

# 단축조종 고속회전 유도탄의 비례항법유도 및 오차해석

## Proportional Navigation Guidance and Error Analysis of Fast-rolling Single-axis Control Missiles

°전병을, 송찬호

국방과학연구소 (Tel: (042)821-4413,4411, Fax:(042)821-2224)

**Abstract** We design a homing guidance law based on the proportional navigation for the fast-rolling, single-axis control missiles and analyse the misdistance of the designed guidance system. The guidance law includes a compensation scheme which compensates for the phase-shift between the commanded and achieved acceleration which is peculiar to the fast-rolling airframe with single-axis control. In the error analysis of the guidance system, we calculate the misdistance with respect to the target maneuver on the 3-dimensional space via direct simulations. Also, we conduct adjoint simulation on the 2-dimensional plane in case that phase-shift is perfectly compensated. Finally we approximate the linear time-varying dynamics of the missile with autopilot to a linear time-invariant system, and as a result we can find the misdistance as a closed-form.

**Keywords** Proportional navigation, Guidance, Rolling missile, Single-axis control, Homing

### 1. 서론

고속으로 회전하는(fast rolling) 유도탄은 횡방향(lateral)의 한 축에 대한 조종기능만을 갖더라도 관성공간(inertial space)에서 임의의 방향에 대한 기동(maneuver)이 가능하므로 유도탄에 장착된 탐색기(missile seeker)에서 측정되는 표적에 대한 유도탄의 시선변화율(missile-to-target line-of-sight rate; MTLOS rate) 정보를 이용하여 유도제어기를 구성할 수 있다. 그러나 단축조종(one-axis control) 유도탄의 조종 및 유도에서는 일반적인 두축 제어(two-axis control) 유도탄이 갖는 피치와 요 축에 대한 조종 및 유도의 대칭성이 상실되므로 유도 및 조종 성능특성의 해석에서는 유도탄의 회전 및 단축조종에 의한 영향이 고려되어야 한다. 따라서 피치와 요 운동간의 상호결합(cross coupling)이 고려된 유도탄 동역학이 유도루우프의 구성 및 성능 해석에 사용되어야 하고, 이는 기존 두축 제어 유도탄의 일반적인 접근법인 피치 혹은 요 운동 및 제어를 독립적으로 생각하는 방식을 그대로 적용할 수 없게 한다.

본 논문에서는 탐색기를 갖는 단축조종 고속회전 유도탄에 비례항법유도(proportional navigation guidance) 기법을 적용하여 호밍(homing) 유도제어기를 구성하고, 구성된 유도루우프의 성능특성을 살펴본다. 유도제어기의 구성에서는 단축조종 고속회전 유도탄의 고유한 특성의 하나인 유도지령과 실현된 가속도 사이의 위상천이(phase shift)를 효과적으로 보상하기 위한 방법을 생각해 본다. 표적기동에 대한 유도루우프의 성능해석에서는 유도평면(guidance plane) 상의 운동학(kinematics)에 의해 얻은 비선형식을 선형화하고, 이를 3차원 공간상으로 확장하여 유도지령과 실현된 가속도 사이의 위상천이에 의한 효과 및 위상천이에 대한 보상 효과를 살펴보기로 한다.

한편 유도지령은 3차원 공간상에서 극좌표(polar coordinates)로 주어지지만, 적절한 가정 하에 2차원 평면상의 문제로 간략화하고, 선형 시변시스템(linear time-varying system)인 제어기를

포함하는 회전 유도탄 동역학을 시불변 선형시스템(linear time-invariant system)으로 근사화 하는 방안을 생각해 본다. 마지막으로 수치 예를 통하여 3차원 공간상에 구현된 유도루우프 특성 및 위상천이의 보상효과를 살펴 보고, 2차원 평면으로 근사화한 유도루우프를 사용하여 구현 유도오차의 정확성 및 근사화된 유도루우프의 유용성 등을 살펴본다.

