

Flexible stick balancer 에 대한 modeling 과 제어에 관한 연구

Modeling of flexible stick balancer and controler design

°서 기 원*, 조 향*

*광운대학교 제어계측공학과 (Tel:940-5150; Fax:909-3255; E-mail:kiweon@daisy.kwangwoon.ac.kr)

Abstracts This paper describes a liner state-space model for a flexible stick balancer. The method employed to generate the model utilizes a separable formulation of assumed modes to represents the transverse displacement due to bending. Lagrangian dynamics are applied to determine the kinetic and potential energies for the system. The resultant dynamic equations are then organized into a state space model and linearized using Taylor series expansion method. A minimum order observer is designed to estimate unmeasurable states.

Keywords assumed mode, Lagrangian dynamics, minimum order observer

1. 서론

Rigid stick 의 위치를 제어하는 문제는 학부 text 에 나와 있을 정도로 제어공학분야에서 표준 plant 로 다루어져 왔다. 본 논문에서는 이 보다 한 걸음 진보된 형태인 non-rigid inverted pendulum 을 대상으로 하여 modeling 과 제어 방법에 대하여 논하고자 한다. Plant 의 모양은 rigid 인 경우와 동일하게 cart 위에 non-rigid stick 을 연직 방향으로 세운 형태이며, dc motor 를 이용하여 cart 를 좌우로 이동시킴으로서 stick 을 unstable equilibrium points 인 origin 에 항상 머물러 있도록 하는 것을 제어 목적으로 하였다.

Stick 의 vibration equation 은 $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t)$ 형태로 표시되어 지기 때문에 자유도가 무한대가 되지만 system 의 차수를 고려하여 modeling 과정에서는 vibration 에 가장 큰 영향을 주는 first bending mode [$w(x,t) \approx \phi_1(x) q_1(t)$] 만을 고려 하였다. Modeling 절차는, 먼저 비 선형 상태 방정식을 Lagrange's equation 을 이용하여 유도 하였다. 즉, plant 의 자유도를 선정하고(3), 일반화 좌표를 결정하고 나서, 전체 운동 에너지(cart+stick)와 전체 위치에너지(stick)에 대한 식을 일반화 좌표로 표시한 후,

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$ 의 Lagrange's equation 에 대입하여 비

선형 상태방정식을 도출 하였다. 그리고 나서, 선형 system 을 위해 고안된 제어 기법(state feedback)을 적용 시키기 위하여 state 들의 변위가 작다는 전제 하에 '다변수 함수에 대한 Taylor series 전개 방법'을 통해 model equation 을 선형화 하였다. Plant 의 state 로는 cart 의 위치, stick 의 base angle, first vibration mode 및 그 일차도함수들로 하여 6 차의 system 으로 modeling 하였다. 이 들 state 들 중에서 direct measurable 할 수 없는 state 인 vibration mode 와 그 도함수는 2 차의 observer 를 꾸며서 추정하였다.

2. plant 의 모델링

□ 운동에너지

전체 운동에너지는 cart 의 운동에너지와 stick 의 운동에너지의 합으로 표현되며, stick 의 운동에너지는 stick 위의 임의의 대

표점 P(x)에서의 위치 벡터를 먼저 구한 후 이것을 미분하여 속도를 구한 다음 stick 의 길이를 따라 적분함으로써 구할 수 있다.

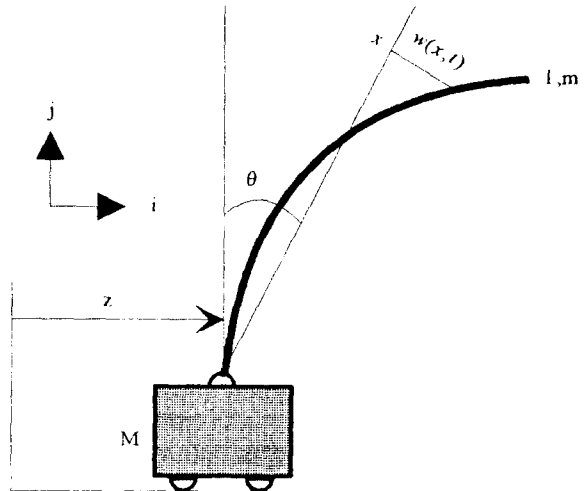


그림 1. flexible stick on a cart
Fig. 1. flexible stick on a cart

vector P 의 (i, j)성분을 각각 구하면,

$P_i: z + (w + \tan \theta) \cos \theta = z + w \cos \theta + x \sin \theta$
 $P_j: (x - w \tan \theta) \cos \theta = x \cos \theta - w \sin \theta$
이 되며 각각을 시간에 관해 미분하여 속도성분을 구할 수 있다.

