Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

정량적 추적자-회피자 게임을 위한 수치해석기
A Numerical Solver for Quantitative Pursuit-Evasion Game

°이 훈 구*, 탁 민 제*

*한국과학기술원 항공우주공학과 (Tel:+82-42-869-3758,Fax:+82-42-869-3710,E-mail: hglee@fdcl.kaist.ac.kr)

Abstracts In this paper, a numerical method is developed to solve the 2 dimensional missile/target pursuit-evasion game. The numerical solver for the problem is composed of two parts: parametrization of the kinematic equations of motion using collocation and optimization of the parametrized minimax problem using a nonlinear programming. A numerical example is solved to verify the performance of the proposed numerical scheme.

Keywords Quantitative Game, Pursuit-Evasion Game, Collocation, Nonlinear Programming

1. 서 론

추적자-회피자 게임 이론은 미사일의 호우밍 유도 단계에서 미사일과 표적의 요격문제를 미분 게임 (differential game)으로 취급하는 것을 말한다 [8]. 이러한 추적자-회피자 게임은 한 player 는 주어진 성능 지수를 최대화하려고 하고 다른 player 는 최소화하려는 2-player 게임으로 표현되는데 이를 다루는 기법에는 크게 두가지가 있다. 첫번째 접근 방법은 정성적 미분 게임(qualitative end game)으로 추적자가 표적을 잡을 수 있는지 여부를 판단하여 요격 영역(no escape envelope)을 산출하는 것을 목적으로 한다. 또 다른 접근 방법은 정량적인 평가 지수가 존재하는 정량적 미분 게임(quantitative end game)이다.

최적 제어에서와 비슷하게 정량적 게임 이론을 다루기 위해서는 직접적 방법과 간접적 방법을 주로 사용한다. 직접적 방법은 유한한 파라미터 집합을 변화시켜 최적의 제어 입력을 산출하는 기법인 반면 [9, 2] 간접적 방법은 최적화의 필요조건으로부터 구성되는 이점 경계치 문제(TPBVP: two point boundary value problem)를 푸는 기법이다 [10]. 이 두가지 기법 중 최근의 급격히 향상되는 컴퓨터의 계산능력으로 인해 직접적 방법이 더 유망하다. 특히 미분 게임을 파라미터화 하여 유한 차원에서 saddle point 를 구하는 기법이 최근 제안되고 있다 [5]. 그러나 아직까지는 유한 차원에서의 saddle point 해를 구하는 효과적인 알고리듬은 개발되지 못하고 있다.

본 논문에서는 2차원 미사일/표적 추적자-회피자 문제를 직접적 기법을 이용한 수치해석기를 개발하였다. 이산화 기법으로는 collocation 기법을 적용하였고 파라미터화 된 문제의 최적화 기법으로는 SQP (sequential quadratic programming) 를 사용하였다. 2-player 문제를 다룰때 발생하는 minimax 최적화를 위해 새로운 최적화 방법을 제안하였으며 이 방법의 타당성을 보이기 위해 수치 예제를 제시하였다.

2. 미사일/표적 모델

본 논문에서 고려한 2차원 평면상에서의 미사일/표적 요격 상황은 그림 1 과 같다.

이 경우 표적의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

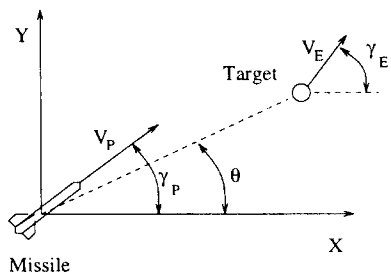

그림 1: 2차원 평면에서의 미사일/표적 요격 상황

$$\begin{aligned} \dot{X}_E &= V_E \cos\gamma_E \\ \dot{Y}_E &= V_E \sin\gamma_E \\ \dot{\gamma}_E &= \Gamma_E u_E, \quad |u_E| \le 1 \\ \dot{V}_E &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 Γ_E 는 표적의 최대 회전율이고 X_E, Y_E 는 회피하는 표적 위치의 직교좌표계 성분들이다. γ_E 는 표적의 경로각이고 V_E 는 표적의 속력이다. u_E 는 무차원화된 표적의 입력이다. 식 (1) 로 표현되는 표적의 모델은 구동기의 시간지연이 없고 일정한 속력으로 움직이며 미사일을 피해 회전운동하는 모델이다.

