u \cdot \delta \xi_n$ 이고 $\delta \xi_* = \delta p_* | (f_u \cdot w) \lambda_u^{-1} |$ 이다. 그러므로 궤도는 제어가능영역으로 들어오기까지 혼돈 현상을 보이며 그러한 과도기 시간 τ 는 초기조건에 민감하게 영향을 받는다. 평균적인 과도기 시간 $\langle \tau \rangle$ 는 δp_* 가 감소함에 따라 증가하며, 작은 δp_* 에 대하여 지수함수적인 특성을 보인다. 즉 평균적인 과도기 시간은 근사적으로 $\langle \tau \rangle \sim \delta p_*^{-\gamma}$ 이며 여기서 $\gamma = 1 + \frac{1}{2} \ln | \lambda_u | / \ln | \lambda_c |^{-1}$ 이다[3,10]. 일반적으로 δp_* 가 작은 값으로 한정되기 때문에 $\langle \tau \rangle$ 는 매우 큰 값을 갖는다. 잡음의 영향에 대하여 알아보기 위하여 잡음 항인 δ_n 을 방정식(2)의 우변에 첨가하였다. δ_n 은 $\langle \delta_n \rangle = 0$ 이고 $m \neq n$ 에 대하여 $\langle \delta_n \delta_m \rangle = 0$ 인 확률변수이다. $f_u \cdot \delta \xi_{n+1}$ 을 취하면 $\delta \xi_{n+1}^u = \delta_n^u$ 를 얻는다. 여기서 $\delta_n^u = f_u \cdot \delta_n$ 이다. 파열 현상은 $|\delta_n^u| < \delta \xi_*$ 인 경우 발생하며 이는 잡음이 ξ_{n+1} 을 제어영역 밖으로 밀어냄을 의미한다. δp_* 가 작아지거나 또는 잡음의 세기가 커지면 파열현상은 더욱 자주 일어나게 된다.

3. 제안한 알고리즘

위에서 제기된 문제점들을 개선하기 위하여 M 단계 예측방법을 이용한 새로운 알고리즘을 제안한다. 먼저 K 개의 각각 다른 p 값(\hat{p}_i^1)에 대하여 K 개의 상태들을 예측하고 그들을 각각 $\xi_{n+1,n}(i)$ 라고 정의한다. 여기서 $\xi_{n+1,n}(i) = f(\xi_n, \hat{p}_i^1)$, $i = 1, 2, \dots, K$ 이며 매개변수 p 의 변화범위도 위의 OGY 방법에 서와 같이 $|\delta \hat{p}_i^1| \leq \delta p_*$ 로 한정한다. 다음은 각각의 예측된 상태들이 제어가능영역내에 있는지를 확인한다. 만일 제어가능영역내에 예측된 상태가 있다면 그들중 $|\delta \xi_{n+1}^u|$ 을 최소화하는 \hat{p}_i^1 를 p_n 으로 선택한다. 결국 궤도는 제어가능영역내에 있게 되므로 예측 과정은 종결되고 OGY 방법이 시작된다. 즉 p_{n+1} 은 OGY 방법에 의해서 결정된다. 만일 예측된 상태들이 모두 제어가능영역의 외부에 있다면 예측 과정이 더 필요하게 된다. 두 번째 예측된 상태들은 $\xi_{n+2,n}(i, j) = f(\xi_{n+1,n}(i), \hat{p}_j^2)$, $i, j = 1, 2, \dots, K$ 이며 각각에 대하여 제어가능영역내에 있는지 확인한다. 만일 제어가능영역내에 예측된 상태가 있다면 $|\delta \xi_{n+2,n}^u|$ 를 최소화하는

\hat{p}_i^1 과 \hat{p}_j^2 를 각각 p_n 과 p_{n+1} 으로 선택한다. 위의 과정들을 일반화하여 나타내면 다음과 같다. $\hat{p} = \{\hat{p}^1, \hat{p}^2, \dots, \hat{p}^m\}$ 는 m 번째의 예측된 상태가 제어가능영역내에 있는 경우 $|\delta \xi_{n+m}^u|$ 를 최소화하는 매개변수의 집합이다. 이때 $\xi_{n+1} = f(\xi_n, \hat{p}^1)$,