### 2. 유도탄의 동역학적 특성

유도탄의 동역학은 유도탄의 동체좌표계(missile body axes; b-좌표계)에 대해 표현하고, 이를 조종 및 유도 제어기 설계 및 해석에 사용하는 것이 일반적이나, 유도탄의 동체축에 대해 일정한 빠른 속도로 회전하는 단축조종 유도탄의 동역학은 유도루우프 관점에서 볼 때 회전이 없는 가상의 좌표계에 대해 표현하는 것이 편리하다.  $x^b$ 축은 유도탄의 동체좌표계와 공유하고, 나머지 두 축은 유도탄의 회전에 독립적으로 정의한 좌표계를 본원좌표계(principle axes; p-좌표계)라 할 때, p-좌표계에서 보면 유도탄 횡방향의 두 축, 즉 피치 및 요 운동은 빠른 롤 회전에 의해 강하게 결합되어 있다. 롤 회전이 일정하고 동체좌표계의 피치 축을 제어한다는 가정 하에 p-좌표계에 대하여 유도된 단축제어 고속회전 유도탄의 동역학은 다음과 같다[1].

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^p \\ \dot{r}^p \\ \dot{\beta}^p \\ \dot{\alpha}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_a & -H_r' & 0 & -M_a \\ H_r' & -N_r & -N_\beta & 0 \\ 0 & 1 & -Y_\beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -Z_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^p \\ r^p \\ \beta^p \\ \alpha^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_\delta & 0 \\ 0 & N_\delta \\ 0 & -Y_\delta \\ -Z_\delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a^p \\ \delta_r^p \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a_y^p \\ a_z^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_m Y_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -V_m Z_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^p \\ r^p \\ \beta^p \\ \alpha^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & V_m Y_\beta \\ -V_m Z_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_q^p \\ \delta_r^p \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_q^p \\ \delta_r^p \end{bmatrix} = -K_q^b \begin{bmatrix} \cos P_o t \\ \sin P_o t \end{bmatrix} \delta_a^b \quad (3)$$

$$\delta_a^b = -K_q^b \begin{bmatrix} \cos P_o t & \sin P_o t \\ \sin P_o t & \cos P_o t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^b \\ r^b \end{bmatrix} - K_\alpha^b \begin{bmatrix} \cos P_o t & \sin P_o t \\ \sin P_o t & \cos P_o t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{z^c}^b \\ a_{y^c}^b \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기에서  $H_r'$ 는 유도탄의 회전에 의한 결합항으로 다음의 (5)식으로 정의되며, 사용된 각 기호에 대한 정의는 다음과 같다.

$$H_r' = P_o I_{xx} / I_{yy} \quad (5)$$

$(q^p, r^p)$ :  $p$ -좌표계에서 정의된 유도탄의 피치 및 요 각속도

$(\alpha^p, \beta^p)$ :  $p$ -좌표계에서 정의된 각 축에 대한 받음각

$(\delta_q^p, \delta_r^p)$ :  $p$ -좌표계로 표현된 제어날개 변위

$(a_z^p, a_y^p)$ :  $p$ -좌표계로 나타낸 실현된 가속도,

$(a_{z^c}^p, a_{y^c}^p)$ :  $p$ -좌표계로 표현된 유도지령

$\delta_a^b$ : 유도탄 조종축의 제어날개 변위

$P_o$ : 유도탄의 회전 속도

$K_q^b$ : 유도탄 제어축의 감쇠특성을 개선하기 위한 제어상수

$K_\alpha^b$ : 조종루우프의 정상상태 이득을 조정하기 위한 제어상수

$V_m$ : 유도탄 속도

$Z_\alpha, M_\delta, \dots$ : 받음각 혹은 제어편각 등에 대한 차원 미계수

(1)-(4)식의 동력학에서 제어기를 포함하지 않은 유도탄만의 동력학은 선형시불변 시스템이나, 제어기를 포함할 경우는 선형시변시스템이 된다. 동력학에서 시변 요소는 유도탄의 회전에 의한 고주파 성분이므로 평균정리(averaging theorem)에 의해 시변 요소를 제거 할 수 있다.