한편, 추적자인 미사일의 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_P &= V_P \cos\gamma_P \\ \dot{Y}_P &= V_P \sin\gamma_P \\ \dot{\gamma}_P &= \frac{V_P}{R_P} u_P, \quad |u_P| \le 1 \\ \dot{V}_P &= -\frac{V_P^2}{R_P}(a + b u_P^2) \end{aligned} \tag{2}$$

여기에서 R_P 는 미사일의 최소 회전 반경이고 X_P, Y_P, γ_P, V_P 및 u_P 는 해당하는 미사일의 상태변수 및 제어 입력들이다. 상수 a 와 b 는 다음과 같이 정의되고

$$a = \frac{C_{D_0}}{C_{L_{\max}}}, \quad b = K C_{L_{\max}} \tag{3}$$

C_{D_0} 는 미사일의 항력 계수, $C_{L_{\max}}$ 는 미사일의 최대 양력 계수이다. 식 (2) 에 표현된 미사일 모델은 참고문헌 [6] 에 나타난 유도 항력(induced drag) 효과를 포함한 모델이다.

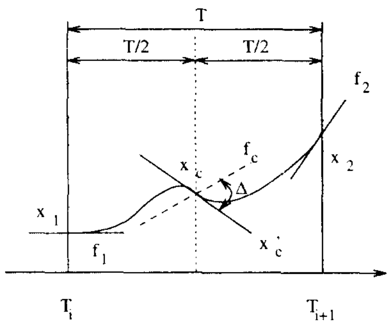

그림 2: collocation 기법에서의 defect 정의

이제 식 (1) 과 (2) 를 다음의 관계식을 이용하여

$$\begin{aligned} X &= X_E - X_P \\ Y &= Y_E - Y_P \end{aligned} \tag{4}$$

결합한다. 여기에서 X 및 Y 는 직교좌표계에서의 미사일에서 표적까지의 상대 거리 성분들이다. 결과적으로 결합된 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= V_E \cos\gamma_E - V_P \cos\gamma_P \\ \dot{Y} &= V_E \sin\gamma_E - V_P \sin\gamma_P \\ \dot{\gamma}_E &= \Gamma_E u_E, \quad |u_E| \le 1 \\ \dot{\gamma}_P &= \frac{V_P}{R_P} u_P, \quad |u_P| \le 1 \\ \dot{V}_P &= -\frac{V_P^2}{R_P}(a + b u_P^2). \end{aligned} \tag{5}$$

최종적으로 유도된 식 (5) 는 minimax 최적화 문제의 운동 구속조건으로 사용된다.

3. Collocation을 이용한 문제의 파라미터화

정량적인 추적자-회피자 게임은 minimax(혹은 maximin) 최적화 문제로 표현된다 [8]. 이 경우 성능 지수는 J 로 표기하고 요격 시간, 혹은 miss distance 와 같은 정량적인 값을 갖게 된다. 추적자 및 회피자의 최적 입력인 u_E^* 와 u_P^* 는 다음의 관계식을 만족하도록 결정된다.

$$\min_{u_P^*} \max_{u_E^*} J = \max_{u_E^*} \min_{u_P^*} J \tag{6}$$

식 (6) 의 최적화는 식 (5) 로 표현되는 운동 구속 조건 및 $h(x) = 0$, $g(x) \le 0$ 등의 대수적 구속조건하에서 수행된다.

이러한 최적화 문제의 가장 일반적인 수치 해법은 소위 간접적 기법이라 불리는 필요 조건으로부터 얻어지는 이점 경계치 문제(TPBVP)를 푸는 것이다. 반면 최근들어 비선형 파라미터 최적화 기법을 사용하는 직접적 기법이 많은 문제에 적용되고 있다 [9, 2]. 직접적 기법을 적용하기 위해서는 짧은 시간 영역에서 상태변수의 궤적을 다항식으로 근사하도록 파라미터화 하는 과정이 필요하다. 본 논문에서는 식 (5) 로 표현되는 지배 방정식을 파라미터화 하기 위해 collocation 기법을 적용하였다.

