Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

자이로 랜덤 프로세스의 분석

An Analysis of the Gyro Random Process

° 고영웅*, 김경주*, 손승현**, 이재철**, 권태무**

*원광대학교 전자공학과 (Tel: 50-6713; Fax:50-6713; E-mail: frog@electro.wonkwang.ac.kr)
**고등기술 연구원(Tel: 0335-30-7301; Fax:30-7319; E-mail: shson@iae.re.kr)

Abstracts Random drift rate (i.e., random drift in angle rate) of a gyro represents the major error source of inertial navigation systems that are required to operate over long time intervals. It is uncorrectable and leads to an increase in the error with the passage of time. In this paper a technique is presented for analyzing random process from experimental data and the results are presented. The problem of estimating the a priori statistics of a random process is considered using time averages of experimental data. Time averages are calculated and used in the optimal data-processing techniques to determine the statistics of the random process. Therefore the contribution each component to the gyro drift process can be quantitatively measured by its statistics. The above techniques will be applied to actual gyro drift rate data with satisfactory results.

Keywords Random, Drift rate, Time average

1. 서론

랜덤 드리프트 레이트(random drift rate)는 장시간 동작하는 관성항법시스템(inertial navigatin system)에서 발생하는 주된 오차중의 하나이다. 이에 대한 특성을 알아내는 것은 시스템 레블(system level)이나 센서레블(sensor level)에서 이루어지는 캘리브레이션(calibration)과정에서 중요하며 이는 참고문헌[1,2,3]에서도 나타나 있다.

본 논문에서는 자이로의 드리프트 레이트를 정의하고 그것의 성분을 각각 제시한 후 이에 대한 확률 특성을 시평균(time average)을 이용하여 분석한다. 그리고 드리프트 레이트의 특성을 샘플링 시간(sampling time)에 따라 살펴본 후, 실제 데이터을 이용하여 그 적용예를 보이고자 한다.

2. Theory

2.1 드리프트 레이트의 정의

매우 작은 범위의 레이트(rate)가 입력될때 자이로에서 출력되는 각(angle)을 드리프트(drift, [degree])라 하고 식(1)과 같이 나타내자.

$$\theta(t) = \int_0^t \Omega \, dt \tag{1}$$

여기서, θ는 출력되는 드리프트[degree]이며 Ω는 입력되는 레이트[deg/hr]이다.

식(1)의 시간 변화율 즉 드리프트의 시간 변화율을 드리프트 레이트[deg/hr]라 하고 식(2)와 같이 정의하자.

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) \tag{2}$$

2.2 드리프트 레이트의 성분 분류

본 논문에서는 자이로 출력에 적합한 수학적 모델을 세가지, 즉 각 양자화 잡음(angle quantization noise), 백색 잡음 드리프트 레이트(white noise drift rate) 그리고 랜덤 워크 드리프트 레이트(random walk drift rate)로서 가정한다.

먼저 각 양자화 잡음의 확률 특성은 식(4)와 같다.

$$\delta\theta(t) \sim UID\left(0, \frac{Q^2}{12}\right) \tag{4}$$

여기서, UID는 Uniformly Independent Distribution이다. 그리고, Q[arc sec]는 양자화 레블(quantization level)이다.

두 번째로 백색 잡음 드리프트 레이트의 확률 특성은 다음과 같다. $\varepsilon(t)$를 식(5)와 같은 자기상관 함수(autocorrelation function)를 갖는 영-평균(zero-mean) 백색 잡음 프로세스라 하자.

$$E[\varepsilon(u)\varepsilon(v)] = W^2\delta(u-v) \tag{5}$$

여기서, δ는 임펄스 함수이며 W[deg/hr$^{1/2}$]는 스펙트럼 밀도(spectrum density)이다.

세 번째로 랜덤 워크 드리프트 레이트는 식(6)과 같이 그것의 도함수(time derivative)가 백색 잡음 프로세스(white noise process)인 드리프트 레이트로서 나타내자.

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau w(u)\, du \tag{6}$$

여기서, w는 백색 잡음 프로세스이며 이에 대한 확률 특성은 식(7)과 같다.

$$E[w(u)w(v)] = R^2\delta(u-v) \tag{7}$$

여기서, R[deg/hr$^{3/2}$]은 스펙트럼 밀도 이며 δ는 임펄스 함수이다.

