

고차 가변구조 제어 시스템에서의 고유치 궤적을 이용한 시변 스위칭 평면 설계

Time-varying Sliding Surface Design using Eigenvalue Locus for High-Order Variable Structure Control Systems

* 이 영 성*, 김 가 규*, 최 봉 열*

*경북대학교 대학원 전자공학과(Tel:950-6553; Fax:950-5505; E-mail : ctrl@ee.kyungpook.ac.kr)

Abstract In this paper, A new time-varying sliding surface design using eigenvalue locus is proposed to achieve fast and robust in a class of high-order uncertain dynamic system. A moving sliding surface(MSS) was proposed earlier for the second-order variable structure control systems(VSCS). This methodology led to fast and robust control responses of the second-order VSCS. However, the moving algorithm of the MSS was too complicated to be employed the high-order VSCS. To resolve this problem, we propose a new moving algorithm that switching surface moves such that the eigenvalues of equivalent system in the sliding mode have a predetermined locus. Using the proposed surface fast and robust behaviors are accomplished. The problem of chattering can be eliminated by using a boundary layer of switching surface. The efficiency of proposed algorithm is illustrated by an application to four-order workbench.

Keywords Variable structure control, Moving sliding surface, Eigenvalue locus

1. 서 론

가변구조 제어(variable structure control)는 스위칭 평면상에서 시스템의 구조를 임의로 변화시켜 슬라이딩 모드라는 특이한 동특성을 얻어내는 제어 방식이다. 슬라이딩 모드 동안은 시스템의 상태를 임의로 변화시켜 시스템의 매개변수 변동이나 외란 등에 상관없이 원하는 동특성을 유지할 수 있는 장점을 가진다. 그러나 시스템의 상태를 스위칭 평면으로 천이시키는 도달 구간에서는 상태가 스위칭 평면에서 벗어나 있어 시스템의 견실성을 보장할 수 없다 [1,2]. 이러한 도달 구간을 감소시키기 위한 많은 연구가 이루어져 왔다 [3,4].

이에 대한 연구로 Slotine과 Sastry [3]는 초기 오차를 영으로 두고 도달 구간을 제거하기 위한 스위칭 평면을 제안하였다. 그러나 이러한 조건은 실제 시스템에서 적용될 수 있는 일반적인 경우가 아니다. 그 뒤 Choi등 [4]은 이차 시스템에 대한 이동 슬라이딩 평면(moving sliding surface; MSS)을 제안하였다. MSS는 초기에 임의의 초기 조건을 지나며 곧이어 미리 정해진 슬라이딩 평면을 향해 회전과 평행이동을 통해 이동함으로써 도달 모드를 감소시켜 견실성과 추적 성능을 향상시켰다. 그러나 위상 평면의 원점을 지나지 않고 절편을 가지는 스위칭 평면에서의 슬라이딩 모드는 추적 오차가 감소되지 않을 수 있다. 따라서 절편을 가지는 스위칭 평면으로써 도달 구간을 감소시키는 방법보다 초기 조건에 따라 위상 평면의 원점을 지나고 최소의 도달 구간을 가지는 시변 스위칭 평면의 설계가 요구된다. 또한 이러한 MSS가 고차 시스템으로 확장될 경우 시변 스위칭 평면에서 결정되어야 할 시변 매개변수의 개수가 차수에 따라 증가하기 때문에 확장에 많은 제약은 받아 왔다.

본 논문에서는 기존에 제안된 이차 시스템에서의 시변 스위칭 평면을 고차로 확장한 새로운 시변 스위칭 평면 설계 알고리즘을 제안한다. 제안된 시변 스위칭 평면은 초기 상태에 대해 도달 구간을 최소화 하는 초기 스위칭 평면에서 시작하여 미리 설정된 고유치를 가지도록 하는 최종 스위칭 평면으로 이동한다. 시변 스위칭 평면 이동 시 슬라이딩 모드에서의 시스템 고유치가 설정된 안정한 궤적을 따르도록 변화시킴으로써 기존의 고정된

스위칭 평면을 이용한 경우보다 상태가 원점으로 수렴하는 시간을 감소시킬 수 있으며 또한 스위칭 평면에 도달하는 도달 모드 구간을 상대적으로 줄임으로써 외란의 영향을 감소시킨다. 그리고 스위칭 평면에서 유계층을 사용함으로써 원하지 않는 제어입력의 떨림 현상(chattering)을 제거하였다. 제안된 방법의 타당성을 입증하기 위해 릴 밸런스 시스템(Reel balance system)에 대해 모의 실험을 해 보았다.

