

주파수가 선형적으로 변하는 조화 입력에 대한 복소 최소자승오차법의 추종 특성

Tracking Characteristics of the Complex-LMS algorithm
for a Sweeping Frequency Sine-wave Signal

° 배상준*, 박영진**

* 한국과학기술원 기계공학과 (Tel : 042-869-3076; Fax : 042-869-8220 ; E-mail: s_sjpa@cais.kaist.ac.kr)

** 한국과학기술원 기계공학과 (Tel : 042-869-3036; Fax: 042-869-8220 ; E-mail: yjpark@sorak.kaist.ac.kr)

Abstract : The transient behavior of the complex-LMS adaptive filter is studied when the adaptive filter is operating on a fixed or sweeping complex frequency sine-wave signal. The first-order difference equation is derived for the mean weights and its closed form solution is obtained. The transient response is represented as a function of the eigenvectors and eigenvalues of input correlation matrix. The mean-square error of the algorithm is evaluated as well. An optimal convergence parameter and filter length can be determined for sweeping frequency sine-wave signals as a function of frequency change rate and signal and noise powers.

Keywords : complex-LMS algorithm, sweeping complex frequency

1. 서론

자동차의 속도 변화가 크지 않을 경우, 능동 엔진 부밍 소음 저감을 위하여 기존의 LMS 알고리즘을 사용하여 만족할 만한 효과를 얻을 수 있다. 그러나, 속도 변화가 커질 경우, 즉 급가속을 하고 있는 상황에서는 만족할 만한 효과를 얻을 수 없다. 이것은 주로 LMS 방식의 알고리즘 자체의 추종 성능에 기인한다. 본 연구에서는 기존의 LMS 알고리즘의 추종 성능, 특히 시변 (nonstationary) 환경에서의 추종 특성을 파악해 보고자 한다.

시변(Nonstationary) 환경은 크게 두 가지로 구분된다. 첫째가 시스템이 시변인 경우에 시불변(stationary) 입력이 주어지는 경우와 시불변 시스템에 시변(nonstationary) 입력이 주어지는 경우이다. B.Widrow는 백색 기준 입력 신호가 시변 시스템에 주어졌을 때, LMS 알고리즘이 이 시변 시스템을 모사하는 특성을 연구한 바 있다.[4] 또, Neil J.Berchad는 주파수가 변하는 sine 신호가 백색 잡음 중에 섞여 있을 때, LMS 알고리즘으로 구현되는 Adaptive Line Enhancer(ALE)의 신호 분석 특성을 연구하였다.[1] 본 논문에선 앞서 있었던 연구와 관점을 달리해서, 시변(nonstationary) 입력이 시불변 시스템에 가해질 때, LMS 알고리즘의 입력 신호에 대한 추종 특성을 다루었다. 특히, 주파수가 선형적으로 변하는 조화 입력이 일반적인 시불변 시스템에 주어질 때, LMS 알고리즘의 반응 특성을 살펴보았다.

이론적인 접근을 위해 다음과 같은 단계로 분석해 나갔다. 첫 번째로, 엔진의 폭발 진동은 거의 순음에 가까운 형태이기 때문에, 주파수가 변하는 조화 입력에 대한 LMS 적응 필터의 과도 응답을 살펴보았다. 두 번째로, 과도 응답을 입력 상관 행렬(input correlation matrix)의 고유 벡터와 고유 값들의 함수로 구했다. 세 번째로, 평균 자승 오차식을 입력 주파수의 변화율, 샘플링 시간, 플랜트 구조, 수렴 상수, 입력 신호에 섞인 잡음의 파워 등의 함수로 구했다. 이 식을 기초로 하여, 최적 추종 성능을 갖기 위한 샘플링 시간, 적응 필터의 길이 등을 유추할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 입력 신호의 동적 모델링

일반적인 LMS 알고리즘의 오차 신호와 가중치 갱신식은 다음과 같다. [5]

$$\begin{aligned} W(n+1) &= W(n) + \mu[d(n) - X^T(n)W(n) + n_2(nT)]X^*(n) \\ &= W(n) + \mu[d(n)X^*(n) - X^*(n)X^T(n)W(n) + n_2(nT)X^*(n)] \\ e(n) &= d(n) - X(n)^T W(n) + n_2(nT) \\ y(n) &= X(n)^T W(n) \end{aligned} \tag{1}$$