따라서, 랜덤 워크 드리프트 레이트의 확률 특성은 식(8)과 같다.

$$E[\gamma(\tau)\gamma(x)] = R^2 \min(t\ ,\ x) \qquad (8)$$

여기서, min 함수의 특성은 식(9)와 같다.

$$\min(\tau, x) = \begin{cases} \tau, & (x > \tau) \\ x, & (\tau < x) \end{cases} \qquad (9)$$

이상으로 세가지의 자이로 출력에 대한 확률적 특성을 가정하였다.

2.3 Prefiltering

계측기나 시스템으로 부터 일련의 데이터를 얻는 과정에서 포함되는 short-term noise는 계측되는 장치에서 본래적으로 발생할 수 도 있으며 또는 데이터를 얻는 과정에서의 부정확 때문에 발생할 수 도 있다. 이 잡음의 영향을 제거하기 위해서는 일정 구간에서 시평균하는 것이 필수적이다.

따라서, 구간[t, t+ΔT]에서 자이로 드리프트 레이트의 시평균을 식(10)과 같이 나타내자.

$$\overline{\varepsilon_i} = \frac{1}{T}\int_t^{t+\Delta T} \varepsilon(\tau)\ d\tau \qquad (10)$$

여기서, $\overline{\varepsilon_i}$는 구간[t, t+ΔT]에서의 자이로 드리프트 레이트의 시평균이다.

구간[t+ΔT, t+2ΔT]에서 자이로 드리프트 레이트의 시평균을 식(11)과 같이 나타내자.

$$\overline{\varepsilon_{i+1}} = \frac{1}{T}\int_{t+\Delta T}^{t+2\Delta T} \varepsilon(\tau)\ d\tau \qquad (11)$$

여기서, $\overline{\varepsilon_{i+1}}$는 구간[t+$\Delta$T, t+2$\Delta$T]에서의 자이로 드리프트 레이트의 시평균이다.

마지막으로 식(10)과 식(11)로 부터 식(12)와 같이 2차 평균(second averaging)을 구한다.

$$\Delta\varepsilon_i = \overline{\varepsilon_{i+1}} - \overline{\varepsilon_i} \qquad (12)$$

식(12)의 과정으로부터 데이터에 포함되어 있는 상수성분이 자동으로 제거 된다.

이제 식(12)의 분산(variance)은 식(13)과 같다.

$$\sigma_{\Delta\varepsilon}^{\ 2} = E[\ \Delta\varepsilon_i^{\ 2}] \qquad (13)$$

여기서, 자이로 드리프트 레이트 ε(t)는 영-평균(zero-mean) 프로세스라 가정한다.

식(13)을 이용하여 각 양자화 잡음, 백색 잡음 드리프트 레이트 그리고 랜덤 워크 드리프트 레이트에 대한 분산을 구하여 보면 식(14)와 같다.

$$\sigma^2 = \frac{Q^2}{2T^2} + \frac{2W^2}{T} + \frac{2}{3}R^2 T \qquad (14)$$

여기서, 세가지 랜덤 프로세스는 서로 비상관(uncorrelated) 되었다 가정한다.

증명 : 증명은 부록을 참조한다.

3. Application

자이로 드리프트 레이트의 확률적 특성을 분석하기 위한 방법은 참고문헌[4,5]에 나타나 있다. 그러나, 이 기법들은 ARMA(autoregressive moving average)을 이용하여 자이로 드리프트 레이트를 확률적으로 모델링하였으나 그 절차가 복잡하다.

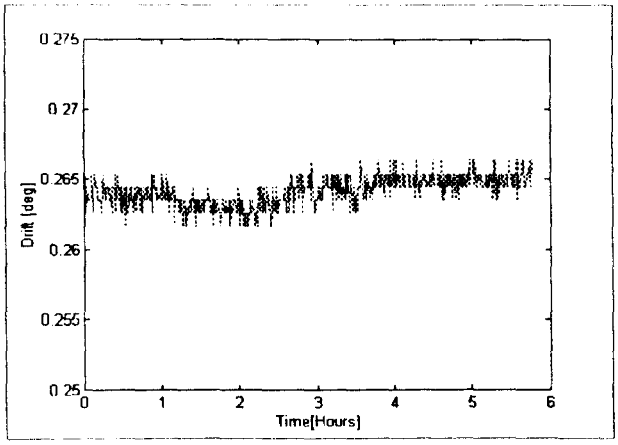

그림 1 자이로 드리프트

Fig. 1. Gyro drift[degree]