$$v_i = \dot{z} + \dot{w} \cos \theta + w(-\sin \theta) + x \cos \theta \dot{\theta}$$

$$v_j = \dot{x}(-\sin \theta) - \dot{w} \sin \theta - w \cos \theta \dot{\theta}$$

$|v|^2 = v_i^2 + v_j^2$ 이므로 대입하여 정리하면,

$$|v|^2 = \dot{z}^2 + \dot{w}^2 + w^2 \dot{\theta}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 + 2 \left\{ x \dot{w} \dot{\theta} + \dot{z} \dot{w} \cos \theta + \dot{z} \dot{\theta} (x \cos \theta - w \sin \theta) \right\}$$

이다. 한편 deflection 은 $w(x,t) = \phi_1(x) q_1(t)$, $\dot{w}(x,t) = \phi_1(x) \dot{q}_1(t)$

형태로 표시되고, $\theta = \theta_m + \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \theta_m + \dot{\phi}_1(0) q_1(t)$ 로 나타

낼 수 있으므로 전체 운동에너지(T)는

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{\rho}{2} \int_0^l |v|^2 dx \quad (\rho \text{ 는 선 밀도})$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{\rho}{2} \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \dot{q}_1^2 + \frac{\rho}{2} \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \cdot (\dot{\theta}_m^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2\dot{\theta}_m \dot{\phi}_1(0)\dot{q}_1 + \dot{\phi}_1(0)^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_b(\dot{\theta}_m^2 + 2\dot{\theta}_m \dot{\phi}_1(0)\dot{q}_1 + \dot{\phi}_1(0)^2 \dot{q}_1^2) \\
& + \rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \cdot \dot{\theta}_m + \dot{\phi}_1(0)\dot{q}_1 + \rho \int_0^l \phi_1(x) dx \cdot \cos(\theta_m + \dot{\phi}_1(0)q_1) \cdot \dot{z} \dot{q}_1 \\
& + \frac{l \cdot m}{2} \dot{z}(\dot{\theta}_m + \dot{\phi}_1(0)\dot{q}_1) \cdot \cos(\theta_m + \dot{\phi}_1(0)q_1) - \int_0^l \phi_1(x) dx \cdot q_1 \sin(\theta_m + \dot{\phi}_1(0)q_1) \cdot \dot{z} \cdot (\dot{\theta}_m + \dot{\phi}_1(0)\dot{q}_1)
\end{aligned}$$

□ 위치 에너지

위치 에너지(U)는 stick에만 해당되며, 전체 위치 에너지는 중력에 대한 위치 에너지와 deflection에 따른 stick의 elastic 위치 에너지의 합으로 표시된다.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{l \cdot m \cdot g}{2} \cos(\theta_m + \dot{\phi}_1(0)q_1) - \sin(\theta_m + \dot{\phi}_1(0)q_1) \cdot \rho g q_1 \cdot \int_0^l \phi_1(x) dx \\
&+ \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l \ddot{\phi}(x)^2 dx \cdot q_1^2
\end{aligned}$$

(g: 9.8, E: Young's module, I: cross section area moment of inertia)

□ Lagrange's equation을 통한 비선형 모델식

일반화 좌표(generalized coordinate)로서 cart의 변위(z), base angle(θ_m), deflection [$w(x, t) = \phi_1(x)q_1(t)$]의 q_1 을 택하면 다음과 같은 3개의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} &= u \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_m} + \frac{\partial U}{\partial \theta_m} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} &= 0
\end{aligned}$$

앞에서 구한 운동 에너지(T)와 위치 에너지(U)를 위 식들에 대입하면 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 형태의 비선형 상태 방정식을 얻을 수 있다. system의 state로는 $\mathbf{x} = [z \ \dot{z} \ \theta_m \ \dot{\theta}_m \ q_1 \ \dot{q}_1]^T$ 로 하였다.

