

## 6 자유도 병렬형 매니플레이터의 작업공간결정을 위한 기하학적 접근

### Geometrical Approach for the Workspace of a 6-DOF Parallel Manipulator

°김도익\*, 정완균\*\*, 염영일\*\*\*

\*포항공과대학교 기계공학과 대학원생

\*\*포항공과대학교 기계공학과 부교수, ARC

\*\*\*포항공과대학교 기계공학과 교수

(TEL: 0562-279-2844; Fax: 0562-279-5899; E-mail: wkchung@vision.postech.ac.kr)

**Abstracts** In this paper, a fully geometrical method for the determination of the workspace of a 6-DOF parallel manipulator is presented using the concept of 4-bar linkage. The reachable and dexterous workspace can be determined from the proposed algorithm. In order to evaluate the workspace, each leg is considered as an open chain, and two kinematic constraints are developed. The proposed method is verified by simulation.

**Keywords** Reachable Workspace, Dexterous Workspace, 6-DOF Parallel Manipulator, Geometrical Approach

#### 1 서론

병렬형 매니플레이터(parallel manipulator)의 가장 큰 단점 중 하나는 작업공간(workspace)이 매우 작다는 것이다. 따라서 경쟁력을 갖기 위해서는 작업공간이 최대화되어야 한다. 그러나, 병렬형 매니플레이터의 페루프 구조로 인해 작업공간을 결정하기 위한 일반적인 접근방법을 구하기가 매우 어렵다.

Yang과 Lee[6]는 볼 조인트(ball-and-socket joint)와 다리의 한계범위를 이용하여 작업공간을 구하였다. 이는 각 설계값들의 한계내에서 그 값들을 변화시켜가며 결과를 얻는 방법이다. Gosselin과 Angeles[1]는 평면 3자유도 병렬형 매니플레이터의 기구학과 작업공간을 연구하였다. 모든 오리엔테이션에서 사라지지 않는 작업공간의 존재 조건을 구하고 전체 작업공간을 최대화하였다. Pennock과 Kassner[5]는 일반적인 형태의 평면 3자유도 매니플레이터에 대한 작업공간을 연구하였다. 매니플레이터를 세계의 레볼루트(revolute) 조인트로 이루어진 직렬형 링크 세계가 연결된 것으로 모델링하여 리처블 작업공간(reachable workspace)과 텍스트러스 작업공간(dexterous workspace)을 구하였다.

Gosselin[2]은 6자유도 병렬형 매니플레이터의 위치 작업공간을 구하기 위해 기하학적인 방법을 사용하였다. 여기서 구한 작업공간은 위치 작업공간으로 미리 주어진 오리엔테이션에 따른 작업공간을 말한다. 이에 상응하게 Merlet[4]은 오리엔테이션 작업공간을 구하였다. 이는 주어진 위치에서 끝단(end-effector)이 가질 수 있는 오리엔테이션을 단위 원 위에 표시하는 방법이다. 그러나, 이 두 방법은 리처블 작업공간과 텍스트러스 작업공간에 대한 어떠한 정보도 주지 않는다.

이 논문에서는 리처블 작업공간과 텍스트러스 작업공간을 결정할 수 있는 조건을 제시한다. 2절에서는 기구학적 조건들을 유도하고, 이를 이용하여 각 작업공간을 구할 수 있는 조건들을 제시한다. 3절에서는 각 리처블 작업공간과 텍스트러스 작업공간을 구하기 위한 알고리즘을 소개한다. 그리고 4절에서는 그 결과를 예를 들어 보이고 검증하도록 한다.

#### 2 기하학적 설명

##### 2.1 기호 표시

6자유도 병렬형 매니플레이터는 6개의 다리와 베이스 그리고 동작 플랫폼으로 구성된다. 6자유도 매니플레이터에서 직접 그 관계식을 유도하기는 매우 어렵다. 이해를 돕고 쉬운