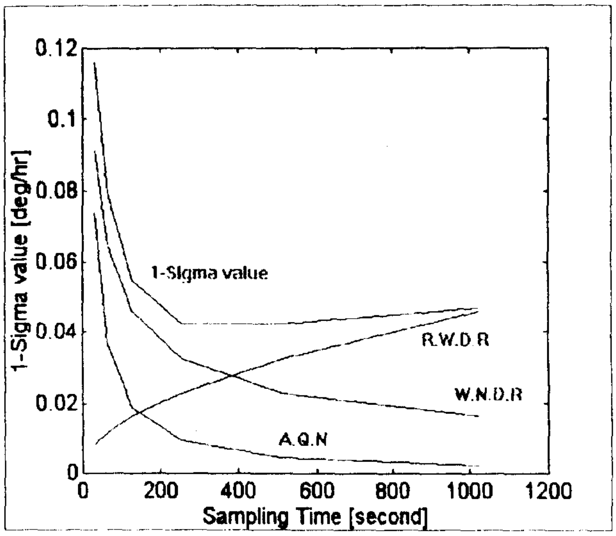

그림 2. 자이로 드리프트 레이트의 1-σ값

Fig. 2. 1-σ value of gyro drift rate

본 논문에서는 중급 자이로에서 얻은 그림 1의 데이터를 이용하여 식(14)의 확률특성을 살펴보았다.

위의 그림 2는 실제 데이터, 그림 1에 식(13)을 이용하여 분산값을 구한 후 그 1-σ(1-sigma)값을 샘플링 시간, T에 따라서 나타낸 것이다. 그림 2에서 A.Q.N는 각 양자화 잡음의 1-σ값을 나타내며 W.N.D.R는 백색 잡음 드리프트 레이트의 1-σ값을, R.W.D.R는 랜덤 워크 드리프트 레이트의 1-σ값을 나타낸다.

그림 2의 각각의 드리프트 레이트에 대한 곡선은 식(14)로 부터 최소 자승법(least squares)을 이용하여 각각의 드리프트 레이트에 대한 스펙트럼 밀도를 추정하여 샘플링 시간의 함수로서 나타낸 것이다. 추정된 스펙트럼 밀도는 다음과 같다. 각 양자화 잡음의 Q[are sec]는 약 3.3 [arc sec]이며 백색 잡음 드리프트 레이트의 W[deg/hr$^{1/2}$]는 약 6×10^{-3}[deg/hr$^{1/2}$], 랜덤 워크 드리프트 레이트의 R[deg/hr$^{3/2}$]는 약 0.1 [deg/hr$^{3/2}$]이다.

우선 식(14)로 부터 본 다면 각 양자화 잡음 성분은 샘플링 시간, T의 제곱에 반비례하며 백색 잡음 드리프트 레이트 성분은 샘플링 시간, T에 반비례하고 랜덤 워크 드리프트 레이트 성분은 샘플링 시간, T에 비례하는 특성을 나타내고 있으며 그

림 2로 부터 이를 확인할 수 있다.

그림 2로 부터 살펴볼 때 약 400 초까지의 샘플링 시간 까지는 각 양자화 잡음과 랜덤 워크 드리프트 레이트에 비하여 백색 잡음 드리프트 레이트의 특성이 전체적인 드리프트 레이트의 특성을 지배하고 있으며 샘플링 시간 400초 이상에서는 랜덤 워크 드리프트 레이트의 성분이 다른 두 성분보다 우세함을 알 수 있다.

4. 결론

지금까지 중급 자이로에서 얻은 데이터를 이용하여 자이로 랜덤 프로세스를 분석하여 보았다.

우선 자이로 드리프트와 레이트를 정의하였다. 그리고, 현재 자이로 드리프트 레이트의 확률적 모델을 각 양자화 잡음, 백색 잡음 드리프트 레이트 그리고 랜덤 워크 드리프트 레이트로서 가정을 한 후에 시평균을 이용하여 각각의 분산값을 구하였으며 이를 실제 데이터에 적용함으로서 그 가능성을 검증하여 보았다.

