

## DC 전동기를 위한 PID 학습제어기

### A PID Learning Controller for DC Motors

백승민\*, 이동훈\*, 국태용\*

\*성균관대학교 전자공학과 (Tel: 0331-290-7202; Fax: 0331-290-7191; E-mail tykuc@yurim.skku.ac.kr)

**Abstract** With only the classical PID controller applied to control of a DC motor, a good (target) performance characteristic of the controller can be obtained, if all the model parameters of DC motor and operating conditions such as external load torque, disturbance, etc. are exactly known. However, in case when some of system parameters or operating conditions are uncertain or unknown, the fixed PID controller does not guarantee the good performance which is assumed with precisely known system parameters and operating conditions. In view of this and robustness enhancement of DC motor control system, we propose a PID learning controller which consists of a set of learning rules for PID gain tuning and learning of an auxiliary input. The proposed PID learning controller is shown to drive the state of uncertain DC motor system with unknown system parameters and external load torque to the desired one globally asymptotically. Computer simulation results are given to demonstrate the effectiveness of the proposed PID learning controller, thereby showing whose superiority to the conventional fixed PID controller.

**Keyword** Learning control, PID tuning, DC motor

#### 1. 서론

현재 플랜트 제어에 쓰이는 대부분의 제어기는 PID 제어기이다. PID 제어기는 각 파라미터가 잘 알려진 플랜트에 대해서는 원하는 응답을 얻도록 정확한 설계가 가능하고 안정적으로 동작한다. 하지만 실제 플랜트의 모델과 정확한 파라미터 값들을 찾기는 쉽지 않다. 그래서 1942년 J.G.Ziegler와 N.B.Nicols[5,10]가 PID 튜닝을 시작한 이래로 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. Ziegler-Nicols 방법과 같은 개루프 튜닝 방법은 반복적인 실험을 통하여 PID 이득을 구해야 하는데 실제의 플랜트에서 반복 실험을 통해 정확한 값을 산출하기는 지극히 힘들다. 이런 이유로 Astrom 과 Hagglund[2]가 1984년 처음으로 폐루프 시스템을 도입하여 임계이득(ultimate gain)과 임계주파수(ultimate frequency)의 근사값을 결정하는 방법을 사용하였고 그 이후 최근에는 주로 폐루프 방식을 채택하는 추세이며 튜닝 기법도 자기적응제어(Self-Adaptive)기법[3,6], 자기동조(Self-tuning)방법[1,8], 전문가시스템 응용[9], 퍼지알고리즘 응용[4], 신경망 응용[7] 등 다양해지고 있다.

본 논문에서는 파라미터를 알 수 없는 DC 모터의 제어기로 PID 튜닝 제어기와 학습제어기의 혼합형태를 갖는 제어기를 제안한다. 또 제안한 제어기의 안정성을 보이고 모의실험을 통하여 미지의 부하와 파라미터변동등 여러 조건에서 수렴성, 강인성 등의 동작특성을 기존의 PID 제어기와 비교, 분석한다.

#### 2. DC 모터 모델과 PID 학습제어기

다음과 같이 기술되는 PM DC 모터의 모델을 고려하자.

$$\begin{aligned} Li_a' + Ri_a + K_b\dot{\theta} &= v_a \\ J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K_c\theta + T_l &= K_a i_a = T_a \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 입출력변수와 상태변수, 전기적·기계적 파라미터는 다음과 같이 정의된다.

$v_a$ : 입력전압	$i_a$ : 전기자전류
$\theta$ : 회전각	$T_a$ : 출력토크
$T_l$ : 미지의 부하토크	$L$ : 미지의 전기자 인덕턴스
$R$ : 미지의 전기자저항	$K_a$ : 미지의 토크상수
$K_b$ : 미지의 역기전력상수	$K_c$ : 미지의 탄성계수
$J$ : 미지의 모터관성	$B$ : 미지의 마찰계수

이러한 DC 모터에 대하여, 이 논문에서 해결하고자 하는 문제는 미지의 파라미터와 외란토크를 갖는 DC 모터 시스템이 목표위치 궤적  $\theta_d$ 를 추종하는 강인한 PID 학습 제어기를 구성하는 것이다. 이를 위하여 우선, 뒷식에서 전기적인 시상수가 기계적인 시상수보다 충분히 작다고 가정 ( $L \approx 0$ )하고 식(1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{J}(B + \frac{K_a K_b}{R})\dot{\theta} + \frac{K_c}{J}\theta + \frac{1}{J}T_l = \frac{K_a}{JR}v_a \quad (2)$$

이제  $a = \frac{1}{J}(B + \frac{K_a K_b}{R})$ ,  $b = \frac{K_c}{J}$ ,  $c = \frac{1}{J}T_l$ ,  $d = \frac{K_a}{JR}$ 으로 치환하고 식(2)를 다시 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b\theta + cT_l = dv_a \quad (3)$$

학습제어입력과 PID 제어기로 구성되는 전압  $v_a$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$v_a = K_p e + K_I \int e + K_D \dot{e} + v_i \quad (4)$$

여기서  $e = \theta_d - \theta$ 이다.