□ 선형화(linearization)

서블변 비선형 수식은 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$ 로 나타낼 수 있으며, operating point($\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0$)에서의 perturbation(δ)과의 관계는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \delta \mathbf{x}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^0 + \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \delta \mathbf{x}, \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u})$ 이다. $\dot{\mathbf{x}}$ 의 j번째 행(\dot{x}_j)의 수식을 Taylor series 전개하여 선형 항들만으로 나타내면

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j &= \dot{x}_j^0 + \delta \dot{x}_j = f_j(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) + \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta x_n \\
&+ \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta u_n. \quad \text{이때 } \dot{x}_j^0 = f_j(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \text{ 이므로} \\
\delta \dot{x}_j &= \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta x_n + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_j}{\partial u_n} \right|_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \delta u_n.
\end{aligned}$$

따라서 $\delta \dot{\mathbf{x}}$, $\delta \mathbf{x}$, $\delta \mathbf{u}$ 사이의 관계는 $\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}$ 과 같은 표준 vector-matrix 명식으로 표시할 수 있게 되며, \mathbf{A} , \mathbf{B} 는 Jacobian matrix로서 element를 표시해 보면

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_6} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_6} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0} \quad \text{이다.}$$

이 방법을 통해서 flexible stick balancer의 선형 수식은 다음처럼 구해진다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_{23}}{d} & 0 & \frac{n_{25}}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_{43}}{d} & 0 & \frac{n_{45}}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n_{63}}{d} & 0 & \frac{n_{65}}{d} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{num}_1 \\ d \\ 0 \\ \text{num}_2 \\ d \\ 0 \\ \text{num}_3 \\ d \end{bmatrix} \\
d &= -4 \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 I_b - 4 \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right]^2 m + 4 \rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \cdot I_b \cdot m \\
&+ 4 \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \cdot l \cdot m - \rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \cdot l^2 \cdot m^2 \\
&- 4 \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right]^2 M + 4 \rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \cdot I_b \cdot M \\
n_{23} &= g \left(-4 \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 I_b + 4 \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \cdot l \cdot m \right. \\
&\quad \left. - \rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right) \cdot l^2 \cdot m^2 \\
n_{25} &= 4g \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + 4I_b \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \\
&- 4gI_b \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 - 2 \cdot l \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \\
&- 2g \cdot l \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 4g \cdot l \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \\
&\quad \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] - g \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot l^2 \cdot m^2 \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] \\
n_{43} &= -4 \cdot g \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] - 4g \cdot I_b \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \\
&\quad \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] + 2g \cdot l \cdot m^2 \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 2g \cdot l \cdot m^2 \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \\
&\quad \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] - 4g \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
&- 4g \cdot I_b \cdot M \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] + 2g \cdot l \cdot m \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] \\
&+ 2g \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot l \cdot m \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
n_{45} &= -4g \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^3 + 4m \cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + \\
&4g \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 4 \cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \cdot I_b \\
&\cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot m - 4g \cdot I_b \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] - 2 \cdot l \cdot m \\
&\cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] - 2g \cdot l \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 \\
&+ 2g \cdot l \cdot m^2 \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 2g \cdot l \cdot m^2 \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \cdot \\
&\quad \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] - EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot l^2 \cdot m^2 + 4M \cdot EI \int_0^l \ddot{\phi}_1(x)^2 dx \\
&\cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + 4g \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 4I_b M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{\phi}_1(0) \cdot EI \cdot \int_0^l \ddot{\phi}_1(0)^2 dx - 4g \cdot I_b M \cdot \rho \int_0^l \phi_1(x) dx \dot{\phi}_1(0)^2 + 2g \cdot l \cdot m \cdot M \\
& \dot{\phi}_1(0) \cdot \rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx + 2g \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \cdot \rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \cdot l \cdot m \cdot M \\
n_{63} = & 4I_b \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \rho \int_0^l \phi_1(x) dx + 4g \cdot I_b \cdot m \cdot \rho \int_0^l \phi_1(x) dx + 2I_b \cdot l \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \\
& - 2g \cdot l \cdot m^2 \rho \int_0^l x \phi_1(x) dx + 4g \cdot I_b M \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \\
& - 2g \cdot l m M \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
n_{65} = & 4 \cdot I_b \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] - 4g \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
& - 4 \cdot I_b \cdot m \cdot \left[EI \cdot \int_0^l \ddot{\phi}_1(0)^2 dx \right] + 4g \cdot I_b \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \dot{\phi}_1(0) \\
& + 2g \cdot l \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right]^2 + 2I_b \cdot l \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0)^3 - 2g \cdot l \cdot m^2 \\
& \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \cdot \dot{\phi}_1(0) + \left[EI \cdot \int_0^l \ddot{\phi}_1(0)^2 dx \right] \cdot l^2 \cdot m^2 - 4g \cdot M \\
& \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] - 4I_b \cdot M \cdot \left[EI \cdot \int_0^l \ddot{\phi}_1(0)^2 dx \right] \\
& + 4g \cdot I_b \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \dot{\phi}_1(0) - 2g \cdot l \cdot m \cdot M \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
& \cdot \dot{\phi}_1(0) \\
num_1 = & -4 \left(\left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right]^2 + I_b \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] + 4I_b \cdot \dot{\phi}_1(0) \right. \\
& \left. \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + 2I_b^2 \cdot \dot{\phi}_1(0)^2 \right) \\
num_2 = & 4 \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + 4I_b \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x) dx \right] \\
& - 2 \cdot l \cdot m \cdot \left[\rho \int_0^l \phi_1(x)^2 dx \right] - 2 \cdot l \cdot m \cdot \dot{\phi}_1(0) \cdot \left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] \\
num_3 = & -2 \left(\left[\rho \int_0^l x \phi_1(x) dx \right] + I_b \cdot \dot{\phi}_1(0) \right) \cdot l \cdot m
\end{aligned}$$