유도를 위해, 조절할 수 있는 링크를 가진 4-bar 매카니즘을 고려하였다.  $q_i$ 는  $B_i$ 점에서  $P_i$ 점을 연결하는 다리 벡터이다.  $P$ 점은 커플러(혹은 동작 플랫폼)에 위치한 참조점(reference point)으로  $O$ 에서 시작하는 위치벡터  $p$ 로 표시되며 커플러의 가운데 위치한다.  $p_i$  벡터는  $P$ 에서  $P_i$ 로 연결되며 그 길이는  $r_p$ 이다.  $b_i$  벡터는  $B_i$ 점의 위치를 나타내는 벡터로 그 길이는  $r_b$ 이다.  $l_i$ 는  $B_i$ 에서  $P$ 로의 벡터이다. 이와 같은 관계는 그림 1에서 보여준다. 다리 벡터인  $q_1$ 과  $q_2$ 는 프리즈매틱 조인트로서 그 길이를 변화시킬 수 있다. 다리 벡터 길이의 최소값과 최대값은  $q_{min}$ 과  $q_{max}$ 이다.

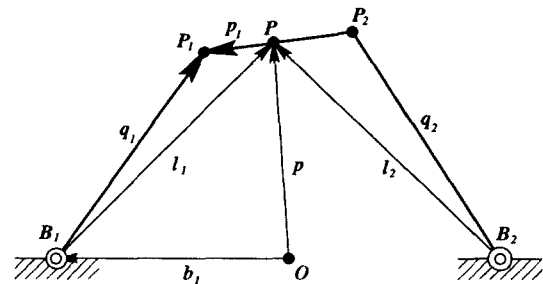


그림 1: 조절 가능한 링크를 가진 4-bar 매카니즘

$q_i$  벡터와  $l_i$  벡터에 의해 형성되는 경계는 원점이 같은 구의 형태가 된다.

$$(p_i - b_i) \cdot (p_i - b_i) = q_{i_{min}}^2 \text{ or } q_{i_{max}}^2 \quad (1)$$

$$(p - b_i) \cdot (p - b_i) = l_{i_{min}}^2 \text{ or } l_{i_{max}}^2 \quad (2)$$

식 (1)은 다리의 한계를 나타내고 식 (2)는 위치의 한계를 나타낸다. 위치한계를 결정하기 위해서는, 즉, 작업공간을 결정하기 위해서는  $l_{i_{min}}$ 과  $l_{i_{max}}$ 가 먼저 주어져야 한다.

##### 2.2 기구학적인 구속조건들

기구학적 제한 조건인 글로블라 조인트(globular joint)와 다리의 간섭 등을 제거함으로써 리처블 작업공간과 텍스트러스 작업공간을 찾을 수 있다. 리처블 작업 공간은 어떤 한 오리엔테이션을 가지고 참조점  $P$ 가 도달할 수 있는 작업공간을 의미한다. 텍스트러스 작업 공간은 모든 오리엔테이션을 가지고 참조점이 도달할 수 있는 작업 공간을 나타낸다.

다리 벡터  $q_i$ 가 도달할 수 있는 영역은 다리의 길이  $q_{min}$ 과  $q_{max}$ 로 결정된다. 이는 그림 2에서 4개의 원으로 표시되어 있다. 그림 2에서 검게 표시된 영역은 두 다리가 도달할 수 있는 공통적인 영역을 나타낸다. 그러나, 이 영역은 작업 공간이 아니다. 리처블 작업 공간인 경우 참조점  $P$ 가 도달할 수 있는 영역은 그림 2에서의 영역보다 클 것이고 텍스트러스 작업 공간에서는 더 작게 나타날 것이다.

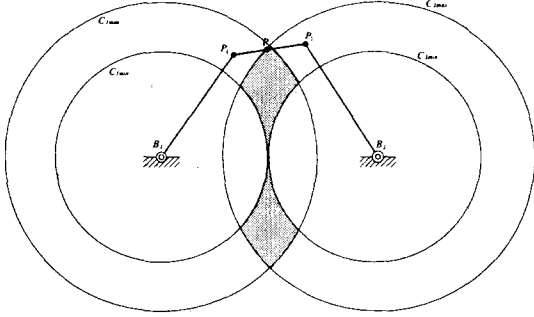


그림 2: 링크가 도달할 수 있는 영역

오리엔테이션에 대한 정보없이 작업공간을 결정하기 위해서, 두 개의 구속조건, 즉, 위치조건과 기구조건이 제안되었다. 위치 조건은 위치  $P$ 가 도달할 수 있는 최대 경계와 최소 경계를 의미한다. 그러나, 이 영역내에서, 메카니즘이 부서질 수도 있다. 기구조건은 메카니즘을 유지하기 위한 조건을 나타낸다.