이상적인 경우는 기동가속도 지령이  $z^p$ 축에만 주어지고 또한 같은 축에서만 가속도가 실현되어야 한다. 그러나 공력 및 구동장치 등의 부시스템에 의한 영향으로  $z^p$ 축의 유도지령에 대해  $z^p$ 축 뿐만 아니라  $y^p$ 축에도 가속도가 나타나게 된다. 공간상에서 볼 때, 이는 유도제어기에서 원하는 방향과는 위상이 천이된 방향에 기동이 실현되는 것이므로 유도성능에 영향을 미치게 된다. 이와 같은 유도지령과 실현된 가속도 사이의 위상천이에 대한 구체적인 계산 및 예는 참고문헌[1]에 소개되어 있다.

### 3. 비례항법 유도

횡방향의 피치 및 요 두축 모두에 동일한 제어기를 갖는 일반적인 두 축 제어 유도탄의 경우에는 두 축 사이에 조종 및 유도의 대칭성이 있으므로 평면상의 유도기하만을 생각하여 유도법칙을 구성하면, 이를 그대로 다른 축에도 적용할 수 있다. 따라서 이러한 일반적인 유도탄을 가정한 유도성능의 해석에서는 평면상의 유도기하만을 생각하는 것이 일반적이다[2]. 또한 이러한 일반적인 유도탄의 경우에는 유도탄의 회전이 있더라도 유도탄의 회전에 의한 유도지령과 응답 사이의 위상천이를 고려하면 두 축간의 대칭성은 유지되므로 일정하게 회전하는 유도탄의 비

례항법유도에서는 복소수 정합(complex conjugate) 기법에 의해 표적기동에 대한 유도 오차를 닫힌해(closed-form solution)로 얻을 수 있다[3].

그러나 단축조종 고속회전 유도탄은 유도지령이 극좌표계의 방향과 크기로 주어지고, 유도탄 또한 극좌표계에서 이를 실현하는 것으로 유도제어기의 역할이 모델링된다. 따라서 유도 제어기의 구성에서도 유도기하에 의한 운동학적 방정식은 직교좌표계에서 표현하고, 유도탄의 기동은 극좌표계에서 표현하는 것이 실제의 물리적 현상에 가까운 모델이 되므로 유도제어 문제는 직접 3차원 공간상에서 생각하여야 한다. 즉, 직교좌표계에서 유도기하와 유도탄의 기동 사이에 좌표변환이 개입된 형태로 유도루우프를 표현 할 수 있다.

호우밍 유도 제어에서 유도 기하의 기준이 되는 관성좌표계(inertial coordinate)와 유도탄에 주어지는 기동 명령 및 응답을 나타내기 위한 좌표계를 다음과 같이 정의하자.

$(x^I, y^I, z^I)$ : 관성좌표계(inertial axis; I-좌표계)

$(x^C, y^C, z^C)$ : 기동지령 좌표계(commanded maneuver axis; C-좌표계)

$(x^M, y^M, z^M)$ : 기동좌표계(achieved maneuver axis; A-좌표계)

여기에서 C-좌표계의  $x^C-z^C$  평면상에 유도탄과 표적을 잇는 시선(missile-to-target line-of-sight; MTLOS)이 존재하고, 유도지령은  $z^C$ 축에 대한 가속도로 주어진다.  $z^C$ 축에 주어진 유도지령에 의해 실현된 기동 가속도는  $z^C$ 축에서  $\phi_C^A$  만큼 위상이 천이된 방향으로 나타난다고 할 때, 이 방향을  $z^A$ 축으로 정의한 것이다. 따라서 위의 정의에 따르면 가속도 지령의  $y^C$ 축 성분 및 유도탄 기동의  $y^A$ 축 성분은 항상 영이 된다. 앞에서 정의된 각 좌표계 사이의 관계는 다음과 같은 좌표변환을 통하여 표현 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y^C \\ z^C \end{bmatrix} = T_I^C \begin{bmatrix} y^I \\ z^I \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} y^A \\ z^A \end{bmatrix} = T_C^A \begin{bmatrix} y^C \\ z^C \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기에서 좌표변환 행렬  $T_i^j$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$T_i^j = \begin{bmatrix} \cos \phi_i^j & \sin \phi_i^j \\ -\sin \phi_i^j & \cos \phi_i^j \end{bmatrix} \quad (8)$$