2. 시스템 정의

다음과 같이 표현되는 불확실성 시스템을 고려한다.

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) + D(t) \quad (1)$$

여기서 $y \in R^n$ 는 상태벡터, $u \in R$ 는 제어입력, $A \in R^{n \times n}$ 는 시스템행렬, $B \in R^n$ 는 이득행렬로 행렬쌍 (A, B) 는 완전제어 가능(completely controllable)이다. $D \in R^n$ 는 시스템 매개변수 변동과 외란을 포함하는 불확실성 행렬로 정합 조건(matching condition)을 만족한다고 가정한다.

슬라이딩 모드에서 시스템을 안정화시키는 스위칭 평면의 설계를 위해 시스템 (1)을 다음과 같이 변환한다.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ty \quad (2)$$

여기서 $x_1 \in R^{n-1}$, $x_2 \in R$, 그리고 T 는 다음 식을 만족하는 변환행렬이다.

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 \bar{b}_2 는 영이 아닌 실수이다.

본 논문에서는 식 (2)에 의해 시스템 (1)을 변환한 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}(t) \quad (4)$$

여기서 \bar{A} , \bar{B} , $\bar{D}(t)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{d}_2(t) \end{bmatrix}$$

여기서 불확실성 행렬에서 $|\bar{d}_2| < d_{\max}$ 와 같이 유계되었다고 가정한다.

변환된 시스템 (4)는 다음과 같은 두 종류의 부시스템(subsystem)으로 구성된다.

$$\dot{x}_1(t) = \bar{A}_{11}x_1(t) + \bar{A}_{12}x_2(t) \quad (5)$$

$$\dot{x}_2(t) = \bar{A}_{21}x_1(t) + \bar{A}_{22}x_2(t) + \bar{b}_2u(t) + \bar{d}_2(t) \quad (6)$$

여기서 행렬쌍 (A, B) 는 완전제어 가능이고 $\bar{b}_2 \neq 0$ 으로부터 행렬쌍 $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ 는 완전제어 가능하다.

3. 시변 스위칭 평면을 가지는 고차 VSCS

3.1 고유치 궤적을 이용한 시변 스위칭 평면 설계

본 절에서는 RP(representative point)의 궤도에 따라 시변 스위칭 평면을 적절히 선택하여 짧은 도달 구간을 가짐으로써 불확실성에 견실한 시스템을 얻기 위하여 고차 시스템에 대해 슬라이딩 모드에서의 고유치 궤적을 이용한 시변 스위칭 평면을 설계한다.

고차 시스템 (4)에 대해 다음과 같은 시변 스위칭 평면을 정의한다.

$$\begin{aligned} \sigma_m(\mathbf{x}(t)) &= C(t)\mathbf{x}(t) \\ &= [\alpha(t)C_\ell \ 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (5)와 식 (7)로부터 시스템 (4)는 슬라이딩 모드 동안 다음과 같은 동특성은 가진다.

$$\dot{x}_1(t) = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\alpha(t)C_\ell)x_1(t) \quad (8)$$

시변 스위칭 평면 설계를 위해 먼저 슬라이딩 모드에서의 등가 시스템 (8)의 고유치가 안정하도록 하는 α 의 범위 ($\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$)을 찾는다. 이러한 α 의 범위 내에서 초기 상태 $\mathbf{x}(t_0)$ 에 대해 $|\alpha C_\ell \mathbf{x}(t_0)|$ 을 최소화 하는 α_0 로부터 초기 스위칭 평면 행렬 $[C_0 \ 1] = [\alpha_0 C_\ell \ 1]$ 과 미리 설정된 고유치를 가지도록 하는 최종 스위칭 평면 행렬 $[C_\ell \ 1]$ 을 설정한다. 초기 스위칭 평면과 최종 스위칭 평면을 설정한 뒤 α 값을 변화시키므로써 초기 스위칭 평면 행렬 $[C_0 \ 1]$ 에서 $\alpha = 1$ 에 해당하는 최종 스위칭 평면 행렬 $[C_\ell \ 1]$ 로 변화시킨다.