$W(n)$: 필터계수, $d(n)$: 플랜트 출력, $n_2(nT)$: 백색 측정잡음, μ : 공액복소수
 $X(n)$: 입력신호벡터, $e(n)$: 오차신호, μ : 수렴상수, $y(n)$: 필터출력

입력 신호 벡터 $X(n)$ 은 시간에 따라서 통계적으로 독립이고, 현재의 가중치 벡터는 현재의 데이터 벡터와 확률적으로 독립이라고 가정한다. 그러면, (1) 식의 기대치는 다음과 같이 입력 신호의 자기상관 행렬(auto-correlation matrix) $R_{xx}(n)$ 과 입력과 플랜트 출력 신호의 상호상관 벡터(cross-correlation vector) $R_{dx}(n)$ 으로 표현된다.

$$\begin{aligned} E[W(n+1)] &= E[W(n)] + \mu[R_{dx}(n) - R_{xx}(n)E[W(n)]] \\ \text{여기서, } R_{dx}(n) &= E[d(n)X^*(n)] \\ R_{xx}(n) &= E[X^*(n)X^T(n)] \end{aligned} \tag{2}$$

$E[\]$: expectation

입력 신호 $x(n)$ 을 주파수가 변하는 조화 입력이라고 할 때, 다음과 같은 복소 지수 함수로 나타낼 수 있다.[1]

$$\begin{aligned} x(n) &= \sigma_s \exp\left[j(\omega_0 nT + \frac{\dot{\omega}}{2}(nT)^2 + \phi)\right] + n_1(nT) \\ \omega_0 &: \text{신호의 초기 주파수} \\ \dot{\omega} &: \text{신호의 주파수 변화율} \\ \phi &: \text{신호의 랜덤 위상} \\ T &: \text{샘플링 시간} \\ n_1 &: \text{입력신호의 측정 잡음} \end{aligned} \tag{3}$$

식 (2) 에서의 입력 신호의 자기상관 행렬 $R_{xx}(n)$ 을 좀 더 의미 있는 형태로 표현하기 위해, 다음과 같은 벡터 $D(n)$ 을 정의하자.

$$D(n)^T = \begin{bmatrix} e^{j\omega_0 T} e^{j\omega T^2(n+1)} e^{-j\frac{\omega}{2} T^2} & \dots & e^{j\omega_0 T} e^{j\omega T^2(n+1)} e^{-j\frac{\omega}{2} T^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4) 와 같이 $D(n)$ 을 정의하면, $D(n)$ 은 $R_{xx}(n)$ 의 고유 벡터가 됨을 알 수 있다.

식 (3) 과 식 (4) 를 이용하여, 입력 신호의 자기상관 행렬 (auto-correlation matrix)은 다음과 같다.

$$R_{xx}(n) = \sigma_s^2 I + \sigma_d^2 D(n)D(n)^H \quad (5)$$

여기서 H 는 conjugate transpose 를 나타낸다.

모사하고자 하는 플랜트 $P(z^{-1})$ 를 FIR 필터 형태로 표현 가능하다고 가정하고, 다음과 같이 정의 하면,

$$P(z^{-1}) = \sum_{k=0}^L p_k z^{-k}$$

위와 같이 플랜트를 정의하면, 플랜트를 통과한 신호 $d(n)$ 은 다음과 같다.

$$d(n) = \sigma_s \sum_{k=0}^L p_k e^{j\left(\omega_0(n-k)T + \frac{\omega}{2}(n-k)^2 T^2 + \phi\right)}$$

입력 데이터 벡터 $X(n)$ 과 플랜트 출력 $d(n)$ 의 상호상관 행렬(cross-correlation matrix)은 다음과 같다.

$$R_{dx}(n) = \sigma_s^2 a(n)D(n) \quad (6)$$

여기에서,

$$a(n) = \sum_{k=0}^L p_k e^{-j\omega_0 T(k+1)} e^{-j\omega T^2(n+1)(k+1)} e^{j\frac{\omega}{2} T^2(k+1)^2}$$

식 (5) 와 식 (6) 을 식 (2) 에 대입하면, 필터 계수들의 기대치에 관한 차분 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E[W(n+1)] = \left[I - \mu \left(\sigma_{nl}^2 I + \sigma_s^2 D(n)D(n)^H \right) \right] E[W(n)] + \mu \sigma_s^2 a(n)D(n) \quad (7)$$

3.LMS 알고리즘의 평균 수렴 특성

기준 입력 신호의 측정 잡음의 파워가 0 이 아닌 경우, 식 (7) 을 상수 계수의 차분 방정식 형태로 표현하기 위해, $M(n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$M(n) = I + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{nl}^2} D(n)D(n)^H$$

임의의 n 에 대하여 $M(n)$ 의 고유 벡터는 $D(n)$ 과 $(M-1)$ 개 의 $D(n)$ 에 수직인 벡터임을 알 수 있으며, 그 고유값은 다음과 같다.