입력(4)를 사용하여 식(3)을 다시 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ddot{e} + (dK_D + a)\dot{e} + (dK_P + b)e + dK_I \int e \\ = \ddot{v}_d - d\dot{v}_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $V_a$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$V_d \equiv \ddot{\theta}_d + a\dot{\theta}_d + b\theta_d + cT_I$$

식(5)에서  $a_0 = dK_D + a$ ,  $b_0 = dK_P + b$ ,  $c_0 = dK_I$ 를 정의하고 치환하면 식(6)을 얻는다.

$$\dot{e} + a_0\dot{e} + b_0e + c_0 \int e = V_d - dv_t \quad (6)$$

이제 오차시스템(6)의 제차방정식이 목표응답특성을 갖도록 하는 계수 및 PID 이득  $\{a_0^* = dK_D^* + a, b_0^* = dK_P^* + b, c_0^* = dK_I^*\}$ 를 가정하면 식(6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e} + a_0^*\dot{e} + b_0^*e + c_0^* \int e = \\ (a_0^* - a_0)\dot{e} + (b_0^* - b_0)e + (c_0^* - c_0) \int e + V_d - dv_t \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)을 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e} + a_0^*\dot{e} + b_0^*e + c_0^* \int e = \\ d\tilde{K}_D\dot{e} + d\tilde{K}_Pe + d\tilde{K}_I \int e + d\tilde{v}_t \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\tilde{K}_D = K_D^* - K_D$ ,  $\tilde{K}_P = K_P^* - K_P$ ,  $\tilde{K}_I = K_I^* - K_I$ ,  $\tilde{v}_t = v_d - v_t$ ,  $v_d = \frac{1}{d} V_d$ 이다.

식(8)을 상태공간표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + dBw^T\tilde{K} + dB\tilde{v}_t \\ y = Cx \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $x = \begin{bmatrix} \int e \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0^* & -b_0^* & -a_0^* \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

$C = [h_0 \ h_1 \ h_2]$ ,  $\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_I \\ \tilde{K}_P \\ \tilde{K}_D \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} \int e \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$ 이다. 행렬  $A$

가 Hurwitz이므로 출력벡터  $C$ 는 시스템  $(A, B, C)$ 가 SPR(strictly positive real)조건을 만족하도록 정의한다. 즉, 시스템  $(A, B, C)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} A^T P + PA = -Q \\ C = B^T P \end{aligned}$$

여기서  $P, Q$ 는 양의 대칭행렬이다.

이제 PID 이득과 보조제어입력  $V_t$ 의 학습규칙을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = K(t-T) + \Lambda_1 w y(t) \\ \dot{v}_t(t) = v_t(t-T) + \Lambda_2 \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 학습이득  $\Lambda_1, \Lambda_2$ 는 각각 대각원소를 지닌 양의 한정 행렬과 상수이다. 위에 제안한 제어기의 구조를 그림 1에서 블록선도로 나타내었다.

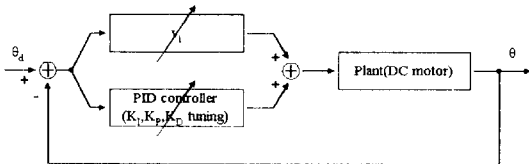


그림 1. PID 학습제어기의 블록선도

Fig 1. Block diagram of PID learning controller

### 3. PID 학습제어기의 안정성

이 장에서는 제안한 PID 학습제어기의 안정성 및 오차신호의 수렴성을 증명하고자 한다.