$\xi_{n+2} = f(\xi_{n+1}, \hat{p}^2), \dots, \xi_{n+m} = f(\xi_{n+m-1}, \hat{p}^m)$ 이 된다. ξ_{n+m} 은 제어가능영역내에 있으므로 ξ_{n+m+1} 은 OGY 방법에 의해서 얻어진 p_{n+m} 이 ξ_{n+m} 의 제어입력으로 가해짐으로써 얻어지게 된다. 만일 M 번째 예측 단계까지 제어가능영역내에 들어오는 예측 상태가 없다면 $p_n = p_0$ 로하여 $n+1$ 번째 시간에서 예측과정을 다시 시작한다. 이러한 예측과정은 예측된 상태가 제어가능영역내에 들어올 때까지 되풀이한다. 만일 제어된 궤도가 잡음에 의하여 제어가능영역을 벗어나는 경우에도 예측과정은 다시 시작된다.

제안한 알고리즘은 궤도를 제어가능영역으로 보내는 매개변수를 탐색하기 때문에 OGY 방법에 비하여 과도기시간이 줄어든다. 제안한 알고리즘의 과도기시간은 K 와 M 을 증가시킴으로써 더욱 줄일 수 있지만 반면 필요한 기억용량은 지수함수적으로 늘어난다. 궤도가 주변의 잡음에 의하여 막 제어가능영역을 벗어난 경우 $|\delta_n^u|$ 은 $\delta \xi_*$ 보다 약간 더 큰 값을 가지고 ξ_{n+1} 은 아직 고정점 근처에 머물고 있다고 가정할 수 있다[3]. 비선형 맵 f 는 고정점 부근에서 선형성을 가지므로 제안한 알고리즘을 이용하여 불과 몇 단계 내에 궤도를 제어가능영역으로 보내는 제어변수 p 를 구할 수 있다. 하지만 OGY 방법에서는 궤도가 주변의 잡음에 의하여 제어가능영역을 벗어난 경우 다시 궤도가 제어가능영역으로 들어오기까지 기다려야만 한다. 즉 OGY 방법에서는 파열현상을 피할 수 없다.

4. 모의 실험

제안한 알고리즘의 성능을 확인하기 위하여 Henon map에 제안한 알고리즘을 적용하였다. Henon map은 다음의 2차의 비선형 방정식으로 표현된다.

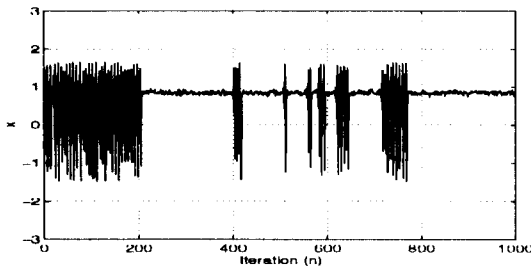
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A - x_n^2 + B y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $B = 0.3$ 으로 정하였다. A 가 기준값인 A_0 를 중심으로 작은 양만큼 변화될 수 있다고 가정하면 $A = A_0 + p_n$ 이라 할 수 있다. 여기서 p_n 은 $p_0 = 0$ 인 제어변수이다. $A_0 = 1.4$ 를 택하면 Henon map은 혼돈현상을 보이고 흡인집합내에 하나의 불안정한 고정점을 가진다. 모의 실험에서는 $K = 3$, $\hat{p}_1^m = -\delta p_*$, $\hat{p}_2^m = 0$, $\hat{p}_3^m = \delta p_*$ 으로 택하였고 $M = 2$ 와 3에 대하여 수행하였다. 제안한 알고리즘의 평균적인 과도기시간에 대하여 알아보기 위하여 혼돈 흡인 집합내의 백 개의 임의로 선택한 초기조건들을 이용하여 컴퓨터 모의 실험을 수행하였다. 과도기 시간은 고정점을 중심으로 반지름이 $\frac{1}{2} \delta \xi_*$ 인 원내에 궤도가 들어오는 시간으로 하였으며 이에 대하여 평균 과도기 시간을 계산하였