한편 유도지령과 응답사이의 위상천이( $\phi_C^A$ )에 의해 유도탄 궤적이 충돌 경로(collision course)에서 벗어나는 것은 궁극적으로는 탐색기에서 측정되는 시선변화율이 측정되는 방향이 바뀔에 의해, 즉  $\phi_C^A$ 가 변하면서 유도루우프에서 자체적으로 수정될 수 있으나, 이 과정에는 유도탄의 기동가속도가 궤적의 변화를 일으키기까지의 동력학적 지연요소가 개입된다. 따라서 위상천이 효과에 대한 별도의 보상이 없이 탐색기의 기본 기능에만 의존할 경우에는 위상천이의 의해 이탈된 궤도의 수정이 느리게 진행되며, 유도탄의 기동이 궤적의 변화를 유발하기까지의 시간지연에 의한 유도오차가 항상 남아있게 되고, 이 시간지연에 의한 궤도 이탈은 유도탄 기동의 크기에 비례한다.

이상적인 위상천이 보상은 실시간(real time)으로 위상천이를 측정하여 실시간으로 보상하는 것이겠지만, 이는 별도의 감지기를 필요로 하므로 별도의 감지기 없이 구현이 가능한 실용적인 보상방안으로 다음의 두가지를 생각할 수 있다.

1) H/W적인 보상: 유도탄에서 탐색기 축과 제어기 축을 위상천이각 만큼 기계적으로 틀어서 장착하거나, 이를 전기적으로 실현하는 것이다. 이 경우는 모두 위상천이각이 비행조건 및 비행상태에 따라 크게 달라지지 않는다는 전체 하에 가능한 것으로 보상을 위한 추가적인 데이터를 필요로하지 않는 간략한 방식이

라는 장점이 있으나, 위상천이가 비행조건 및 상태에 따라 변할 경우에는 정확한 보상이 어렵게 되는 단점을 동시에 갖는다.

2) S/W 적인 보상: 유도탄의 동력학적 특성의 해석으로부터 비행조건 혹은 비행시간 등의 함수로 구한 위상천이 값을 사용하면 유도탄의 탑재컴퓨터(on-board computer) 프로그램을 통하여 위상천이를 보상할 수 있다. 이 방식은 비행조건에 따라 변하는 위상천이값의 변화에도 대응할 수 있는 실용적인 보상기법으로 생각된다.

비례항법유도에서 통상적으로 사용되는 2-점 유도기하(two-point guidance geometry) 상에서 얻어진 운동학적 방정식을 선형화 한 것[2]을 3-차원 공간으로 그대로 확장하고, 단축제어 회전유도탄의 특성 및 위에서 언급한 위상천이에 대한 보상을 고려하면 유도루우프를 구성할 수 있다. 예로 보인 그림 1은 표적기동에 대한 유도오차 해석을 위한 유도루우프를 나타낸다.