그림 2 에는 collocation 을 이용한 근사화 과정이 나타나 있다. collocation 을 이용한 근사화의 기본 개념은 작은 시간 영역 $[T_i, T_{i+1}]$ 사이에서 운동 방정식의 상태변수 궤적을 3차의 다항식으로 근사화하는 것이다. 결과적으로 시간 영역 중간에서 defect 는 다음과 같이 계산되고

$$\begin{aligned} \Delta &= f_c - x_c' \\ &= f_c + 3(x_1 - x_2)/2T - (f_1 + f_2)/4 \end{aligned} \tag{7}$$

x_1 과 x_2 를 변화시켜 $\Delta = 0$ 을 만족시키게 된다. 이러한 파라미터화 과정을 통해 식 (5) 와 같은 운동 구속조건은 대수적 구속조건으로 바뀌게 되고 여기에 파라미터 최적화 기법을 쉽게 적용할 수 있다. 전환된 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

다음을 만족하는 $u_{E_1}^*, \ldots, u_{E_N}^*$ 및 $u_{P_1}^*, \ldots, u_{P_N}^*$ 을 찾는다.

$$\min_{u_{P_1},\ldots,u_{P_N}} \max_{u_{E_1},\ldots,u_{E_N}} J$$

subject to

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= 0 \\ h(x) &= 0 \\ g(x) &\le 0. \end{aligned}$$

여기에서
$x = (x_0^T, x_1^T, \ldots, x_N^T, u_{P_1}, \ldots, u_{P_N}, u_{E_1}, \ldots, u_{E_N})^T$ 는 파라미터 벡터이고 N 은 나누어진 시간 영역의 갯수이다.

4. Minimax 최적화 방법

이 절에서는 2차원 미사일/표적 추적자-회피자 게임을 풀기 위한 minimax 최적화 방법을 제시하였다.

우선 성능 지수 J 를 다음과 같이 선택한다.

$$J = W_1 t_f + W_2 x_f + W_3 \sum_{i=1}^{N} u_{P_i}^2 \tag{8}$$

여기에서 W_1, W_2 및 W_3 는 상수의 가중치들이다. t_f 는 요격 시간이고 x_f 는 miss distance 이다.

본 논문에서 제안한 minimax 최적화 방법은 최적의 추적자 및 회피자의 기동 방식을 결정하기 위해 주어진 성능지수를 교대로 최소화/최대화 시켜나가는 것이다. 자세한 과정은 다음과 같다.

1. 초기 파라미터값 x_{init} 을 정한다.
2. u_{E_i} 를 고정시키고 다음을 만족하는 u_{P_i} 를 결정한다.

$$\min_{u_{P_1},\ldots,u_{P_N}} J$$

3. u_{P_i} 및 t_f 를 결정하고 다음을 만족하는 u_{E_i} 를 결정한다.

$$\max_{u_{E_1},\ldots,u_{E_N}} J$$

4. 모든 $i = 1, \ldots, N$ 에 대해 $|u_{E_i}| = 0, 1$ 인지 확인한다. 만족하지 않으면 2로 돌아가고 만족하면 최적화 과정을 끝낸다.

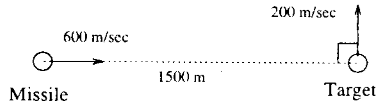

그림 3: 수치 예제의 초기 조건

과정 1에서 초기 파라미터값은 모두 0으로 정하고 상대 거리 값들은 초기의 미사일과 표적간의 상대거리가 선형으로 감소하도록 정한다. 또한, 초기의 t_f 는 미사일이 초기의 속력을 유지하여 요격한다고 생각하여 $t_{f_0} = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}/V_{P_0}$ 와 같이 정한다. 여기에서 X_0 및 Y_0 는 초기의 상대거리 성분들이고 V_{P_0} 는 초기의 미사일 속력이다. 과정 2는 종말 시간이 결정되지 않은 추적자 문제이다. 종말시간이 결정되지 않은 경우의 최적화는 t_f 를 하나의 상태변수로 취급하여 이를 운동 방정식에 포함시킨 형태를 사용한다. 과정 3에서는 미리 결정된 t_f 하에서 표적이 미사일의 추적을 회피하기 위한 최대한의 기동을 갖도록 결정한다. 이 과정에서 종말 시간을 고정시킨 것은 유한 차원 최적화 문제에서 종말 시간이 늘어날 수록 파라미터화 된 변수들이 원래의 운동 방정식을 근사하는 능력이 감소하기 때문이다. 또한 어느 순간에 표적이 미사일의 추적을 회피할 수 없는 경우에는 종말 시간이 그 순간보다 더 뒤로 늦처진다 해도 표적이 회피할 수 없기 때문이다. 따라서 과정 3에서 사용하는 성능 지수는 u_{P_i} 및 t_f 가 고정되므로 다음과 같이 표현된다.

$$J = x_f \tag{9}$$

과정 4에서의 최적화를 종료하는 기준은 잘 알려진 표적의 최적 회피기동을 사용한 것이다 [6, 4].