3. 경제조건을 통한 mode shape 의 결정

일반적으로 external force, $f(x,t)$ 에 의한 flexible beam 의 forced vibration 은 다음과 같이 나타낼 수 있는데

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\rho A b \omega_n} \int_0^t Q_n \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \right)$$

여기에서 $\phi_n(x)$ 은 free vibration 인 경우의 n 번째 normal mode function 이며, A_n, B_n 은 free vibration 의 initial condition 으로부터 결정되어지는 상수이고, ω_n 은 natural frequency 이며, ρ 는 선 밀도이고, A 는 단면적이요, b 는 $\int_0^l \phi_n(x)^2 dx$ 로 표시되는 상수이고, $Q_n(t)$ 는 $\int_0^l f(x,t) \phi_n(x) dx$ 로 정의되는 generalized force 이다.

그러면 본 논문에서 다루고자 하는 plant 의 normal mode shape 을 구해보자. 일반적으로 mode shape 은 4 계 미분 방정식으로 표시되기 때문에 완전한 해를 구하기 위해서는 4 개의 boundary condition 이 필요하다 boundary condition 의 종류에는 free end, pinned end, clamped end 등이 있으며, 본 논문의 plant 에서는 pinned-free 로 생각하였다.

- deflection: $w(0,t) = 0$
- bending moment: $EI \int_0^l \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0$
- bending moment: $EI \int_0^l \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = 0$
- shear force: $EI \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} = 0$

이 조건을 모두 만족시키는 normal mode shape 은

$$\phi_n(x) = \sin \beta_n x + \left(\frac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l} \right) \sinh \beta_n x$$

로 표시되어지며, β_n 은

$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$ 의 해로서 몇개를 나열하여보면 다음과 같다. $\beta_1 l = 3.926602, \beta_2 l = 7.068583, \beta_3 l = 10.21017, \beta_4 l = 13.35176$

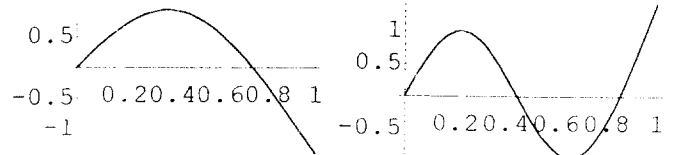


그림 2. 첫 번째와 두 번째 mode shape
Fig. 2. first and second mode shape

4. 제어기 설계 및 simulation

$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T$ 에서 \mathbf{x}_1 을 측정 가능한 state, \mathbf{x}_2 를 측정 불가능한 state 로 하고, 상태 행렬을 다음 처럼 분리해서 표현해 보자.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \ 0]$$