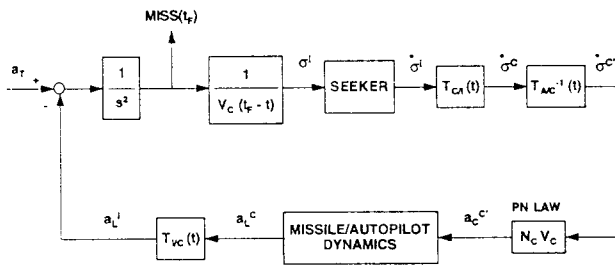


그림 1. 단축조종 회전 유도탄의 비례항법 유도루우프  
Fig. 1. Proportional navigational guidance loop of the fast-rolling single-axis control missiles

다음 그림 2는 참고문헌[1]에서 사용된 유도탄 동력학 모델을 이용하여 그림 1의 유도루우프에 대한 유도오차를 잔여시간(time-to-go;  $t_{go}$ )을 달리한 여러차례의 시뮬레이션을 통하여 계산한 것이다. 그림 2는 위상천이에 대한 보상이 없는 경우와 보상이 있는 경우의 유도오차를 보여주는데, 보상이 있는 경우는 다시 위상천이를 실시간으로 계산하는 이상적인 보상의 경우와 동력학 모델의 해석에서 얻은 위상천이의 정상상태 값으로 보상을 한 두 경우를 모두 고려하였다. 그림에 의하면 두가지 보상 방식 모두 유도오차의 차가 거의 없음을 알 수 있다.

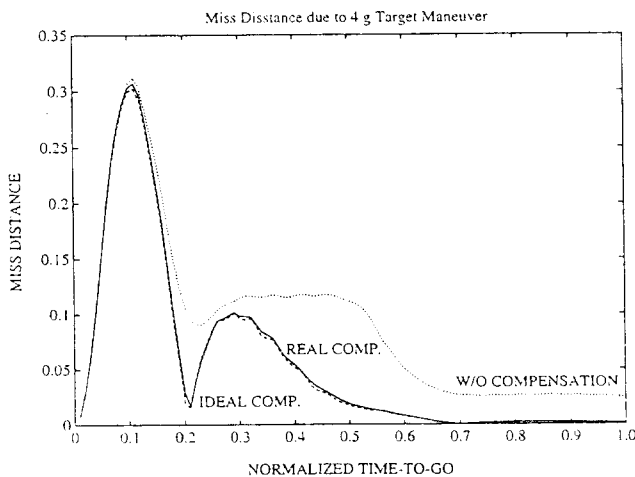


그림 2 3-차원 공간상에서의 유도오차  
Fig. 2. Guidance error on 3-dimensionaonl space

#### 4. 유도오차 해석을 위한 근사화

유도지령과 응답사이의 위상천이에 대한 보상기능을 갖는 유도루우프(그림 2)는 관성공간과 탐색기 및 기동평면 사이의 좌표변환과 유도탄의 동력학으로 인하여 비선형 시변 시스템이 된다. 본 절에서는 좌표변환에 의한 비선형요소에서 비선형요소를 간략화 하고 유도탄의 동력학에 의한 시변요소를 제거하여 유도루우프의 오차해석을 간략하게 수행할 수 있는 방안에 대해 생각한다.

먼저 좌표변환에 의한 비선형요소를 근사화하기 위하여 다음과 같은 가정을 하자.

가정 1) 유도지령과 응답사이의 위상천이에 대한 보상이 정확하게 이루어진다.

가정 2)  $x^I-z^I$  평면상에 국한된 표적의 기동만을 생각한다.

I-좌표계의  $z^I$ 축이 C-좌표계의  $z^C$ 축과 일치하도록 초기화 하면 위의 두 가정 하에 I-좌표계, C-좌표계 및 A-좌표계가 일치하게 되고, 표적 및 유도탄은  $x-z$  평면상에서만 움직이게 된다. 따라서 그림 2에서 좌표변환 요소들이 제거되고,  $y$ 축에 대한 운동이 사라지게 되어 3차원 공간의 유도문제가 2차원 평면의 문제로 간략하게 된다. 근사화된 2차원 문제는 선형 시변 시스템(linear time-varying system)이 되어 애조인트 기법(adjoint method) 등 선형시스템에 대한 여러 유도오차 해석기법[2]을 적용할 수 있다.