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{nl}^2} M$$

$$\lambda_i = 1 \quad i = 2, 3, \dots, M$$

그리고, $M(n)$ 은 Hermitian 이므로, 모든 n 에 대하여 (8) 과 같이 $M(n)$ 을 대각 행렬로 만드는 변환 $P(n)$ 이 존재한다.

$$P(n)M(n)P(n)^{-1} = \lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M) \quad (8)$$

식 (4) 에서, 벡터 $D(n)$ 은 다음과 같이 $D(0)$ 와 V^n 으로 표현될 수 있으며,

$$D(n)^T = D(0)^T V^n$$

여기서,

$$D(0)^T = \begin{bmatrix} e^{j\omega_0 T} e^{j\omega T^2} e^{-j\frac{\omega}{2} T^2} & \dots & e^{j\omega_0 T} e^{j\omega T^2} e^{-j\frac{\omega}{2} T^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V^n = \text{diag}(a^n, a^{2n}, \dots, a^{Mn}) \quad , \quad a = \exp\left[j\omega T^2\right]$$

변환 $P(n)$ 은 $M(n)$ 의 고유 벡터들로 표현됨으로, $P(n)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(n)^H = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[D(n), R_1(n), \dots, R_{M-1}(n) \right] \quad (10)$$

여기에서, $R_1(n), R_2(n), \dots, R_{M-1}(n)$ 는 모든 n 에 대하여 $D(n)$ 에 수직하고 상호 수직인 벡터들이다. 그러므로, $R_i(n)$ 도 식 (9) 와 유사하게 표현된다.

$$R_i(n)^T = R_i(0)^T V^n \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

그러므로, 식 (10) 에서

$$P(n) = P(0)(V^*)^n \quad (11)$$

$$\text{여기서, } P(0)^H = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[D(0), R_1(0), \dots, R_{M-1}(0) \right]$$

식 (7) 의 형태를 상수 계수를 갖는 차분 방정식으로 표현하기 위해, 다음과 같이 $E[W(n)]$ 을 $P(n)$ 을 통해 변환시킨 새로운 벡터 $Z(n)$ 을 정의한다.

$$Z(n) = P(n)E[W(n)]$$

식 (7) 식을 $Z(n)$ 으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Z(n+1) &= P(n+1) \left[I - \mu \sigma_{nl}^2 \left(I + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{nl}^2} D(n)D(n)^H \right) \right] E[W(n)] + \mu \sigma_s^2 a(n)P(n+1)D(n) \\ &= P(0)V^* P(0)^{-1} \left[I - \mu \sigma_{nl}^2 P(n)M(n)P(n)^{-1} \right] Z(n) \\ &\quad + \mu \sigma_s^2 a(n)P(0)V^* D(0) \\ &= P(0)V^* P(0)^{-1} \left[I - \mu \sigma_{nl}^2 \lambda \right] Z(n) + \mu \sigma_s^2 a(n)P(0)V^* D(0) \end{aligned} \quad (12)$$

이 때, $P(0) = P_0$, $D(0) = D_0$ 라고 놓고서 위 식을 정리하면 (13) 식과 같이 표현된다.

$$Z(n) = \left[P_0 V^* P_0^{-1} \left\{ I - \mu \sigma_{nl}^2 \lambda \right\} \right]^n Z(0) + \mu \sigma_s^2 \sum_{k=0}^{n-1} C(k) P_0 V^* D_0 \quad (13)$$

$$C(k) = P_k e^{-j\left(\omega_0 T(k+1) + \omega T^2 n(k+1) - \frac{\omega}{2} T^2 (k+1)^2\right)} \sum_{m=1}^n e^{j\omega T^2 (m-1)(k+1)} \left[P_0^* P_0^{-1} \left\{ I - \mu \sigma_{nl}^2 \lambda \right\} \right]^{m-1}$$