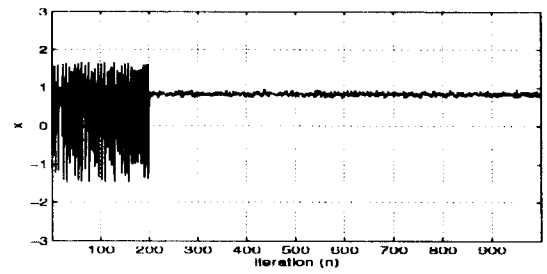
고 그 결과를 표 I에 나타내었다. 표 I에 주어진 바와 같이 작은 K 와 M 에 대하여도 과도기 시간은 상당히 줄어들음을 알 수 있다. 하지만 δp_0 가 매우 작은 경우($\delta p_0 = 0.01$)제한한 알고리즘은 그 다지 큰 성능 향상을 보이지 못하였다. 이유는 δp_0 가 매우 작은 경우 제한한 알고리즘은 매우 좁은 영역만을 탐색할 수 있기 때문이다.

예측오차가 존재하는 경우 제한한 알고리즘의 성능을 알아보기 위하여 변수 B 의 값이 부정확한 상태에서 모의 실험을 수행하였다. 즉 B 의 실제값은 0.3이지만 0.33으로하여 모의 실험을 수행하였다. 모의 실험 결과는 표 II에 나타내었다. 표 II에 보여진 바와 같이 제한한 알고리즘의 과도기 시간은 OGY 방법에 비하여 줄어들었음을 알 수 있다.

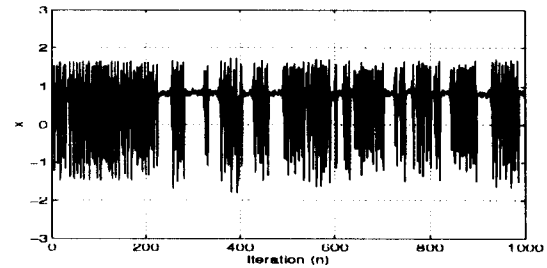
주변 잡음의 영향에 대하여 알아보기 위하여 잡음항인 $\varepsilon\delta_{x_n}$ 과 $\varepsilon\delta_{y_n}$ 을 방정식(4)의 우변에 첨가 하였다. 확률변수인 δ_{x_n} 과 δ_{y_n} 은 서로 독립이며 평균값이 0이고 표준 편차가 1인 정규 확률분포를 갖는다. ε 은 잡음의 세기를 규정하는 매개변수이다. 본 모의 실험에서는 $A_0 = 1.29$, $\delta p_0 = 0.2$ 로 하고 2단계 예측방법을 사용하였으며 변수 B 는 부정확한 값을 사용하였다. 제한한 알고리즘은 임의로 선택한 초기조건을 200번 반복한 후 적용하였다. 두 개의 다른 잡음 레벨에 대한 모의 실험결과로서 x_n 의 시간 데이터를 그림 1에 나타내었다. y_n 은 x_n 과 거의 비슷한 특성을 보이므로 그림 1에는 나타내지 아니하였다. 그림 1의 (a)와 (b)에서 OGY 방법이 사용된 경우 과열현상이 나타나는 반면 제한한 알고리즘이 사용된 경우는 과열현상이 사라졌음을 알 수 있다. 잡음 레벨을 증가시켜 모의 실험을 한 경우의 결과는 그림 1의 (c)와 (d)에 나타내었다. 과열현상이 제한한 알고리즘이 사용된 경우에도 발생하였지만 OGY 방법이 사용된 경우는 계속된 과열현상으로 인하여 제어되지 않은 맵과 같은 특성을 보이고 있다. 변수 B 에 부정확성이 없는 경우 ($B = 0.3$)의 결과는 그림 1과 매우 비슷하였다.



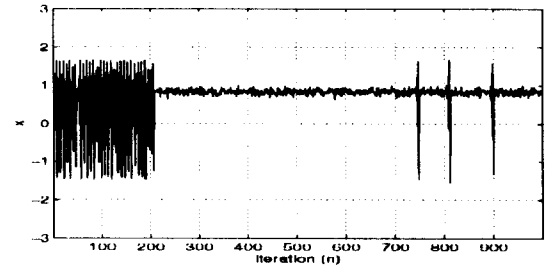
(a) OGY 방법, $\varepsilon = 4.0 \times 10^{-2}$.
(a) OGY method. $\varepsilon = 4.0 \times 10^{-2}$.