우선, 위치조건을 고려하도록 한다. 다리 벡터로부터 위치를 찾기 위해 벡터  $l_i$ 와 다리 벡터  $q_i$ 의 관계가 정의되어야 한다.  $l_i$  벡터는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$l_i = q_i - p_i \quad (3)$$

만약 오리엔테이션이 주어진다면,  $l_i$  벡터는 결정된다. 그러나, 오리엔테이션이 주어지지 않았으므로,  $l_i$  벡터를 알 수 없다. 식 (3)은 다음과 같은 스칼라 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} l_i \cdot l_i &= (q_i - p_i) \cdot (q_i - p_i) \\ &= q_i \cdot q_i + p_i \cdot p_i - 2q_i \cdot p_i \\ l_i^2 &= q_i^2 + p_i^2 - 2q_i p_i \cos \theta \\ &= q_i^2 + r_p^2 - 2q_i r_p \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\theta$ 는  $q_i$  벡터와  $p_i$  벡터 사이의 각도를 의미한다.  $\cos \theta$ 의 최대값과 최소값은 명백히  $\pm 1$ 이다, 즉, 다리 벡터  $q_i$ 와 벡터  $p_i$ 는 벡터  $l_i$ 로 표시되는 선상에 있게 된다.  $l_i$ 의 극값은

$$q_i^2 + r_p^2 - 2q_i r_p \leq l_i^2 \leq q_i^2 + r_p^2 + 2q_i r_p \quad (5)$$

다리 벡터  $q_i$ 가 최대값이면,  $l_{i,max}$ 의 조건을 구할 수 있고,  $q_i$ 가 최소값이라면  $l_{i,min}$ 의 조건을 얻을 수 있다. 위치조건인 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_{i,max} - r_p &\leq l_{i,max} \leq q_{i,max} + r_p \\ q_{i,min} - r_p &\leq l_{i,min} \leq q_{i,min} + r_p \end{aligned} \quad (6)$$

리처블 작업 공간을 구하기 위한  $l_i$ 의 최대값과 최소값은 식 (6)의 가장 큰 값과 가장 작은 값이다. 따라서,

$$\begin{aligned} l_{i,max} &= q_{i,max} + r_p \\ l_{i,min} &= q_{i,min} - r_p \end{aligned} \quad (7)$$

텍스트러스 작업 공간을 위한  $l_i$ 값은 다음과 같이 식 (6)의 다른 한 경우가 될 것이다.

$$\begin{aligned} l_{i,max} &= q_{i,max} - r_p \\ l_{i,min} &= q_{i,min} + r_p \end{aligned} \quad (8)$$

식 (7)과 (8)에서 제시한 조건들은 Pennock과 Kassner[5]가 제안한 것과 같은 결과이다. 이 조건들은 작업 공간을 결정하기 위한 필요조건이지 충분조건은 아니다.

다음으로 기구조건을 생각해 보자. 위의 조건만을 고려한 위치는 실제로보다 더 크게 결정되어진다, 이는 위의 조건을 유도할 때 각각의 다리만을 사용하였기 때문이다. 두 다리를 동시에 고려하기 위해서, 다음과 같은 루프 식을 이용하면

$$(q_i - p_i) + p_j - q_j - (b_j - b_i) = 0$$

$$\begin{aligned} l_i + p_j &= q_j + (b_j - b_i) \\ &= q_j + b_{ij} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $b_{ij}$ 는 점  $B_i$ 에서  $B_j$ 로의 벡터를 나타내고  $l_i = q_i - p_i$ 이다. 벡터의 내적을 하여 스칼라 관계를 얻으면

$$\begin{aligned} \|l_i + p_j\|^2 &= (q_j + b_{ij}) \cdot (q_j + b_{ij}) \\ &= q_j^2 + b_{ij}^2 + 2q_j b_{ij} \cos \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\alpha$ 는  $q_j$ 와  $b_{ij}$  사이의 각도를 나타내고  $\|l_i + p_j\|$ 값은  $B_i$ 와  $P_j$ 사이의 길이를 나타낸다.