우선 식(9)에 주어진 시스템에 대하여 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(t) = x^T P x \\ + \int_{t-T}^t d[\tilde{K}^T(\tau)\Lambda_1^{-1}\tilde{K}(\tau) + \tilde{v}_t^T(\tau)\Lambda_2^{-1}\tilde{v}_t(\tau)]d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $T$ 는 샘플링주기이다. 식(11)을 식(9)에 대하여 미분하면 SPR조건으로부터

$$\begin{aligned} \dot{V} = -x^T Q x + d [2y^T(w^T\tilde{K}(t) + \tilde{v}_t) \\ + \tilde{K}^T(t)\Lambda_1\tilde{K}(t) + \tilde{v}_t^T(t)\Lambda_2\tilde{v}_t(t) \\ - \tilde{K}^T(t-T)\Lambda_1\tilde{K}(t-T) - \tilde{v}_t^T(t-T)\Lambda_2\tilde{v}_t(t-T)] \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다.

충분히 빠른 샘플링주기  $T$ 에 의하여  $v_d(t) - v_d(t-T) \approx 0$ 으로 가정하고, 식(12)에 식(10)의 학습제어규칙을 적용하여 풀어보면 결과적으로 다음의 식을 얻는다.

$$\dot{V} = -x^T Q x - d [y^T(t)\Lambda_2 y(t) + [w y(t)]^T \Lambda_1 [w y(t)]] \quad (13)$$

식(13)은  $\Lambda_1$ 이 대각원소를 지닌 양의 한정 행렬이고  $\Lambda_2$ 가 양수이므로 0보다 작거나 같게 된다. 따라서 모든 학습신호 및 오차신호  $x, \dot{x}$ 가 유계이고  $x \in L_2$ 이다. 즉, 오차벡터  $x$ 는 점근적으로 수렴한다.

### 4. 모의실험 결과

이 장에서는 제안한 학습제어기의 성능을 일반적인 PID 제어기와 비교, 분석하기 위하여 모의실험을 행한다.

모의 실험에 사용한 플랜트인 DC 모터의 각 상수값과 제한조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L = 1.3 \times 10^{-2}, \quad R = 1.2 \times 10^2, \quad J = 4.9 \times 10^{-3}, \\ B = 3.35 \times 10^{-1}, \quad K_a = 4.77 \times 10^{-1}, \quad K_b = 4.77 \times 10^{-1}, \quad K_c = 0, \\ -80 \leq v_a \leq 80 \end{aligned}$$

일반적인 PID 제어기에서 PID 이득 값은 위의 DC 모터 모델 파라미터를 안다고 가정하고 특성방정식이  $(s+1)^2(s+100)=0$ 을 만족하도록  $K_I = 12.3270$ ,  $K_P = 24.7774$ ,  $K_D = 3.6689$ 로 정했다.

식(10)의 형태를 가지는 PID 학습제어기에서 PID 이득들의 제한조건을  $0 \leq K_I \leq 500$ ,  $0 \leq K_P \leq 1000$ ,  $0 \leq K_D \leq 100$ 로 두고 학습이

득은  $\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda_2 = 100$ 이다. 출력벡터  $C$ 의 세항

$h_0, h_1, h_2$ 는 SPR조건에서  $h_0 = 5.0 \times 10^{-3}$ ,  $h_1 = 7.5 \times 10^{-3}$ ,  $h_2 = 4.975 \times 10^{-3}$  같이 구해진다.

모의실험은 DC 모터에 부하가 없을 때와 변동하는 부하가 있을 때, 요구된 궤적이 계단형태일 때와 정현파 형태의 입력일 때로 나누어서 기존의 PID 제어기와 PID 학습제어기를 비교해 보았다. 아래의 모든 경우에서 기존의 PID 제어기는 모터 파라미터를 아는 경우의 실제와 응답이고 PID 학습제어기는 미지의 모터 파라미터와 부하토크라는 조건하의 응답이다.

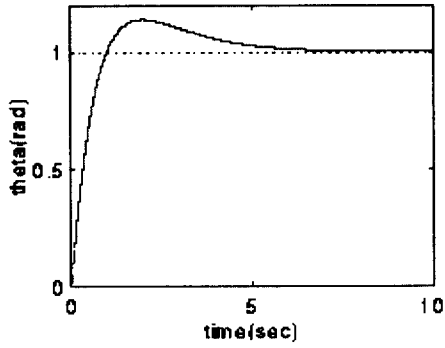


그림 2. 기존 PID 제어기에 요구케적이 계단형태이고 부하가 없는 경우의 응답  
 Fig 2. Response of the classical PID controller to a unit step input without load torque.