3-1. 고정된 주파수의 신호인 경우

식 (3) 의 일반적인 경우를 생각해 보기 전에, $V=I$ 인 고정된 주파수를 갖는 신호의 경우에 대해서 고려해 보기로 한다. 이 때, 식 (13) 은 다음과 같이 표현되고,

$$Z(n) = \left[I - \mu \sigma_{nl}^2 \lambda \right]^n Z(0) + a \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{nl}^2} \lambda^{-1} \left[I - \left(I - \mu \sigma_{nl}^2 \lambda \right) \right]^n \sum_{k=0}^L p_k e^{-j\omega_0 T(k+1)}$$

$$\text{여기서, } S^T = \left[\sqrt{M}, 0, 0, \dots, 0 \right] \quad (14)$$

원래의 좌표계로 역 변환시켜, 필터 계수의 기대치를 구하면, 식 (15) 와 같다.

$$\begin{aligned} E[W(n)] &= \left[I - \mu \left(\sigma_{nl}^2 I + \sigma_s^2 D_0 D_0^H \right) \right]^n E[W(0)] \\ &\quad + \left[\frac{\sigma_s^2}{\sigma_{nl}^2} \left\{ I - \left(I - \mu \left(\sigma_{nl}^2 I + M \sigma_s^2 \right) \right) \right\} \right]^n \sum_{k=0}^L a_k e^{-j\omega_0 T(k+1)} D_0 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15) 에서 볼 수 있듯이, 초기 조건이 0 일 경우, 모든 필터 계수들의 크기는 일정하고, 위상만이 변하게 된다. 이 때

위상의 변화는 벡터 D_0 의 위상의 변화에 주요한 영향을 받는 것을 알 수 있다. 필터 갱신에 있어서, 과거 입력의 영향은 필터 길이에 비례하여 증가한다. 필터 길이가 길어지면, 그만큼 과거의 입력도 상관관계가 충분하다면, 현재의 필터 갱신에 영향을 미치게 된다. 주파수가 변하지 않는 sine 입력에 대해서는, 현재나 과거의 모든 입력 정보들에 대한 상관 관계가 시간에 따라서 변화가 없으므로, 오차를 줄이기 위한 필터 계수의 갱신은 필터가 사용할 수 있는 모든 과거 입력들과 현재의 입력을 동일한 입장에서 사용하여 이루어 진다. 그러므로, 모든 필터 계수들의 크기가 일정하게 된다. 이것은 3-2 절에서 일반적인 경우에 대해 다시 설명키로 한다.

3-2. 일반적인 경우의 필터 계수의 평균 수렴 특성

다음과 같이 $P_0 V^* P_0^{-1} \{I - \mu \sigma_n^2 \lambda\}$ 를 이의 고유 벡터 행렬 Q 와, 고유 값 행렬 Λ 로 표현하면, 식 (16) 과 같이 표현할 수 있다.

$$Z(n) = \left[P_0 V^* P_0^{-1} \{I - \mu \sigma_n^2 \lambda\} \right]^n Z(0) + \mu \sigma_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k e^{-j(\omega_p T(k+1) + \omega T^* n(k+1) - \frac{\omega}{2} T^2(k+1)^2)} \sum_{m=1}^n Q \Lambda_k Q^{-1} P_0 V^* D_0$$

여기서, $\Lambda_k = \text{diag} \{ \Lambda_1 e^{j\omega T^2(k+1)}, \Lambda_2 e^{j\omega T^2(k+1)}, \dots, \Lambda_n e^{j\omega T^2(k+1)} \}$

$$\sum_{m=1}^n Q \Lambda_k Q^{-1} = \left[I - e^{j\omega T^2(k+1)} P_0 V^* P_0^{-1} \{I - \mu \sigma_n^2 \lambda\} \right]^{-1} \left[I - e^{j\omega T^2(k+1)} P_0 V^* P_0^{-1} \{I - \mu \sigma_n^2 \lambda\} \right]^n$$

(16)

필터 계수의 기대 값을 얻기 위해, 변화된 벡터를 원래의 필터 계수 벡터로 역 변환시키면 (17)식과 같다.

$$E[W(n)] = P(n)^{-1} Z(n) = V^n P_0^{-1} Z(n) = V^n \{V^* G\}^n E[W(0)] + \mu \sigma_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k e^{-j(\omega_p T(k+1) + \omega T^* n(k+1) - \frac{\omega}{2} T^2(k+1)^2)} Q(k)$$

(17)