$$\cos \alpha = \frac{\|l_i + p_j\|^2 - q_j^2 - b_{ij}^2}{2q_j b_{ij}} \quad (11)$$

식 (11)은 벡터  $l_i$ 가 주어진  $q_j$ 의 극값, 즉,  $q_{j,min}$  또는  $q_{j,max}$ 와 교차하는 점에서의 각도를 의미한다. 만약  $l_i$ 가  $l_{i,max}$  혹은  $l_{i,min}$ 일 경우,  $p_j$ 는 4-bar 매카니즘일 경우  $l_i$ 로 표시되는 직선 위에 있을 것이고 6자유도 병렬형 매니플레이터의 경우에는 벡터  $l_i$ 와  $p_j$ 가 존재하는 평면위에 있을 것이다.  $\triangle B_i B_j P_j$ 와  $\triangle B_i B_j P$ , 즉, 그림 3에서의  $\triangle B_1 B_2 P_2$ 와  $\triangle B_1 B_2 P$ 에 제 2 코사인 법칙을 사용하면, 각  $\beta$ 와  $q'$ 의 길이, 즉,  $\overline{B_j P}$ 의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\cos \beta = \frac{\|l_i + p_j\|^2 + b_{ij}^2 - q_j^2}{2\|l_i + p_j\|b_{ij}} \quad (12)$$

$$q'^2 = l_i^2 + b_{ij}^2 - 2l_i b_{ij} \cos \beta \quad (13)$$

$q'_{min}$ 은 주어진  $q_{min}$ 에 대한  $q'$  값을 표시하고,  $q'_{max}$ 은  $q_{max}$ 일 때  $q'$  값을 나타낸다.  $q'$ , 즉,  $q_{min}$  혹은  $q'_{max}$ 는  $q_j$ 의 새로운 경계값이 된다. 즉,  $q_j$ 가  $q'_{min}$ 과  $q'_{max}$  사이에 있으면 이 때의  $l_i$ 는 참조점  $P$ 가 매카니즘을 유지하며 도달 할 수 있는 경계가 된다.

만약  $|\cos \alpha| > 1$ 이라면, 즉, 주어진  $q_j$ 에 대해서 교차하는 점이 없다면,  $q'$ 은 값이 없게 된다. 수정된  $l_j$ 는 앞으로  $l'_j$ 로 표시할 것이며,  $q'$ 의 최대 최소 경계로 식 (6)에서 주어진 것과 같은 관계로 정의된다.

### 2.3 작업 공간 조건

작업 공간을 결정하기 위해서, 먼저, 수정된 다리 길이  $q'$ 을 식 (13)에서와 같이 계산해야 한다. 하나의 다리에 대해서 수정된 다리 길이의 개수는 나머지 다리의 개수와 같다, 즉, 6자유도 병렬형 매니플레이터의 경우에는 다섯개의 수정된 다리 길이가 나온다. 작업 공간을 결정하기 위해서는 이 계산된 다리 길이들 중 하나를 결정해야 한다. 2.2절에서 제안한 조건들은 단지 두개의 다리만을 고려하였다. 따라서, 모든

다리의 영향을 포함시키기 위해서는  $q'$ 이 모든 수정된 다리 길이  $q'_i$ 를 포함해야 한다.  $q'$ 은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} q'_{max} &= \max \{q'_{max}\} \\ q'_{min} &= \min \{q'_{min}\} \end{aligned} \quad (14)$$

for  $i = 1, 2, \dots, 5$ .

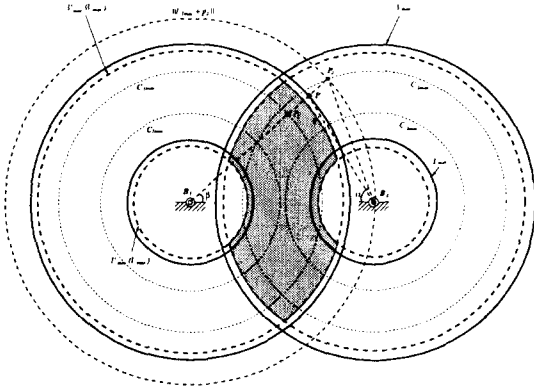


그림 3: 4-bar 매카니즘의 리처블 작업 공간

리처블 작업 공간을 결정하기 위한 조건은

$$l'_{min} = q'_{min} - r_p \quad (15)$$

$$l'_{max} = q'_{max} + r_p \quad (16)$$

4-bar 매카니즘의 결과는 그림 3에 나타나 있다. 최대 경계와 최소 경계가 그림 3에서처럼 수정되지 않은 다리 길이로 나타난 것 보다 약간 줄었음을 알 수 있다.