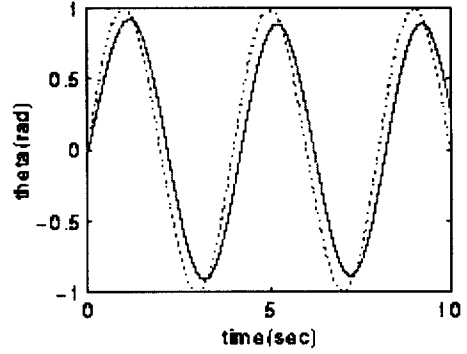


그림 5. PID 학습제어기에 요구케적이 정현파이고 부하가 없는 경우의 응답  
 Fig 5. Response of the PID learning controller to a sinusoidal input without load torque.

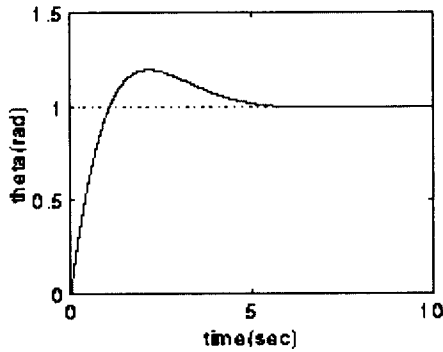


그림 3. PID 학습제어기에 요구케적이 계단형태이고 부하가 없는 경우의 응답  
 Fig 3. Response of the PID learning controller to a unit step input without load torque.

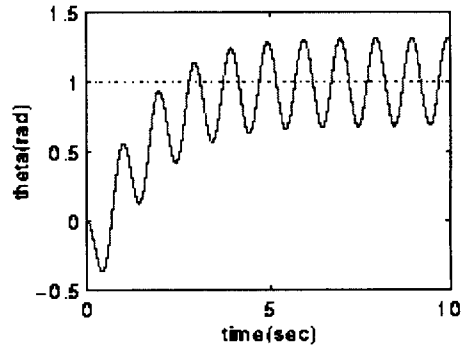


그림 6. 기존 PID 제어기에 요구케적이 계단 형태이고 정현파 부하토크가 있는 경우의 응답  
 Fig 6. Response of the classical PID controller to a unit step input with sinusoidal load torque variation

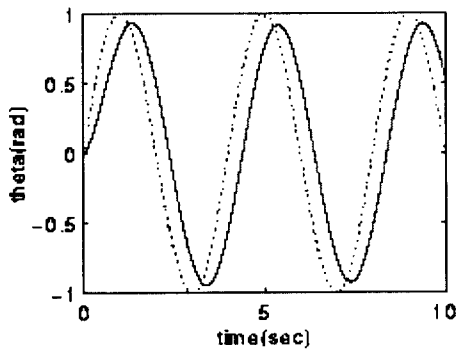


그림 4. 기존 PID 제어기에 요구케적이 정현파이고 부하가 없는 경우의 응답  
 Fig 4. Response of the classical PID controller to a sinusoidal input without load torque.

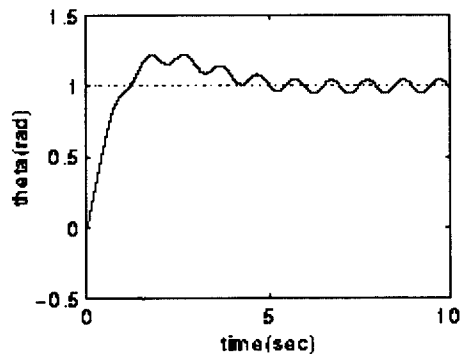


그림 7. PID 학습제어기에 요구케적이 계단 형태이고 정현파 부하토크가 있는 경우의 응답  
 Fig 7. Response of the PID learning controller to a unit step input with sinusoidal load torque variation

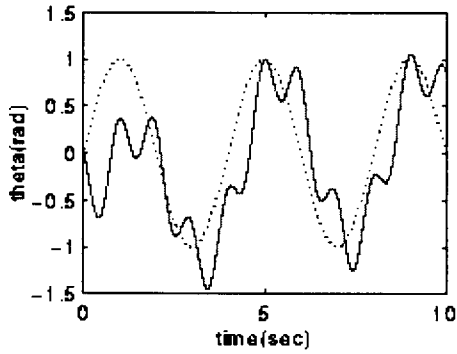


그림 8. 기존 PID 제어기에 요구궤적이 정현파 이고 정현파 부하토크가 있는 경우의 응답  
Fig 8. Response of the classical PID controller to a sinusoidal input with sinusoidal load torque variation