여기서,

$$Q(k) = V^n \left\{ I - e^{j\omega T^2(k+1)n} (V^* G)^n \right\} \left(V - e^{j\omega T^2(k+1)} G \right)^{-1} D_0$$

$$= \frac{V^n \left\{ I - e^{j\omega T^2(k+1)n} (V^* G)^n \right\} \left[V - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right]^{-1} D_0}{I + \mu \sigma_n^2 e^{j\omega T^2(k+1)} D_0^H \left[V - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right]^{-1} D_0}$$

$$= \frac{\left\{ I - e^{j\omega T^2(k+1)n} V^n (V^* G)^n (V^*)^n \right\} \left[V - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right]^{-1} D(n)}{I + \mu \sigma_n^2 e^{j\omega T^2(k+1)} \sum_{m=1}^n \left\{ e^{j\omega m T^2} - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right\}^{-1}}$$

$$G = I - \mu \sigma_n^2 \left(I + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_{n1}^2} D_0 D_0^H \right)$$

식 (2-19) 에서, 초기 조건의 영향을 제외한 필터 계수들의 움직임을 살펴보기 위해, $E[W(0)]=0$ 으로 놓는다. 이 때, $E[W(n)]$ 은 다음과 같은 항들의 곱으로 이루어져 있음을 알 수 있다.

- 1) $D(n)$: 입력신호의 자기상관 행렬
- 2) $\left\{ I - e^{j\omega T^2(k+1)n} (V^* G)^n \right\}$: 과도 응답 행렬
- 3) $\frac{P_k e^{-j(\omega_p T(k+1) + \omega T^* n(k+1) - \frac{\omega}{2} T^2(k+1)^2)}}{I + \mu \sigma_n^2 e^{j\omega T^2(k+1)} \sum_{m=1}^n \left\{ e^{j\omega m T^2} - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right\}^{-1}}$
: 크기인자 (scale factor)

4) $\left[V - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right]^{-1}$

식 (17) 으로 부터, $E[W(n)]$ 의 원소들의 위상은 $D(n)$ 의 원소들의 위상을 중심으로 변화하고, 원소들 사이의 크기의 차이는 $\left[V - e^{j\omega T^2(k+1)} (I - \mu \sigma_n^2 \lambda) \right]^{-1}$ 의 영향을 받는 것을 알 수 있다. 즉, $E[W(n)]$ 의 위상은 가중치 수와 선형적인 경향을 보이고, 계수

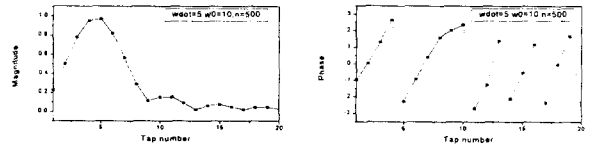
들은 뒷쪽에 있는 계수들의 크기가 앞쪽에 있는 계수들의 크기보다 작아 지는 경향을 보인다. 또한 계수들의 감소율은 주파수 변화율이 커지면, 증가한다. 다시 말해, 주파수 변화율이 커질수록, 필터의 뒷쪽에 크기가 작은 값들이 더 많이 생기게 된다. 이러한 필터 내의 움직임은 다음의 모의 실험을 통해서도 볼 수 있다.

3-3. 모의 실험

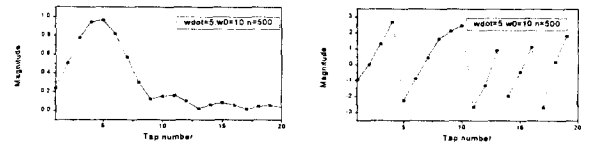
유도된 식을 검증해 보기 위해서, (17) 식을 통하여 여러 경우의 주파수 변화율에 대한 필터 계수들의 기대치와 실제로 LMS 알고리즘을 수행한 후 얻은 필터 계수들과 비교하였다. 모의 실험에서, 플랜트는 다음과 같이 정의하였다.

$$P(z^{-1}) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6} + z^{-7}$$

필터 길이 $M=20$, 주파수 변화율 $\dot{\omega}=1, 3, 5$ 로 하고, 5 초 동안 필터를 갱신한 후에 얻은 결과와 (15) 식을 계산한 결과는 Fig.1-3 과 같다.