전체적인 드리프트 레이트의 $1-\sigma$값은 위의 세가지 성분에 의해서 이루어짐을 확인하였고 샘플링 시간이 증가함에 따라 랜덤 워크 드리프트 레이트의 특성이 우세해지는 반면에 샘플링 시간이 감소할수록 각 양자화 잡음 및 백색 잡음 드리프트 레이트의 특성이 우세해짐을 확인 하였다.

본 논문에서는 자이로 드리프트 레이트를 영-평균 정상 랜덤 프로세스(zero-mean stationary random process)로서 가정하였으며 분석한 결과로 부터 이 가정이 적절하였음을 알 수 있으며 앞으로의 자이로 랜덤 프로세스의 분석에 있어서 도움을 줄 수 있으리라 예상한다.

부록

식(14)에 대한 증명은 다음과 같다. 우선 각각의 랜덤 프로세스가 비상관되었다고 가정하였으므로 식(14)을 구성하는 분산을 각각 구할 수 있다. 따라서, 백색 잡음 드리프트 레이트에 대해서만 증명한다.

식(13)에 식(10)과 식(11)을 대입하면 식(15)와 같다.

$$\sigma_{\varepsilon w}^2 = E\left[\left\{\frac{1}{T}\int_{t+\Delta T}^{t+2\Delta T} \varepsilon(\tau)\, d\tau - \frac{1}{T}\int_{t}^{t+\Delta T} \varepsilon(\tau)\, d\tau\right\}^2\right] \tag{15}$$

식(15)에서의 자승하는 과정을 한 후 적분기호안의 변수에 대한 기대값(expected value)을 취하면 식(16)과 같다.

$$\sigma_{\varepsilon w}^2 = \frac{1}{T^2}\left[\int_{t+\Delta T}^{t+2\Delta T}\int_{t+\Delta T}^{t+2\Delta T} E[\varepsilon(u)\varepsilon(v)]\, dudv + \int_{t}^{t+\Delta T}\int_{t}^{t+\Delta T} E[\varepsilon(u)\varepsilon(v)]\, dudv\right] \tag{16}$$

여기서 식(15)의 자승하는 과정에서 발생하는 상호곱항(cross- product)은 백색 잡음 드리프트 레이트의 특성으로 인하여 영(zero)이 된다.

식(15)에 식(5)을 대입하고 적분 변수를 변화하면 그 결과는 식(17)과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon w}^2 &= \frac{1}{T^2}\int_0^{\Delta T}\int_0^{\Delta T} W^2\delta(u-v)\, dudv \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^{\Delta T} W^2 dudv \\ &= \frac{2W^2}{T}\end{aligned} \tag{17}$$

식(17)로 부터 백색 잡음 드리프트 레이트의 분산값은 샘플링 시간에 반비례함을 알 수 있다.

각 양자화 잡음 및 랜덤 워크 드리프트 레이트의 분산값도 위의 과정에 따라 구할 수 있다.

Acknowledgment

이 논문을 작성하는데 있어서 도움을 주신 대우고등기술연구원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

[1] S. C. Grag, L. D. Morrow, R. Mamen, "Strapdown Navigation Technology : A Literature Survey", *AIAA Guidance and Cotrol Conference*, Hollywood, Aug. 8-10, 1977.

[2] P.B.Reddy, "Laser Gyro Strapdown System Alignment/Calibration and Land Navigation Using Kalman Filters", *IEEE Symposium*, Calf. 1980. pp. 92 - 99.

[3] "IEEE Specification Format Guide and Test Procedure for Two-Degree-of-Freedom Dynamically Tuned Gyros", *ANSI/IEEE*, Std 813-1988

[4] R.G.Brown, R.J.Dierendonck, "Modeling Nonstationary Random Processes with an Application to Gyro Drift Rate", *IEEE*, VOL. AES-5, No. 3. pp.423 -428.

[5] S. M. Pandit, W. Zhang, "Modeling Random Gyro Drift Rate by Data Dependent Systems." *IEEE*. Vol. AES-22, No.4 pp.455 -459.

[6] R.G.Brown & Patrick.Y.C.Hwang, "*Introduction to random signal and appied kalman filtering*", Jone wiley & Sons, 1983.

[7] Peyton Z. & Peebles, Jr. "*Probability, Random Variables, & Random signal principles.* ", McGraw-Hill. 1987.