또한 α 값의 변화는 α_0 의 값에 따라 두 가지 모드로 나눌 수 있다. α_0 의 값이 1보다 작은 값일 경우 미리 설정된 최종 스위칭 평면을 향해 α 값을 증가시키게 되는데 이러한 모드를 증가 모드(Increasing mode), 이와는 반대로 α_0 의 값이 1보다 큰 값일 때는 미리 설정된 최종 스위칭 평면을 향해 α 값을 감소시키게 되는데 이때의 모드를 감소 모드(Decreasing mode)라 한다.

3.2 시변 스위칭 평면을 이용한 제어 알고리즘

미리 설계된 시변 스위칭 평면에 대해 슬라이딩 모드 존재 조건을 만족하는 제어입력을 적용함으로써 원하는 시스템의 성능을 얻을 수 있다. 슬라이딩 평면에서 슬라이딩 운동이 일어날 존재 조건은 다음과 같다.

$$\alpha(t)\dot{\sigma}(t) < 0 \quad (9)$$

제안된 시변 스위칭 평면 (22)에 대해 슬라이딩 모드 존재 조건 (9)를 만족하는 가변구조 제어입력은 다음과 같다.

$$u(t) = (C(t)\bar{B})^{-1} \{-C(t)\bar{A}\mathbf{x}(t) - k \operatorname{sgn}(\sigma_m(t))\} \quad (10)$$

여기서 $k > d_{\max}$ 이다.

시변 스위칭 평면을 이용한 제어 알고리즘

step 1: 스위칭 평면을 변화시키기 위한 적절한 상수 δ_σ 와 $\Delta\alpha$ 를 결정한다.

step 2: 슬라이딩 모드에서의 원하는 최종 고유치 $\lambda_f = \{\lambda_{f1}, \lambda_{f2}, \dots, \lambda_{f(n-1)}\}$ 로 부터 최종 스위칭 평면 행렬 $[C_\ell \ 1]$ 을 계산한다.

step 3: 스위칭 평면 행렬 $[\alpha C_\ell \ 1]$ 에서 α 에 따른 슬라이딩 모드에서의 고유치 궤적을 구한 뒤 s -평면의 왼쪽에 고유치를 주는 α 의 범위($\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$)를 계산한 다음 구해진 α 의 범위 내에서 $|\alpha C_\ell \mathbf{x}(t_0)|$ 을 최소화 하는 α_0 로부터 초기 스위칭 평면 행렬 $[C_0 \ 1] = [\alpha_0 C_\ell \ 1]$ 을 계산한다.

step 4: α_0 에 따라 모드(mode)를 결정한다.

$\alpha_0 < 1$ 인 경우: 증가 모드(increasing mode)

$\alpha_0 > 1$ 인 경우: 감소 모드(decreasing mode)

step 5: 스위칭 평면 $C(t^-) = [\alpha(t^-)C_\ell \ 1]$ 에 대해 모드에 따라 α_0 에서 시작해서 $\alpha(t)$ 의 값을 다음의 규칙 증가 모드($\alpha_0 < 1$)인 경우:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(t^-) + \Delta\alpha, & \text{if } |C(t^-)\mathbf{x}(t)| \leq \delta_\sigma \\ \alpha(t^-), & \text{if } |C(t^-)\mathbf{x}(t)| > \delta_\sigma \end{cases}$$

감소 모드($\alpha_0 > 1$)인 경우

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha(t^-) - \Delta\alpha, & \text{if } |C(t^-)\mathbf{x}(t)| \leq \delta_\sigma \\ \alpha(t^-), & \text{if } |C(t^-)\mathbf{x}(t)| > \delta_\sigma \end{cases}$$

에 따라 변화시키게 되는데 $\alpha = 1$ 에 해당하는 최종 스위칭 평면에 도착할 때까지 제어를 수행하고 최종 스위칭 평면에 도착하면 스위칭 평면을 고정시킨 뒤 제어입력을 가한다.