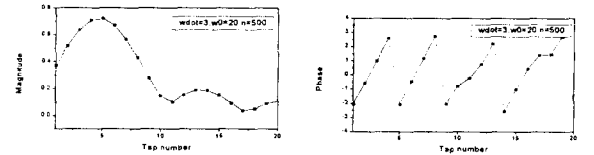


(a) (15) 식을 통해서 계산된 값

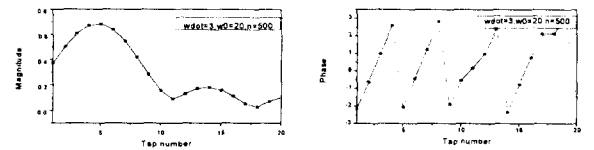


(b) 실제 알고리즘을 통해서 얻어진 값

Fig.1 $\dot{\omega}=5$ 일 때, LMS 알고리즘의 적응 계수

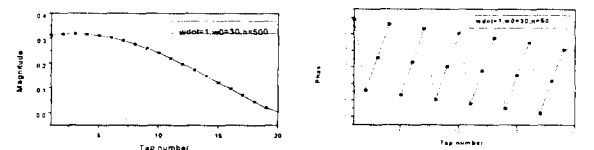


(a) (15) 식을 통해서 계산된 값

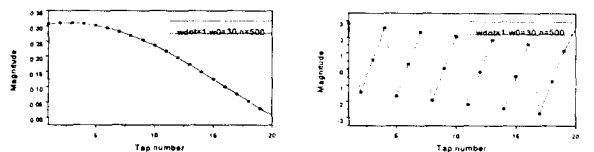


(b) 실제 알고리즘을 통해서 얻어진 값

Fig.2 $\dot{\omega}=3$ 일 때, LMS 알고리즘의 적응 계수



(a) (15) 식을 통해서 계산된 값



(b) 실제 알고리즘을 통해서 얻어진 값

Fig.3 $\dot{\omega}=1$ 일 때, LMS 알고리즘의 적응 계수

Fig.1-3 에서 볼 수 있듯이, 수식적으로 구한 결과와 알고리즘 시행 후 얻은 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (17) 이 필터 계수의 천이 현상을 정확하게 표현한다고 볼 수 있다. 그림에서 완전하게 일치하지 않는 것은, 실제 알고리즘 수행에는 측정 잡음이 섞여 있기 때문이다. Fig.1-3 에선 특이한 두 가지 현상을 볼 수 있다. 첫째로, 필터 계수의 위상들이 가중치 수에 따라서 선형적인 경향을 보인다. 둘째로, ω 이 증가할수록, 적응 필터의 뒷쪽에 있는 필터 계수들의 크기가 작아지므로, 점점 더 많은 뒷쪽의 필터 계수들이 필터 출력에 상대적으로 적은 기여를 한다. 즉 필터 모양은 다음과 같은 형태를 갖게 되고, 주파수 변화율이 커질수록 l 은 작아지게 된다.

$$\begin{aligned}
 W(n) &= [w_1, w_2, \dots, w_M] \\
 &= [w_1, \dots, w_l, 0, \dots, 0] + [0, \dots, 0, w_{l+1}, \dots, w_M] \\
 &\approx [w_1, \dots, w_l, 0, \dots, 0] \\
 &= [w_1, \dots, w_l]
 \end{aligned}$$

여기서, $|w_l| \gg |w_k| \quad l \leq i \leq l, l+1 \leq k \leq M$

4. 평균자승오차

4.1. 평균 자승 오차식의 유도

오차 신호를 출력 신호와 필터 출력 신호의 차로 정의하면, 평균 자승 오차는 (16) 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 e(n) &= d(n) - W(n)^T X(n) + n_2(nT) \\
 E[e(n)^2] &= E\left\{ \left(d(n) - W(n)^T X(n) + n_2(nT) \right) \left(d(n) - W(n)^T X(n) + n_2(nT) \right)^* \right\} \\
 &\approx \sigma_{n_2}^2 + \sigma_{n_1}^2 E[W(n)]^H E[W(n)] + \sigma_a^2 \left(a(n) - D(n) \right)^H E[W(n)]^2
 \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 살펴보면, 평균 자승 오차를 유발하는 항은 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째 항은, 출력 측정 잡음의 파워와 평균 필터 계수를 통과한 입력 측정 잡음의 파워의 합이다. 두 번째 항은 플랜트를 통과한 신호를 추종할 때 발생한 오차에 의한 항이다. 이 항은 모사하려는 플랜트의 모양에 따라서 변하게 된다. 이 항들은 3-2 에서 언급했던 필터 계수들의 크기 특성에 의해, 필터 길이가 길어져도 주파수 변화율이 변하지 않으면, 크게 변하지 않음을 알 수 있다.