다음 절에서는 제안한 기법의 타당성을 검증하기 위한 수치 예제를 풀었다.

5. 수치해석 예제

수치해석 예제의 미사일/표적의 초기 조건은 그림 3 에 나타나 있다. 표적은 초기에 미사일로부터 X 방향으로 1500 m 떨어져 있고 Y 방향으로 200 m/sec 의 속력으로 움직인다. 미사일은 초기에 X 방향으로 600 m/sec 의 속력을 가지고 표적을 향해 움직인다. 수치해석에 사용된 값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma_E &= 0.3,\ a = 0.0875,\ b = 0.40,\ R_P = 1515.15m \\ N &= 30 \\ W_1 &= 1, W_2 = 10, W_3 = 1. \end{aligned}$$

파라미터 최적화 기법으로는 sequential quadratic programming (SQP) 을 사용하였다 [3].

수치해석의 결과는 그림 4 에서 그림 11 까지 나타나 있다. 결과적인 요격 시간 및 miss distance 는 표 1 에 나타나 있다.. 요격 상황은 그림 4 에 나타나 있고 최적화된 미사일과 표적의 제어 입력은 각각 그림 10 및 11 에 나타나 있다. 미사일의 속력은 유도 항력의 영향으로 그림 7 에서와 같이 점차 감소하는 형태로 나타난다. 추적자 입력은 식 (8) 에 주어진 성능 지수가 미사일 입력의 제곱항을 포함하고 있으므로 연속적인 형태로 나타난다. 회피자의 입력은 표적이 다가오는 미사일을 피하기 위해 최대 회전을 갖는다. 이 결과들로부터 제안된 minimax 최적화 방법을 사용하여 수치적으로 최적해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

표 1: 수치해석 결과

요격 시간	8.2481 sec
Miss distance	$(2.1321, -5.2159) \times 10^{-5} m$

6. 결 론

본 논문에서는 2차원 미사일/표적 추적자-회피자 게임을 풀기 위한 새로운 수치해석 기법을 개발하였다. collocation 으로 파라미터화 된 문제에 직접적 최적화 기법을 적용하였고 minimax 최적화 문제를 풀기 위한 새로운 방법을 제시하였다. 개발된 기법의 타당성을 검증하기 위하여 수치해석 예제를 풀었고 결과적으로 제안된 기법을 사용하여 원하는 최적해를 구할 수 있음을 확인하였다.

본 연구는 서울대학교 자동제어특화연구센터의 지정과제 "End Game 소프트웨어 연구" 의 일부로 수행되었습니다.

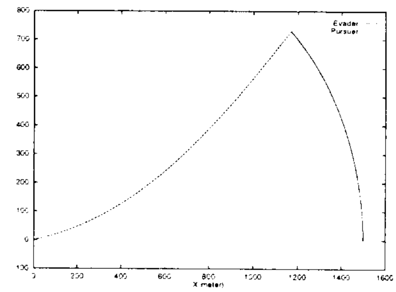

그림 4: 요격 상황

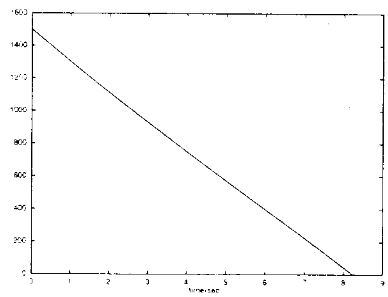

그림 5: X 방향 상대거리

참고문헌

[1] Blaquiére, A., Gèrard, F. and Leitmann, G., *Quantitative and Qualitative Games*, Academic Press, New York and London, 1969.