교활 본 알고리즘에서 δ_σ 는 상태가 현재 목표된 스위칭 평면에 도달되었는지를 판단하기 위한 상수로써 작으면 상태가 현재의 스위칭 평면에 보다 가깝게 도달된 뒤 스위칭 평면을 변화시키므로써 시스템의 견실성을 증가시킬 수 있지만 스위칭 평면을 최종 스위칭 평면까지 변화시키는데는 더 긴 시간이 걸리게 된다. 반면 δ_σ 가 커질수록 스위칭 평면을 최종 스위칭 평면까지 변화시키는데는 짧은 시간이 걸리지만 시스템의 견실성을 얻을 수 없다. 또한 $\Delta\alpha$ 는 최종 스위칭 평면을 향해 증가시키거나 감소시키게 될 α 의 변화량으로서 δ_σ 처럼 시스템의 성능을 개선하는데 중요한 역할을 한다. 만약 $\Delta\alpha$ 의 값이 작으면 스위칭 평면을 최종 스위칭 평면까지 변화시키는데 긴 시간이 요구되지만 도달 구간을 거의 제거함으로써 시스템의 견실성은 증가하게 된다. 따라서 δ_σ 와 $\Delta\alpha$ 의 적절한 선택이 요구된다.

제안된 시변 스위칭 평면에 대해 슬라이딩 모드 존재 조건을 만족하도록 제어 알고리즘을 수행함으로써 도달 구간을 감소시키고 불확실성을 포함하는 고차 시스템에 대하여 견실한 특성을 얻을 수 있다.

3.3 펄럼 현상을 제거하기 위한 연속 제어입력

제어입력 (10)은 불연속 제어입력으로 인해 스위칭 평면에서 펄럼 현상을 일으킨다. 원하지 않는 펄럼 현상을 제거하기 위해

서 sgn 함수를 다음과 같이 정의된 포화(saturation) 함수로 대체한다.

$$\text{sat}(\sigma_m(t)) = \begin{cases} \sigma_m(t)/\phi, & |\sigma_m(t)| \leq \phi \\ \text{sgn}(\sigma_m(t)), & |\sigma_m(t)| > \phi \end{cases} \quad (11)$$

여기서 ϕ 는 유계층 두께를 나타낸다.

식 (11)의 포화 함수에 의한 연속 제어입력은 다음과 같다.

$$u(t) = (C(t)\bar{B})^{-1} \{-C(t)\bar{A}x(t) - k \text{sat}(\sigma_m(t))\} \quad (12)$$

4. 모의 실험

본 논문에서는 제안된 알고리즘의 타당성을 보이기 위해 그림 1과 같은 릴 밸런스 시스템(Reel balance system) [5]에 대해 모의 실험 해 보았다.

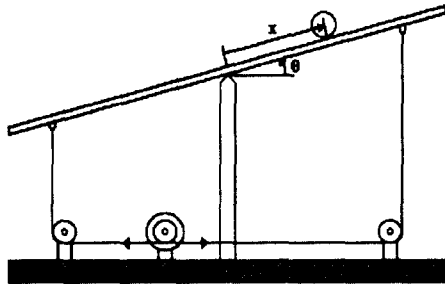


그림 1. 릴 밸런스 시스템
Fig. 1. Reel balance system.

이러한 시스템 모델에 대한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{D}(t) \quad (13)$$

여기서 \bar{A} , \bar{B} , $\bar{D}(t)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.53 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.4 \end{bmatrix}, \bar{D}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{d}_2(t) \end{bmatrix}$$

상태 변수 x 는 다음과 같다.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 x 는 릴의 위치(position of the reel), \dot{x} 는 릴의 속도(velocity of the reel), θ 는 막대의 각(angle of the bar), $\dot{\theta}$ 는 막대의 각속도(angle velocity of the bar)이다.

샘플링 시간 T 를 0.01초로 두고 다음과 같은 초기 조건에 대해 모의 실험한다.

$$x(0)^T = [-1 \ 0 \ 0.2 \ 0] \quad (15)$$

주기적 외란을 고려한 불확실성은 다음과 같다.

$$\bar{d}_2(t) = 0.8 \cos(\pi t) \quad (16)$$

슬라이딩 모드에서의 최종 고유치와 그에 대응하는 최종스위칭 평면 행렬은 다음과 같다.

$$\lambda_f = [-3 \ -4 \ -5], C_f = [9.18 \ 7.19 \ 12 \ 1] \quad (17)$$

떨림 현상을 제거하기 위한 연속 제어입력의 유계층의 두께 $\phi = 0.01$ 이고, 불연속 제어입력의 이득 $k=1$ 이다.