(b) 2단계 예측방법, $\varepsilon = 4.0 \times 10^{-2}$.
(b) 2-step ahead prediction method. $\varepsilon = 4.0 \times 10^{-2}$.



(c) OGY 방법, $\varepsilon = 6.0 \times 10^{-2}$.
(c) OGY method. $\varepsilon = 6.0 \times 10^{-2}$.



(d) 2단계 예측방법, $\varepsilon = 6.0 \times 10^{-2}$.
(d) 2-step ahead prediction method. $\varepsilon = 6.0 \times 10^{-2}$.

그림 1. 잡음이 존재하는 환경에서의 제어된 Henon map의 시간 응답 (x_n). 제어는 200번째 반복(iteration)부터 인가됨. $B = 0.33$ (실제값은 0.3).

Fig. 1. Time series x_n of the controlled Henon map in noisy environment. Control is initiated at iteration 200. B is known to be 3.3 but the actual value is 0.3.

표 I. δp_* 의 변화에 대한 각 알고리즘의 평균 과도기 시간.

Table I. Average transient time of each control algorithm for various δp_* .

	$\delta p_* = 0.01$	$\delta p_* = 0.05$	$\delta p_* = 0.1$	$\delta p_* = 0.2$
OGY method	1354.7	247.66	101.97	22.73
2-step ahead prediction method	300.25	26.21	9.12	6.18
3-step ahead prediction method	268.95	18.1	7.89	5.94

표 II. 매개변수에 부정확성이 있는 경우 δp_* 의 변화에 대한 각 알고리즘의 평균 과도기 시간.

Table II. Average transient time of each control algorithm for various δp_* in the case of existing parameter mismatch.

	$\delta p_* = 0.01$	$\delta p_* = 0.05$	$\delta p_* = 0.1$	$\delta p_* = 0.2$
OGY method	5477.02	270.72	138.08	24.17
2-step ahead prediction method	1569.21	198.82	9.50	6.66
3-step ahead prediction method	1480.13	29.68	8.41	6.21

5. 결론

본 논문에서는 기존의 OGY 방법에서의 과도기 시간에 대한 문제점과 타겟팅(targeting) 알고리즘들에서의 기억용량에 관한 문제점을 보완하고 잡음에 대하여 견실한 새로운 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 특정한 불안정 주기적 궤도가 안정화되기 전의 과도기 시간을 줄이고 잡음이 존재하는 환경 하에서 파열현상을 현저히 줄였다. 이 알고리즘은 다른 타겟팅 알고리즘에 비하여 간단하고 적은 기억용량을 필요로 하며 예측오차가 존재하는 경우에도 견실하였다. 그러므로 제안한 알고리즘은 실제의 환경에서 효과적으로 사용될 수 있다.

참고 문헌

[1] M. J. Ogorzalek, "Taming chaos - part I: synchronization, part II: control," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 40, pp. 673-706, 1993.

[2] W. L. Ditto, M. L. Spano, and J. F. Lindner, "Techniques for the control of chaos," *Physica D*, vol. 86, pp. 198-211, 1995.

[3] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 1196-1199, 1990.

[4] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and M. L. Spano, "Experimental control of chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, pp. 3211-3214, 1990.

[5] E. R. Hunt, "Stabilizing high-period orbits in a chaotic system - the diode resonator," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, pp. 1953-1955, 1991.

[6] E. Barreto, E. J. Kostelich, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Efficient switching between controlled unstable periodic

orbits in higher dimensional chaotic systems," *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 4169-4172, 1995.

[7] E. J. Kostelich, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Higher-dimensional targeting," *Phys. Rev. E*, vol. 47, pp. 305-310, 1993.

[8] F. J. Romeiras, C. Grebogi, and W. P. Dayawansa, "Controlling chaotic dynamic systems," *Physica D*, vol. 58, pp. 169-192, 1992.

[9] E. Barreto and C. Grebogi, "Multiparameter control of chaos," *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 3553-3557, 1995.

[10] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Critical exponent of chaotic transient in nonlinear dynamical systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 1284-1287, 1986.

[11] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, "Critical exponents for crisis-induced intermittency," *Phys. rev. A*, vol. 36, pp. 5365-5380, 1987.