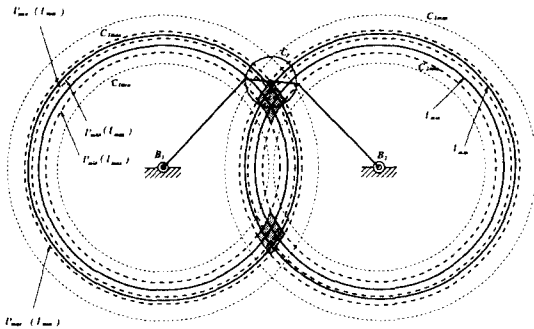


그림 4: 4-bar 매카니즘의 덱스트러스 작업 공간

덱스트러스 작업 공간은 다음과 같은 조건으로 구할 수 있다.

$$l'_{min} = q'_{min} + r_p \quad (17)$$

$$l'_{max} = q'_{max} - r_p \quad (18)$$

그림 4에 결과가 표시되어 있다. 이 영역에서, 키펴러는 모든 오리엔테이션을 가질 수 있다.  $P_i$ 의 궤적을 나타내는 원  $C_p$ 가 다리 길이에 의해서 제한된 영역, 즉, 원  $C_{i_{min}}$ 과  $C_{i_{max}}$  사이의 영역, 안에 위치한다. 따라서 검게 표시된 영역에 있는 점  $P$ 는 모든 오리엔테이션을 가질 수 있다.

### 3 작업 공간 결정을 위한 알고리즘

작업 공간을 2차원의 평면에 표시하기 위해  $x, y, z$  값들 중 하나를 고정시킬 수도 있고 3차원의 공간상에 표시하기 위해 모든 값들을 고정시키지 않을 수도 있다. 여기에 제시된 알고리즘은 3차원 공간상의 표시를 기본으로 하고 있다. 다음의 알고리즘은 6자유도 병렬형 매니플레이터의 작업 공간을 결정하기 위한 것이다.

**STEP 1** 식 (6)의 위치 조건에서  $l_{min}$ 과  $l_{max}$ 를 주어진  $q_{min}$ 과  $q_{max}$ 에서 찾는다.

**STEP 2** step 1에서 구한  $l$  값으로부터 식 (13)에서의 기구조건으로  $q'$ 을 결정한다.

**STEP 3** 2.3절에서 언급한 것처럼,  $q'_{min}$ 은  $q'_{i_{min}}$  중에서 가장 작은 값이고,  $q'_{max}$ 은  $q'_{i_{max}}$  중에서 가장 큰 값이다. 리처블 작업 공간이나 덱스트러스 작업 공간 중에서 원하는 작업공간에 따라  $l'_{min}$ 과  $l'_{max}$ 를 결정한다.

**STEP 4** step 3에서 구한  $l'_{min}$ 과  $l'_{max}$ 를 식 (2)에 적용하여 작업 공간을 구한다. 한 다리에 대해,  $l'_{min}$ 으로 구한 구의 바깥쪽과  $l'_{max}$ 로 구한 구의 안쪽이 참조점  $P$ 가 도달할 수 있는 영역이 된다. 모든 구의 공통 부분이 작업 공간이 된다.

**STEP 5** 공통부분을 찾기 위해, 먼저, 구의 교차 평면을 구하고, 각 교차 평면에서의 교차 점들을 구한다. 교차 평면은 원의 식으로 표시되는데, 각 원들은 다시 교차 점들로 인한 몇 개의 호로 나누어진다. 각 호의 점을 취하여 호가 작업 공간안에 있는지를 검사한다. 작업 공간에 위치하는 모든 호들을 합하면 그 호들은 작업 공간의 경계선이 된다.