그림 2는 $C = [9.18\alpha \ 7.19\alpha \ 12\alpha \ 1]$ 의 α 의 변화에 따른 슬라이딩 모드에서의 고유치 궤적을 나타내고, s -평면의 왼쪽에 고유치를 주는 α 의 범위($\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$)는 $\alpha_{\min} = 0.107$ 에서 $\alpha_{\max} = \infty$ 까지이고, step 3에 의해 구해진 α_0 는 0.107로서 증가

모드의 시변 스위칭 평면에 적용된다.

그림 3은 고정된 스위칭 평면과 시변 스위칭 평면에 대해 릴 밸런스 시스템 시스템에 모의 실험한 결과이다. 여기서 스위칭 평면을 변화시키기 위한 상수들은 $\Delta\alpha = 0.01$, $\delta_\alpha = 0.01$ 로 선택되었다. 그림 3의 (a), (b)는 변수 x_1 , x_3 의 상태 궤적을 나타낸 것으로 제안된 시변 스위칭 평면을 이용한 제어 알고리즘이 고정된 스위칭 평면을 이용한 경우보다 빠른 수렴 시간을 가지게 됨을 알 수 있다. 그림 3의 (c)는 제어입력을 보여주고 있다. 그림 3의 (d)는 스위칭 함수에 대한 결과를 나타낸 것으로 제안된 시변 스위칭 평면을 이용한 방법이 기존의 고정된 스위칭 평면을 사용하는 방법보다 도달시간이 감소함을 볼 수 있다. 그림 2의 (e)는 α 값의 변화를 보여주는 것으로 증가 모드임을 나타내고 있다.

그림 4는 식 (10)의 $\text{sgn}(\sigma_m(t))$ 를 $\text{sat}(\sigma_m(t))$ 로 대체한 연속 제어입력 (12)을 사용함으로써 상태 궤적의 큰 변화없이 원하는 제어입력의 떨림 현상이 제거되었음을 알 수 있다.

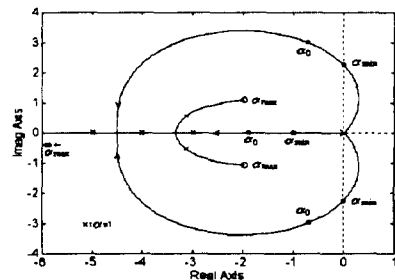


그림 2. 고유치 궤적
Fig. 2. Eigenvalues locus.

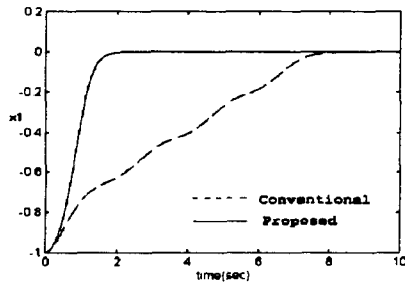
5. 결론

본 논문에서는 기존에 제안된 이차 시스템에서의 MSS를 고차로 확장한 새로운 시변 스위칭 평면을 설계하는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 슬라이딩 모드에서의 시스템 고유치가 설정된 궤적을 따르도록 하는 시변 스위칭 평면을 설계한다. 설계된 시변 스위칭 평면은 초기 상태에 따라 최소의 도달 구간을 가짐으로서 불확실성에 대해 견실한 장점을 가지며 빠른 수렴특성을 가진다.

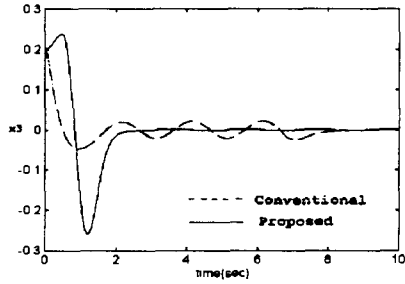
제안된 알고리즘의 타당성을 입증하기 위해 릴 밸런스 시스템에 모의 실험하였다. 또한 스위칭 평면에서 유계층을 사용함으로써 원하는 제어입력의 떨림 현상을 제거하였다.