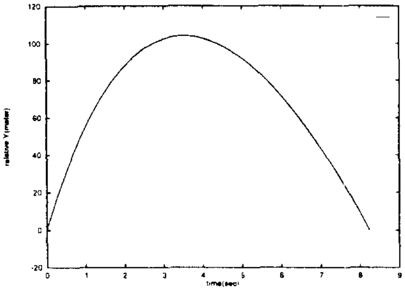

그림 6: Y 방향 상대거리

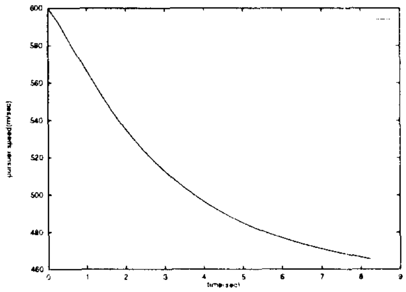

그림 7: 미사일 속력 V_P

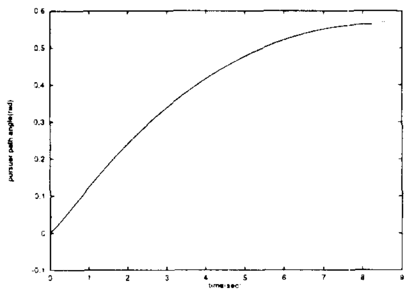

그림 8: 미사일 경로각 Γ_P

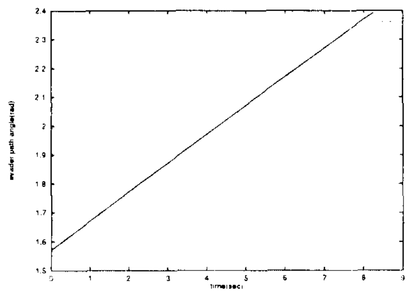

그림 9: 표적 경로각 Γ_E

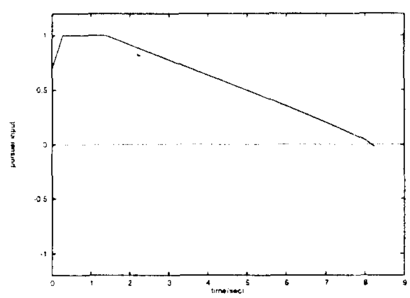

그림 10: 미사일 최적 입력 u_P^*

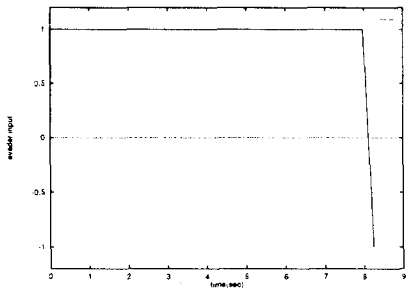

그림 11: 표적 최적 입력 u_E^*

[2] Enright, P. J. and Conway, B. A., "Discrete Approximation to Optimal Trajectories Using Direct Transcription and Nonlinear Programming," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, pp. 994-1002, July-August 1992.

[3] Grace, A., *Matlab Optimization Toolbox: User's Guide*, The Math Works Inc., 1993.

[4] Green, A., Shinar, J. and Guelman, M., "Game Optimal Guidance Law Synthesis for Short Range Missiles," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No. 1, pp. 191-197, January-February 1992.

[5] Grimm, W. and Well, K. H., "Modeling Air Combat as Differential Game - Recent Approaches and Future Requirements," *Proc. of the Fourth International Symposium on Differential Games and Applications*, Helsinki University of Technology, Finland, pp. 1-12, August 9-10, 1990.

[6] Guelman, M., Shinar, J. and Green, A., "Qualitative Study of a Planar Pursuit-Evasion Game in Atmosphere," AIAA Paper 88-4158, pp. 874-882, August 1988.

[7] Hargraves, C. R. and Paris, S. W., "Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, July-August 1987.

[8] Isaacs, R., *Differential Games*, John Wiley and Sons, New York, 1967.

[9] Moritz, K., Polis, R. and Well, K. H., "Pursuit-Evasion in Medium Range Air Combat Scenarios," *Comp. Math. Appl.*, Vol. 13, No. 1/3, pp. 167-180, 1987.

[10] Oberle, H. J. and Grimm, W., "BNDSCO - A Program for the Numerical Solution of Optimal Control Problems," Internal Report No. 515-89/22, Institute for Flight System Dynamics, DLR, Oberpfaffenhofen, FRG, 1989.