위의 알고리즘을 이용하여 리처블 작업 공간과 덱스트러스 작업 공간을 구할 수 있는데, 그 차이는 식 (7)와 (8)의  $l$ 을 계산하는데 있다. 리처블 작업 공간을 구하기 위한 조건은 식 (15)와 (16)에 표시되어 있고, 덱스트러스 작업 공간을 위한 조건은 식 (17)와 (18)에 표시되어 있다.

### 4 예제

위 알고리즘들의 예로서 K.R. Han, *et al.*[3]에서 주어진 구성을 사용하였다. 그림 5는 병렬형 매니플레이터의 기하학적 설명을 나타내고 있고, 각 반지름과 각도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_B &= 10.0, & r_P &= 8.0, \\ \theta_B &= \frac{\pi}{6}, & \theta_P &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

다리의 최소값과 최대값은

$$q_{min} = 30.0, \quad q_{max} = 60.0.$$

앞서 기술한 알고리즘들의 결과는 그림 6에 나타나 있다. 리

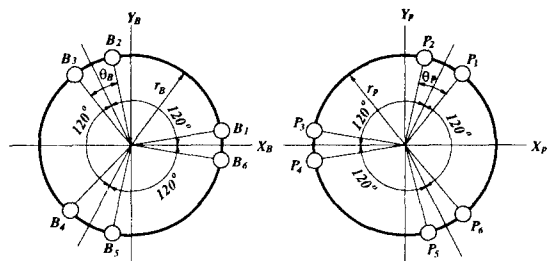
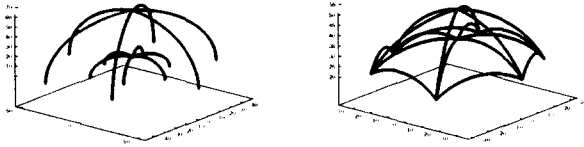


그림 5: 베이스(좌)와 동작(우) 플랫폼

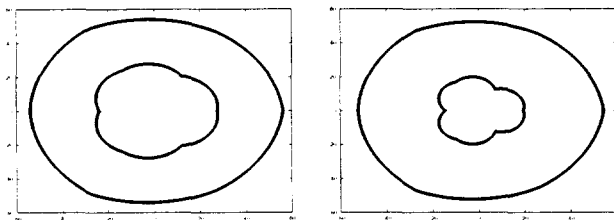
처블 작업 공간은  $z=0$ 일 때의  $x-y$  평면과 알고리즘에서 구한 경계들로 한정되어 있고, 덱스트러스 작업 공간은 알고리즘에서 구한 경계들로 한정되어 있다.



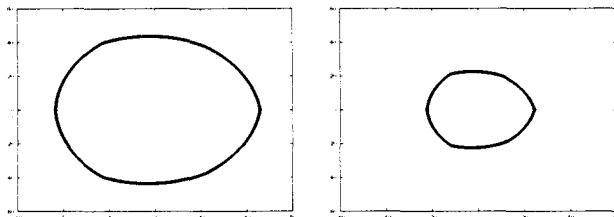
(a) 리처블 작업 공간      (b) 덤스트러스 작업 공간

그림 6: 3차원으로 표시한 작업 공간

작업 공간을 쉽게 보기 위해, 경계를 2차원으로 나타내면 그림 7과 그림 8과 같이 된다. 이는 먼저, 원하는  $z$ 를 결정하고, 앞서 알고리즘으로 얻은 각 호와 이  $z$  값으로 결정된  $x$ - $y$ 에 평행한 평면과의 교점을 구한다. 이 교점들을 식 (2)에서 주어진  $z$ 값을 넣어 구한 원의 식으로 연결한다. 이와 같은 방법으로  $x$ - $z$ , 혹은  $y$ - $z$ 에 평행한 평면에서의 작업공간도 구할 수 있다.