\mathbf{x}_2 의 추정된 stat 를 $\hat{\mathbf{x}}_2$ 로 나타내면 오차는 $\mathbf{e} = \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2$ 가 되고, 오차의 수식은 $\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_r \cdot \mathbf{A}_{12}) \mathbf{e}$ 로 표시된다. 그러므로 reduced order observer gain matrix, \mathbf{L}_r 이 주어지는 사양에 맞게 결정되던, 추정된 state 가 실제의 state 에 수렴하도록 observer 를 설계할 수 있다. matrix, \mathbf{L}_r 은 dual system 으로 transpose 한 후, 다변수 시스템에서의 state feed back gain matrix 를 구하는 절차를 통해 구해줄 수 있다.

cart 의 무게(M): 2 kg, stick 의 무게(m): 0.233172 kg, stick 의 길이 (l): 1 meter, stick 의 관성 모멘트 (I_b): $7.7724 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$ 일때 \mathbf{A}, \mathbf{B} 는

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.6323 & 0 & -185.754 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.40033 & 0 & 9.28832 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 13.8423 & 0 & 47.1254 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.0886 \\ 0 \\ 0.246849 \\ 0 \\ -1.88544 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -185.754 & 0 \\ 0 & 0 \\ 9.28832 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 47.1254 & 0 \end{bmatrix}$$

observer 의 eigenvalue 가 $\lambda = -4 \pm j6.9282$ 가 되도록 \mathbf{L}_r 을 구해보자. $\mathbf{X}(\lambda) = [\mathbf{I} \lambda - \mathbf{A}_{22}^T \ | \ \mathbf{A}_{12}^T]$, $\zeta^T = [\Psi^T (\mathbf{K}\Psi)^T]$ 로 표시하면,

$$\mathbf{X}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -47.1254 & 0 & -185.754 & 0 & 9.28832 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

이고

$\mathbf{X} \cdot \zeta = 0$ 을 만족하는 column vector, ζ 를 구하면 무수히 많은 해

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} -4 + j6.9282 \\ 1 \\ 1 \\ -0.425969 + j0.298382 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta_2 = \zeta_1^*$$

를 선택할 수 있다.

$\mathbf{U} = [\zeta_1 \ \zeta_2]$ 인 행렬 \mathbf{U} 의 위쪽 2 행들만으로 이루어진 새로운 행렬을 \mathbf{G} , 나머지 \mathbf{U} 행렬의 아래 행들로 이루어진 행렬을 \mathbf{H} 라 하면 $\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{K}$ 관계를 이용하여 \mathbf{K} 가 결정되고, $\mathbf{L}_r = \mathbf{K}^T$ 이므로 최종적으로 \mathbf{L}_r 는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} 0 & -0.0431 & 0 & 0 \\ 1 & -0.5982 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

settling time 이 2 초이고 계통계수가 0.5 일때의 closed loop pole 은 $-2+j3.464, -2-j3.464, -10, -10, -10, -10$ 로 생각할 수 있으며, 이때의 state feed back gain matrix 는 $[28.9919 \quad 18.8451 \quad -324.2919 \quad 275.3643 \quad -631.2921 \quad -88.121]$ 이 값을 가지게 된다.

reduced order observed state feed back system 의 dynamic equation 은

state feedback gain matrix 가 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_a \quad \mathbf{K}_b]$ 일때

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}_r \mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