4.2. 모의 실험

다양한 필터 길이에 대한 자승 오차의 변화를 구해 보았다. 모의 실험 조건은 3-2 절과 동일하다. 필터 길이를 $M=50, 20, 5$ 로 변화시키면서, 오차의 변화를 살펴보면, Fig.3 과 같다.

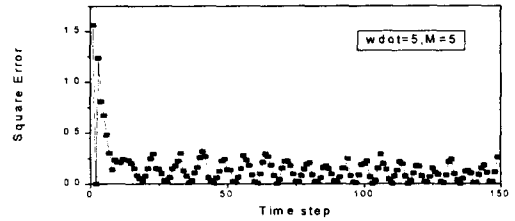
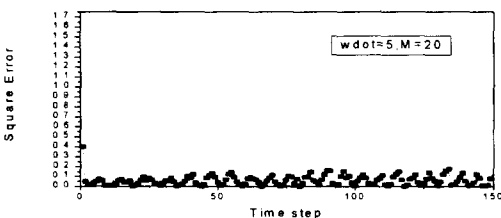
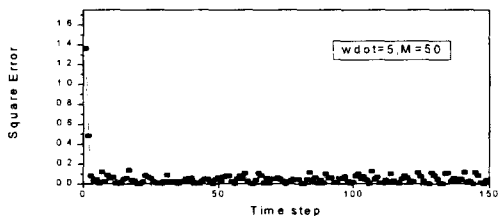


Fig.4 $M=50, 20, 5$ 일 때의 자승 오차

Fig.4 에서 필터의 길이가 50, 20 일 경우 필터의 길이에 상관없이, 비슷한 성능을 내는 것을 볼 수 있다. 따라서, 필터의 길이를 늘려도, 늘려 준 필터 계수들이 전부 필터 출력에 기여를 하지 못한다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 어느 정도 주파수 변화율이 커지면, 시불변 입력의 경우와는 달리, 필터 길이를 늘려서 오차를 줄일 수 없음을 알 수 있다.

5. 결론

주파수가 변하는 입력에 대해서, 필터 계수들의 기대치와 평균 자승 오차식을 완전한 형태로 유도하였다. 유도된 식으로부터 다음과 같은 사실을 알아낼 수 있다. 주파수 변화율이 증가할수록, LMS 알고리즘은 필터 내에서, 더 많은 뒷쪽의 적응 계수의 크기를 앞쪽의 적응 계수의 크기보다 상대적으로 작게 만들어, 뒤쪽에 위치한 필터 계수들이 필터 출력에 영향을 미치지 못하게 한다. 이것은 주파수 변화율이 커져서, 과거 입력과 현재입력의 상관관계가 떨어지게 되면, 오차를 줄이기 위해서는 과거의 입력보다는 현재와 현재에 가까운 입력에 더 큰 비중을 두어야 하기 때문이다. LMS 알고리즘은 실질적인 필터 길이를 조절함으로써 상관관계가 큰 현재와 현재에 가까운 과거의 값을 가지고, 적응 계수들이 오차를 줄이는 방향으로 적응될 수 있도록 한다. 주파수 변화율에 의해 실질적인 필터의 길이가 결정되므로, 동일한 주파수 변화율에 대해 필터 길이의 증가는 큰 의미를 갖지 않는다.

6. 참고문헌

- [1].Neil J.Bershad , Paul L. Feintuch , Francis A. Reed , Benjamin Fisher , 1980 " Tracking Characteristics of the LMS Adaptive Line Enhancer Response to a Linear Chirp Signal in Noise. " *IEEE Transactions on Acoustics , Speech , and Signal Processing*, vol. Assp-28 , pp.504-516
- [2].Simon Haykin , " *Adaptive Filter Theory* " , Prentice-Hall
- [3].B.Widrow, and Steams , S.D. , 1985 , " *Adaptive Signal Processing* " , Prentice Hall.
- [4].B.Widrow , et.al. , 1976 , " Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter " , *Proceedings , IEEE* , vol. 64 , pp.1151- 1162
- [5].B.Widrow , J.McCool , and M.Ball , " The Complex LMS algorithm " , *Proceedings.IEEE* , pp.719-720 , April.1975