(a)  $z = 0$       (b)  $z = 15$



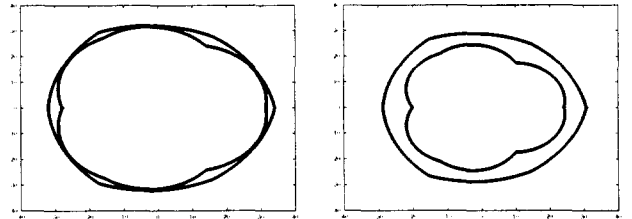
(c)  $z = 35$       (d)  $z = 55$

그림 7:  $z$  값에 따른 리처블 작업 공간

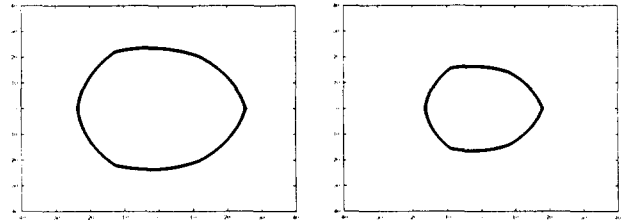
Gosselin[2]의 방법을 사용하여 결과를 비교하였는데, 이때 모든 오리엔테이션에 대한 비교가 불가능하므로 다음과 같이  $0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 90^\circ, \pm 135^\circ, \pm 180^\circ$ 의 오일러 각을 선택하였다. 이 값들은 서로 조합되어 세 개의 오일러 각을 이루게 된다. 그림 9가 그 결과를 나타내고 있다. 두꺼운 선으로 표시된 영역이 이 논문에서 제안한 작업 공간이고 작은 선들로 표시된 것이 Gosselin[2]이 제안한 방법의 결과이다. 이 논문에서 제안한 방법으로 리처블 작업 공간과 덤스트러스 작업 공간을 매우 정확하게 얻을 수 있음을 알 수 있다.

## 5 결론

작업 공간을 구하기 위해 위치조건과 기구조건을 제안하였으며, 이 조건들을 이용한 알고리즘을 제시하였다. 이 논문에서 제시한 방법은 기하학적인 방법으로 오리엔테이션에 대한 정보없이, 단지 설계값만으로 작업 공간을 예측할 수 있다. 제시한 알고리즘을 다른 방법과 비교하여 그 결과가 정확함을 알 수 있다. 이 논문에서 제시한 방법은 작업 공간을 결정하기 위해 오리엔테이션에 대한 정보가 전혀 필요치 않으며, 또한 리처블 작업 공간과 덤스트러스 작업 공간을 결정하기 위해 한 번의 알고리즘 수행만 필요로 한다. 그러

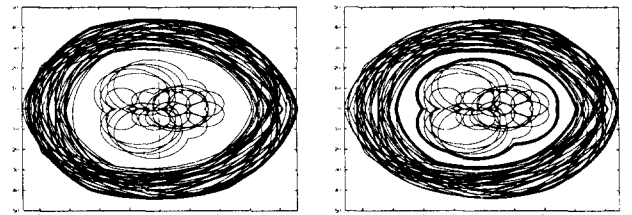


(a)  $z = 31$       (b)  $z = 35$



(c)  $z = 40$       (d)  $z = 45$

그림 8:  $z$  값에 따른 덤스트러스 작업 공간



(a) 리처블 작업 공간      (b) 덤스트러스 작업 공간

그림 9: 작업 공간의 검증 ( $z = 35$ )

므로, 이 논문에서 제시한 방법은 6자유도 병렬형 매니퓰레이터의 설계시 매우 유용하게 사용될 수 있다.

## 참고 문헌

- [1] C. Gosselin, and J. Angeles "The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-degree-of-freedom Parallel Manipulator," *Trans. of the ASME J. of Mech., Trans., and Auto. in Design*, Vol. 110, pp. 35-41, 1988
- [2] C. Gosselin, "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators," *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 331-336, 1989
- [3] K.R. Han, W.K. Chung, and Y. Youm, "Local Structurization for the Forward Kinematics of Parallel Manipulators Using Extra Sensor Data," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 514-520, 1995
- [4] J.-P. Merlet, "Determination of the Orientation Workspace of Parallel Manipulators," *J. of Intelligent and Robotic System*, Vol. 13, pp. 143-160, 1995
- [5] G.R. Pennock, and D.J. Kassner, "The Workspace of a General Geometry Planar Three-Degree-of-Freedom Platform-Type Manipulator," *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 269-276, 1993
- [6] D.C.H. Yang, and T.W. Lee, "Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint," *Trans. of the ASME J. of Mech., Trans., and Auto. in Design*, Vol. 106, pp. 191-198, 1984