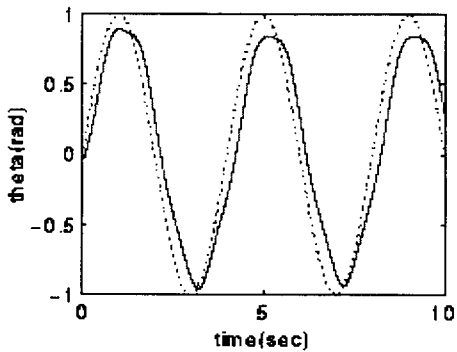


그림 9. PID 학습제어기에 요구궤적이 정현파 이고 정현파 부하토크가 있는 경우의 응답  
Fig 9. Response of the PID learning controller to a sinusoidal input with sinusoidal load torque variation

그림의 응답을 비교하면 부하가 없을 때는 두 제어기가 큰 차이를 보이지는 않지만 학습제어기가 요구된 궤적을 좀 더 빨리 쫓아가는 것을 알 수 있다. 그리고 부하에 변동이 있을 때는 PID 학습제어기가 확실히 우수한 성능을 보인다. PID 학습제어기의 설계에서  $A_1$ 의 이득을 키울수록 PID 이득 변화에 대한 영향이 커지고,  $A_2$ 를 키울수록 부하변동에 대해 강인한 특성을 보인다. 단,  $A_1$ 과  $A_2$ 를 너무 크게 잡으면 입력변화가 너무 커서 과도상태에서 좋지 않은 특성을 보일 수도 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 보조학습제어입력과 이득 값이 변하는 PID 제어입력을 동시에 사용하여 DC 모터를 제어하는 PID 학습제어기를 구성하였다. 또 SPR(Strictly Positive Real)조건과 Lyapunov 함수를 이용하여 제안한 제어기의 안정성을 증명하였고 모의실험을 통하여 효용성을 보였다. 제안한 PID 학습제어 알고리즘은 외부 부하의 변동과 파라미터의 불확실성, 변동에도 강인한 특성을 가지며 동작조건에 따라 달라지는 PID 이득이 학습에 의하여

자동 조절되므로 미지의 플랜트에서도 적용이 가능한 방법이다. 이 알고리즘의 또 다른 장점은 학습규칙이 단순하여 계산시간이 빠르다는 것이다. 아무리 좋은 알고리즘이라고 해도 계산시간이 오래 걸린다면 실제 구현하는데 있어서도 그만큼 빠른 프로세서를 사용해야 하므로 제품의 가격이 올라가거나 구현 자체가 불가능해질 수도 있다. 제안한 학습 알고리즘은 일반적인 PID 제어기에 PID 제어 이득의 튜닝과 외란 등을 학습하고 보상하는 간단한 학습규칙만을 가지고 있어서 현재 제어에 사용되고 있는 소형 마이크로프로세서들에 탑재가 가능하므로 실험과 병행하여 그 구현을 진행중이다.

## 참고 문헌

- [1] K.L.Anderson, "A rule-based adaptive PID controller," *IEEE control system and magazine*, pp.564-569, 1988.
- [2] K.J.Astrom & T. Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins," *Automatica*, 20, pp.645-651, 1984.
- [3] K.J.Astrom, "Industrial adaptive controllers based on frequency response techniques," *Automatica*, vol.27, no.4, pp.599-609, 1991.
- [4] K.J.Astrom, "Intelligent tuning and adaptive control," 1992, 10,12-14, *workshop in Seoul, Korea*.
- [5] G.E.Coon, "How to find controller setting from process characteristics," *Control Eng*, pp.66-76, 1956.
- [6] Nichols J.Krikelis, "Microprocessor Implementation of PID controllers and lead-lag compensators," *IEEE Trans. on Industrial electronics*, vol.IE-31, no.1, pp.79-85, 1984. and *systems(51)*, pp.29-40, 1992..
- [7] T.Yamamoto & M.Kaneda & T.Oki, "A self-tuning PID controller fused artificial neural networks," *IFAC conference*, 1996.
- [8] P.Vaga, "Self-tuning predictive PID controller," *IEEE Proceeding-D*, vol.138, no.3, pp.303-311,1991.
- [9] Zhen-Yu, "Fuzzy gain scheduling of PID controllers," *IEEE Trans. on systems, man, & Cybernetics*, vol.23, no.5, pp.1392-1398, 1993.
- [10] J.G.Ziegler & N.B.Nicols, "Optimum setting for automatic controllers," *Trans. ASME*, pp.759-765, 1942.