로 표시되어 있는데 이 관계식을 이용하여 각 state 들의 시간에 관한 응답을 확인 할 수 있다

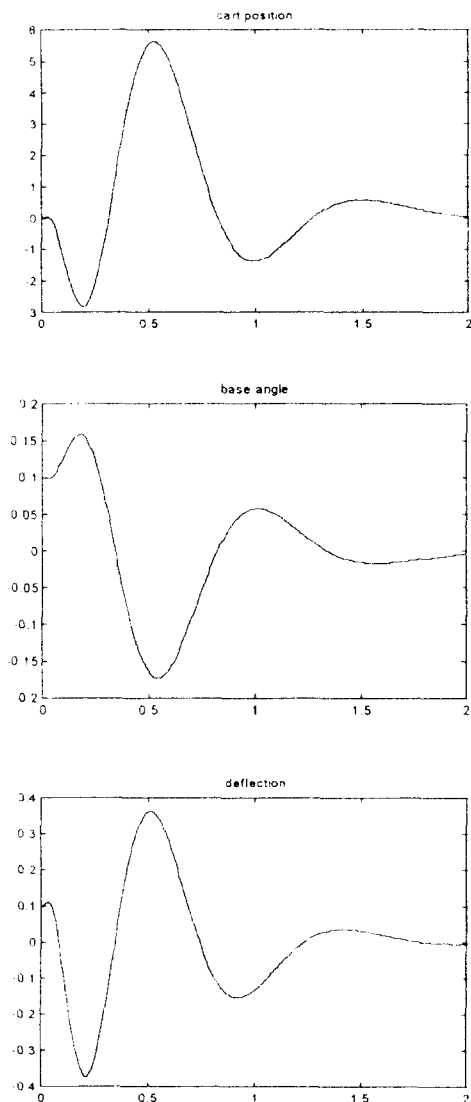


그림 3. cart 의 위치, base angle, deflection 의 시간응답
Fig. 3. time history of cart position, base angle, deflection

5. 결론

flexible stick balancer 를 제어하는데 있어서 다음 두가지 경우가 고려대상으로 여겨진다.

첫째로, observer 를 이용하여 state 를 추정할 것을 들 수 있는데, observer 는 modeling 오차가 적은 경우에만 효과를 최대한 발

휘할 수 있기 때문이다.

둘째로, 고려된 vibration mode 가 first bending mode 1 개라는 점이다. 이것은 system 의 차수가 높아지는 것을 방지하기 위한 불가피한 방법이었는데, 결과적으로 model equation 이 plant 를 정확히 나타내지 못하게 되었다. 따라서 정확한 model equation 을 대상으로 system 의 차수가 높은 경우에도 좋은 성능을 발휘하는 제어기 설계방법이 요구된다.

6. 참고 문헌

- [1] David Wang and M.Vidyasagar, "Transfer Functions for a Single Flexible Link", *the Proceedings of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.1042-1047, 1989
- [2] Eduardo Bayo, "A Finite-Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single-Link Flexible Robot", *Journal of Robotic Systems*, vol.4, pp.63-75, 1987.
- [3] Gordon G.Hastings and Wayne J.Book, "VERIFICATION OF A LINEAR DYNAMIC MODEL FOR FLEXIBLE ROBOT MANIPULATORS", *the Proceedings of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.1024-1029, 1986.
- [4] Gordon G.Hastings and Wayne J.Book, "A Linear Dynamic Model for Flexible Robotic Manipulators", *IEEE Control System Magazine*, pp.61-64, 1987.
- [5] Guo-Ben Yang and Max Donath, "DYNAMIC MODEL OF A ONE-LINK ROBOT MANIPULATOR WITH BOTH STRUCTURAL AND JOINT FLEXIBILITY", *the Proceedings of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.476-481, 1988.
- [6] H.Krishnan and M.Vidyasagar, "CONTROL OF A SINGLE-LINK FLEXIBLE BEAM USING A HANKEL-NORM-BASED REDUCED ORDER MODEL", *the Proceedings of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.9-13, 1988.
- [7] Leonard Meirovitch "ANALYTICAL METHODS IN VIBRATIONS", Macmillan, 1967.
- [8] Leonard Meirovitch, *DYNAMICS and CONTROL of STRUCTURES*", John Wiley & Sons, 1990.
- [9] Leonard Meirovitch, "ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS", 2nd ed.
- [10] Robert H.Cannon and Jr.Eric Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot", *The International Journal of Robotics Research*, vol. 3, No. 3, pp.62-75, 1984.
- [11] Singiresu S.RAO, "MECHANICAL VIBRATIONS", Addison-Wesley, 1995.
- [12] v.v.Korolyv and Y.H.Chen, "ROBUST CONTROL OF A FLEXIBLE MANIPULATOR ARM", *the Proceedings of IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp.159-164, 1988
- [13] WEN-JIEH WANG, SHUI-SHONG LU, AND CHEN-FA HSU, "Experiments on the Position Control of a One-Link Flexible Robot Arm", *JEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 5, pp. 373-377, 1989.
- [14] William L.Brogan, "Modern Control Theory", Prentice Hall, 1991.