6. 참고 문헌

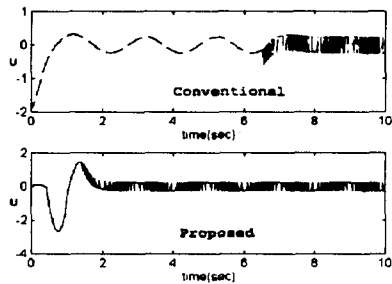
- [1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. AC-22, pp. 212-222, 1977.
- [2] J. Y. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no.1, pp. 2-22, 1993.
- [3] Slotine, J. C. and S. S. Sastry, "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *Int. J. of Control*, vol. 35, pp.1345-1350, 1983.
- [4] S. B. Choi, D. W. Park, "A Time-varying sliding surface for fast tracking control of second-order uncertain systems," *Automatica*, vol. 30, pp. 899-904, 1994.
- [5] *Balance Control Work Bench Version 2 User's Guide*, CAMO A/S, 1991.



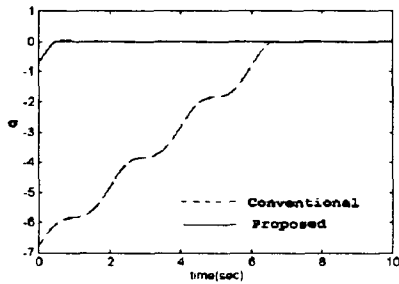
(a) x_1 의 상태 궤적



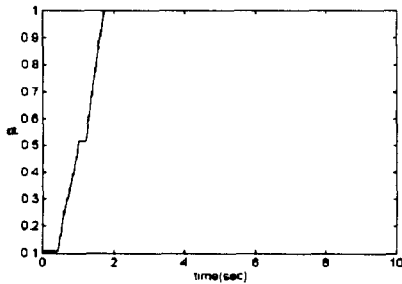
(b) x_3 의 상태 궤적



(c) 제어입력

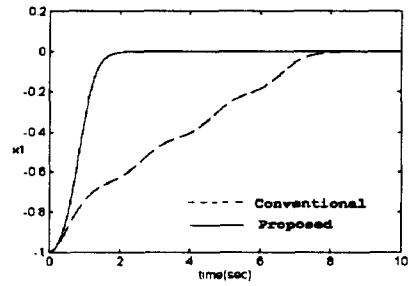


(d) 스위칭 함수

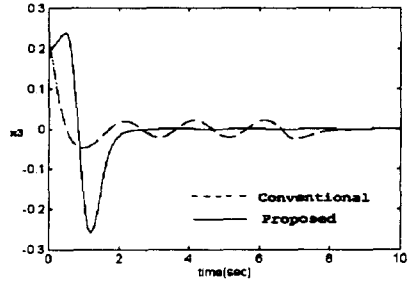


(e) $\alpha(t)$

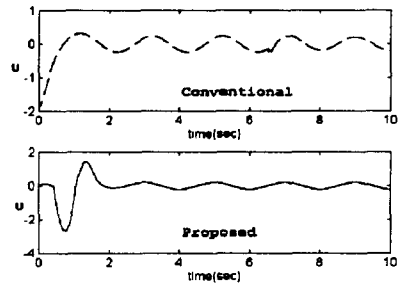
그림 3. 고정된 스위칭 평면과 시변 스위칭 평면
Fig. 3. Fixed switching surface and time-varying switching surface.



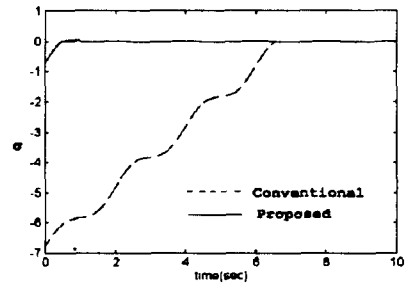
(a) x_1 의 상태 궤적



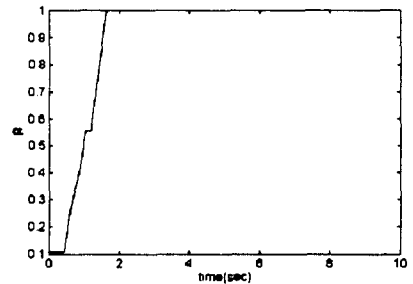
(b) x_3 의 상태 궤적



(c) 제어입력



(d) 스위칭 함수



(e) $\alpha(t)$

그림 4. 고정된 스위칭 평면과 시변 스위칭 평면 (유계층)
Fig. 4. Fixed switching surface and time-varying switching surface (boundary layer).