또한 유도탄 동력학에 포함된 시변요소인 (3)-(4)식은 유도탄 회전에 의한 고주파 성분으로, 유도탄 회전의 한주기에 대한 평균을 취하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{\sigma^i} \\ \bar{\delta}_{\sigma^c} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} K_q^b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^b \\ r^b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} K_q^b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{yc}^b \\ a_{zc}^b \end{bmatrix} \quad (9)$$

(1)-(2) 및 (9)식은 근사화를 통하여 얻은 유도탄의 선형 시불변 모델을 나타내는데, 이를 앞에서 근사화한 2 차원의 유도루우프에 적용하면 유도루우프는 잔여시간만을 시변요소로 갖는 선형 시스템이 된다. 최종적으로 근사화된 유도루우프는 애조인트 시스템 이론[4]에 의해 애조인트 루우프로 바꿀 수 있을 뿐만 아니라 유도오차를 표적기동 및 헤딩오차(heading error)에 대한 닫힌해(closed-form solution)로 구할 수 있게 된다[2].

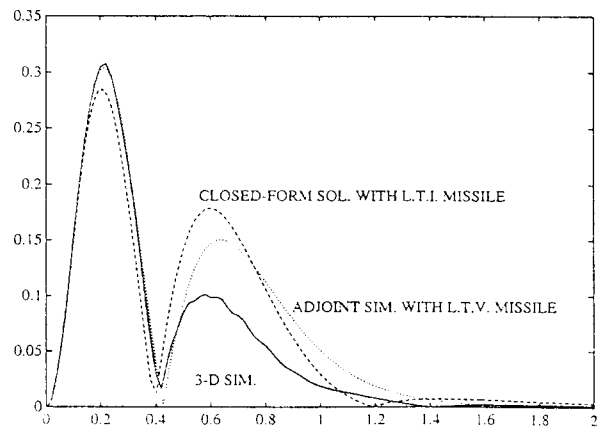


그림 3. 근사화 해석을 통한 유도오차  
Fig. 3. Guidance error of the approximated system

그림 3은 3차원 시뮬레이션에 의해 구한 유도오차(그림 2에서 현실적으로 보상된 경우)와 앞의 두 단계의 근사화 과정을 거치며 얻은 유도오차를 나타낸다. 그림에서 보면 대체로 근사화 단계를 거침에 따라 3차원 해석결과 보다 유도오차가 커지기는 하나 대체적인 경향은 잘 유지되고 있다.

## 5. 결론

단축조종 고속회전 유도탄의 비례항법 유도제어기를 구성하고, 선형화된 운동학 방정식을 사용하여 표적기동에 대한 유도오차를 살펴보았다. 유도제어기는 단축조종 회전 유도탄의 고유한 특징인 지령가속도와 응답 사이의 위상천이를 보상하기 위한 좌표변환이 포함되어 3차원 공간상에 구현되었고, 표적기동에 대한 유도오차는 3차원으로 구성된 유도루우프에 대해 계산되었다. 또한 간략한 유도오차 해석을 위해 위상천이에 대한 보상기를 포함하는 3차원 유도문제를 평면상의 문제로 근사화하고, 선형 시변시스템인 조종루우프의 동력학을 선형 시불변 시스템으로 근사화하여 궁극적으로는 표적기동 혹은 헤딩오차에 대한 유도오차의 닫힌해를 구할 수 있도록 하였다. 간략한 수치예를 통하여 살펴본 결과 근사화에 의한 오차해석 결과가 3차원 유도문제에 대한 유도오차보다 전반적으로 크게 나타나는 경향이 있으나 오차의 양상에 있어서는 대체로 유사한 형태를 보였다.

## 참고문헌

- [1] 진정석, 이재혁, "1축 날개 조종형 고속회전 유도탄의 조종특성 해석", *제어 자동화 시스템 공학*, 2권 2호, 1996.6, pp. 102-107
- [2] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 2nd Ed., AIAA Inc., 1994.
- [3] J. Shinar and P. Zarchan, "Miss distance calculation for rolling missiles", AIAA paper 76-1955, 1976.
- [4] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentic-Hall, Inc., 1980.